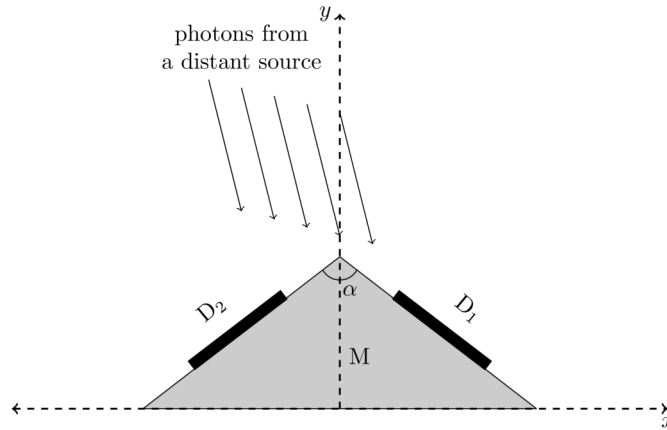


(T01) Nhiệm vụ Daksha
[10 điểm]

“Daksha” là một dự án được đề xuất của Ấn Độ bao gồm hai vệ tinh S_1 và S_2 quay quanh Trái Đất trong cùng một quỹ đạo tròn với bán kính $r = 7000$ km nhưng lệch pha 180° . Các vệ tinh này quan sát vũ trụ trong vùng năng lượng cao (tia X và tia γ). Mỗi vệ tinh của Daksha sử dụng một vài máy dò phẳng, hình chữ nhật.

Để hiểu cách định vị một nguồn trên bầu trời, ta sử dụng mô hình đơn giản hóa của Daksha. Giả sử S_1 chỉ có hai máy dò giống hệt nhau D_1 và D_2 , mỗi cái có diện tích $A = 0.50$ m², gắn vào một giá đỡ không trong suốt M như được hiển thị trong hình dưới đây. Hai máy dò nằm đối xứng qua trục y , trong các mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $x-y$ và tạo thành một góc $\alpha = 120^\circ$ với nhau.



- (T01.1) Khi quan sát một nguồn ở xa nằm trong mặt phẳng $x-y$, máy dò D_1 đo được công suất $P_1 = 2.70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ và máy dò D_2 đo được công suất $P_2 = 4.70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹.

Ước tính góc η giữa vector vị trí của nguồn và trục y -dương. Quy ước: góc dương được đo ngược chiều kim đồng hồ, bắt đầu từ trục y -dương. **[5]**

Quan sát một xung đơn từ một nguồn xa (không nhất thiết nằm trong mặt phẳng $x-y$) được ghi lại bởi cả hai vệ tinh (S_1 và S_2) của Daksha. Thời gian của đỉnh xung được đo bởi S_1 và S_2 lần lượt là t_1 và t_2 .

- (T01.2) Biết rằng $t_1 - t_2$ được đo là 10.0 ± 0.1 ms, hãy xác định tỉ phần f của thiên cầu nơi nguồn có thể nằm. **[5]**

(T02) Makar-Sankranti
[10 marks]

Lễ hội “Makar-Sankranti” được tổ chức ở Ấn Độ khi Mặt Trời đi vào vùng hoàng đạo của chòm sao Capricorn (Makar = Capricorn, Sankranti = Đi vào) khi nhìn từ Trái Đất. Hiện nay, lễ hội này được tổ chức vào khoảng ngày 14 tháng Một hàng năm. Nhiều năm trước, lễ hội này cũng trùng với ngày Đông chí ở Bắc bán cầu mà chúng ta giả định diễn ra vào ngày 21 tháng Mười hai.

- (T02.1) Dựa vào thông tin trên, tìm năm y_c khi lần cuối lễ hội này trùng với ngày Đông chí ở Bắc bán cầu. **[3]**
- (T02.2) Nếu Mặt Trời đi vào vùng hoàng đạo của Capricorn lúc 11:50:13 giờ địa phương ngày 14 tháng Một năm 2006 tại Mumbai, hãy tính ngày D_{enter} và giờ địa phương t_{enter} khi nó đi vào Capricorn trong năm 2013. **[3]**
- (T02.3) Lễ hội Makar-Sankranti được tổ chức tại một địa điểm nhất định lúc hoàng hôn của ngày đầu tiên khi Mặt Trời đi vào vùng hoàng đạo của Capricorn. Giả định rằng thời gian hoàng hôn địa phương ở Mumbai vào tháng Một là 18:30:00. **[3]**

Xác định ngày tổ chức lễ hội hàng năm từ 2006 đến 2013 (bằng cách đánh dấu (✓) vào ô tương ứng ở bảng trong Summary Answersheet). [4]

(T03) Sóng hấp dẫn

[15 điểm]

Các lỗ đen sao đôi quay quanh nhau tạo ra sóng hấp dẫn. Xét hai lỗ đen trong Ngân Hà có khối lượng $M = 36 M_\odot$ và $m = 29 M_\odot$, quay quanh khối tâm theo các quỹ đạo tròn với vận tốc góc ω .

(T03.1) Dùng lý thuyết hấp dẫn Newton, tìm biểu thức cho vận tốc góc ω_{ini} của quỹ đạo lỗ đen tại thời điểm t_{ini} khi khoảng cách giữa các lỗ đen là 4.0 lần tổng bán kính Schwarzschild của chúng (chỉ theo các đại lượng M , m và các hằng số vật lý).

Tính giá trị của ω_{ini} (theo rad s^{-1}).

[5]

(T03.2) Theo thuyết tương đối rộng, các lỗ đen trên quỹ đạo phát ra sóng hấp dẫn với tần số f_{GW} sao cho $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. Điều này khiến quỹ đạo của các lỗ đen bị thu nhỏ, do đó làm tăng f_{GW} . Tốc độ thay đổi của f_{GW} là:

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^\beta M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

trong đó $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ được gọi là “chirp mass”.

Tìm giá trị của α , β và δ .

[4]

(T03.3) Giả sử rằng các sóng hấp dẫn của sự kiện này được phát hiện kể từ thời điểm $t_{\text{ini}} = 0$.

[6]

Xác định biểu thức cho thời điểm của sự hợp nhất lỗ đen t_{merge} khi f_{GW} trở nên rất lớn (chỉ theo các đại lượng ω_{ini} , M_{chirp} và các hằng số vật lý).

Tính giá trị của t_{merge} (theo giây).

(T04) Sự suy giảm Balmer

[15 điểm]

Xét một sao dải chính được bao quanh bởi một tinh vân. Cấp sao biểu kiến (ở V-band) của sao là 11.315 mag. Vùng ion hóa của tinh vân gần ngôi sao phát ra các vạch $H\alpha$ và $H\beta$; bước sóng của chúng lần lượt là $0.6563 \mu\text{m}$ và $0.4861 \mu\text{m}$. Tỷ lệ thông lượng theo lý thuyết của vạch $H\alpha$ so với $H\beta$ là $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2.86$. Tuy nhiên, khi bức xạ này đi qua phần ngoài của tinh vân lạnh chứa bụi, thông lượng quan sát được của các vạch $H\alpha$ và $H\beta$ lần lượt là $6.80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ và $1.06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

Sự suy giảm (extinction) A_λ theo hàm của bước sóng được biểu diễn dưới dạng

$$A_\lambda = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Ở đây, $\kappa(\lambda)$ là đường cong suy giảm và $E(B - V)$ chỉ độ dư màu (color excess) giữa các bands B và V. Đường cong suy giảm (với λ theo μm) được cho như sau.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

trong đó, $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ là tỉ số suy giảm toàn phần trên suy giảm chọn lọc.

(T04.1) Tìm các giá trị của $\kappa(H\alpha)$ và $\kappa(H\beta)$. [3]

(T04.2) Tìm tỉ lệ giữa các độ dư màu $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$. [4]

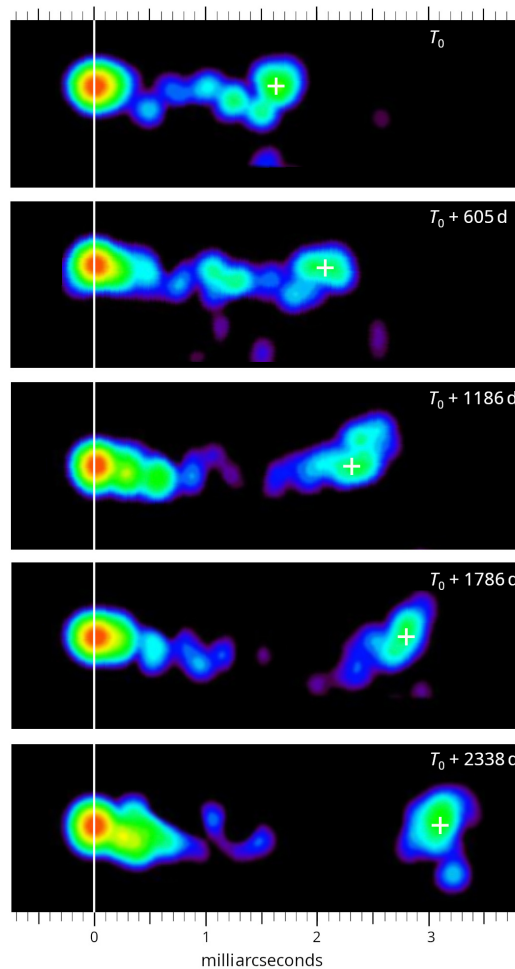
(T04.3) Ước tính sự suy giảm $A_{H\alpha}$ và $A_{H\beta}$ do tinh vân tại các bước sóng tương ứng $H\alpha$ và $H\beta$. [6]

(T04.4) Ước tính sự suy giảm của tinh vân (A_V) và cấp sao biểu kiến của ngôi sao trong V-band khi không có tinh vân (m_{V0}). [2]

(T05) Quasars

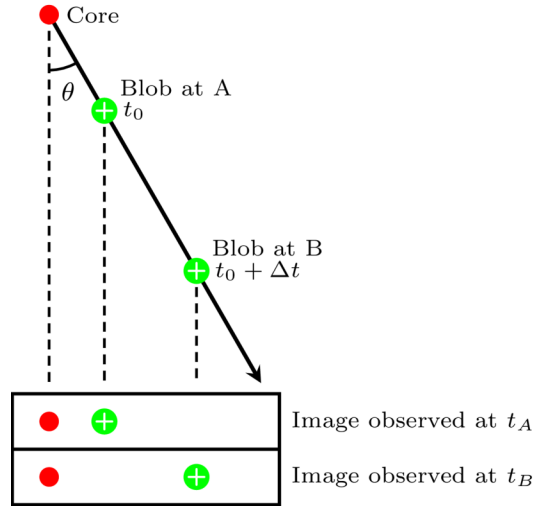
[20 điểm]

Quasar là lõi thiên hà hoạt động cực kỳ sáng được cung cấp năng lượng bởi một lỗ đen siêu khối lượng phát ra các jets tương đối tính. Hình vẽ cho thấy loạt ảnh vô tuyến của một quasar (với độ dịch chuyển đỏ $z = 0.53$, và khoảng cách theo độ trung $D_L = 1.00 \times 10^{10}$ ly) tại các thời điểm khác nhau. "Lõi" thẳng hàng theo đường trắng dọc, còn jet có một "đốm" (được đánh dấu + màu trắng), di chuyển ra xa lõi theo thời gian. Mỗi ảnh hiển thị thời gian quan sát (bắt đầu với T_0 cho ảnh đầu tiên), và thang đo theo góc được đặt ở ngay phía trên và phía dưới của hình.



- (T05.1) Xác định góc phân tách (angular separation) của đốm ϕ_{blob} (theo milliarcsecond) và khoảng cách ngang (transverse distance) l_{blob} giữa nó với quasar (theo năm ánh sáng ly) cho mỗi ảnh quan sát. Từ đó tính tỉ lệ vận tốc biểu kiến của đốm theo phương ngang (v_{app}) so với tốc độ ánh sáng $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ bằng cách sử dụng các ảnh quan sát liên tiếp. Bên cạnh đó, tính vận tốc biểu kiến trung bình $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ trong khoảng thời gian từ lúc bắt đầu tới khi kết thúc quan sát. [5]

Jet của quasar di chuyển với tốc độ tương đối tính $v \equiv \beta c$ nhưng không nhất thiết phải nằm trong mặt phẳng bầu trời; ví dụ, nó tạo một góc θ (viewing angle) so với phương nhìn của quan sát viên ở xa (được biểu diễn bằng các đường nét đứt) như minh họa trong hình dưới đây. Đối với phần này và tất cả các phần tiếp theo, bỏ qua sự dịch chuyển đỏ của quasar và bất kỳ hiệu ứng tương đối tính nào.



- (T05.2) Tín hiệu phát ra từ đốm sáng tại hai thời điểm khác nhau t_0 (tương ứng với vị trí A) và $t_0 + \Delta t$ (tương ứng với vị trí B) đến người quan sát tại t_A và t_B . Do đó, sự khác biệt thời gian quan sát là $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

- (T05.2a) Tìm biểu thức cho tỉ lệ $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ theo β và θ . [2]

- (T05.2b) Sử dụng tỉ lệ này, biểu diễn β_{app} theo β và θ . [2]

- (T05.3) Chuyển động được gọi là "superluminal" nếu tốc độ biểu kiến vượt quá tốc độ ánh sáng ($\beta_{\text{app}} > 1$), và "subluminal" nếu ngược lại ($\beta_{\text{app}} < 1$).

- (T05.3a) Đối với $\beta_{\text{app}} = 1$, vẽ đường cong tròn của β theo hàm của θ để phân định ranh giới giữa chuyển động "subluminal" và "superluminal". Trên đồ thị, hãy dùng các đường gạch chéo (///) để tô toàn bộ vùng "superluminal". [4]

- (T05.3b) Tìm tỉ lệ tốc độ thực nhỏ nhất của jet ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$) để chuyển động "superluminal" xảy ra và góc nhìn (viewing angle, θ_{low}) tương ứng của nó. [2]

- (T05.4) Với một giá trị khả dĩ cho trước của β_{app} , tìm biểu thức cho góc nhìn lớn nhất θ_{max} . [2]

Lõi của một quasar có sự thay đổi khi phát xạ do các quá trình nội bộ xảy ra trong một vùng có liên kết nhân quả. Kích thước (= bán kính) của vùng này thường cỡ 5 lần bán kính Schwarzschild của lõi.

- (T05.5) Lõi của một quasar nhất định được phát hiện thay đổi theo thang thời gian (time scale) cỡ 1 giờ. Xác định giới hạn trên $M_{c, \text{max}}$ về khối lượng của lõi, tính bằng đơn vị khối lượng Mặt Trời. [3]

(T06) Sự quay của Ngân Hà
[20 điểm]

Đường cong quay của Ngân Hà được xác định bằng cách sử dụng các phép đo vận tốc theo phương nhìn của các đám mây hydro trung hoà (HI) dọc theo các kinh độ khác nhau của Ngân Hà, được quan sát qua vạch 21 cm của HI. Xem xét một đám mây HI có kinh độ l , cách Trung tâm Ngân Hà (GC) một khoảng R và cách Mặt Trời một khoảng D . Biết khoảng cách giữa Mặt Trời và GC là $R_0 = 8.5$ kpc. Giả sử cả Mặt Trời và đám mây HI đều quay tròn quanh GC trong mặt phẳng Ngân Hà, tương ứng với các vận tốc góc Ω_0, Ω và các vận tốc dài V_0, V .

Các thành phần vận tốc dọc theo phương nhìn (V_r) và vận tốc ngang (V_t) của đám mây, khi quan sát từ Mặt Trời, có thể được biểu diễn như sau

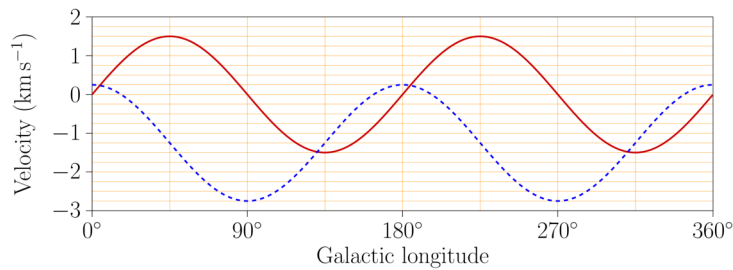
$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Khi nhìn từ Cực Bắc Ngân Hà, Ngân Hà quay theo chiều kim đồng hồ. Trong bài toán này, qui ước vận tốc dọc theo phương nhìn là dương khi đi ra xa và các đám mây sẽ được coi như các đối tượng điểm.

(T06.1) Trên đồ thị được cung cấp trong Summary Answersheet, vẽ V_r theo hàm của D từ $D = 0$ đến $D = 2R_0$ cho hai phương nhìn (i) $l = 45^\circ$ và (ii) $l = 135^\circ$. Ghi nhãn mỗi đường cong của bạn với giá trị l tương ứng. **[5]**

(T06.2) Đồ thị dưới đây cho thấy các thành phần vận tốc trung bình theo hướng xuyên tâm (đường cong liền, màu đỏ) và theo hướng ngang (đường cong nét đứt, màu xanh) của các ngôi sao ở khoảng cách 100 pc từ Mặt Trời, được vẽ theo hàm của kinh độ Ngân Hà.



Sử dụng đồ thị, ước tính chu kỳ quỹ đạo của Mặt Trời (P) quanh GC tính bằng triệu năm (Myr). **[3]**

(T06.3) Jan Oort đã nhận ra rằng trong vùng lân cận mặt trời ($D \ll R_0$), sự khác biệt về vận tốc góc ($\Omega - \Omega_0$) sẽ nhỏ, và do đó, ông đã suy ra xấp xỉ bậc nhất sau đây cho các thành phần vận tốc theo phương nhìn và vận tốc ngang:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

trong đó A và B được gọi là các hằng số của Oort.

Hãy xét hai trường hợp:

(I) đường cong quay thực tế quan sát được của Ngân Hà, và

(II) đường cong quay cho một kịch bản giả định trong đó Ngân Hà không có vật chất tối và toàn bộ khối lượng của Ngân Hà được giả định tập trung tại trung tâm của nó.

(T06.3a) Rút ra các biểu thức cho radial gradient của vận tốc quay tại vị trí Mặt Trời, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$, cho hai trường hợp. **[2]**

(T06.3b) Biểu diễn A và B theo V_0, R_0 , và radial gradient của vận tốc quay tại vị trí Mặt Trời, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$. **[8]**

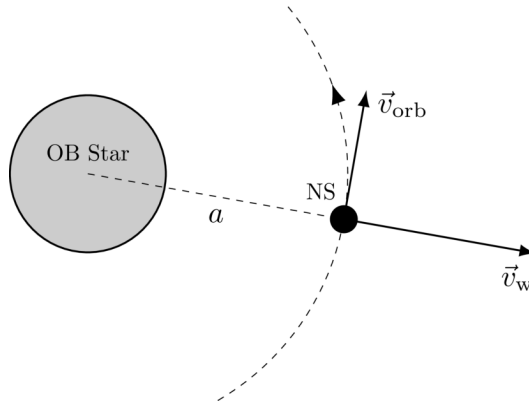
- (T06.3c) Gọi F_I và F_{II} là tỉ lệ (A/B) tương ứng với hai trường hợp đã cho, (I) và (II). Tính giá trị F_I và F_{II} . [2]

(T07) Hệ Sao đôi Neutron

[20 điểm]

Xét hệ sao đôi gồm một sao đặc kích thước rất nhỏ (compact) và sao đồng hành (companion) có kích thước không tràn qua thủy giới hạn Roche của sao compact. Nguồn chính của sự bồi tụ cho sao compact là gió sao từ sao companion. Sự bồi tụ do gió sao này đặc biệt quan trọng trong các hệ bao gồm một sao early-type (như sao loại O hoặc B, gọi chung là sao OB), cùng với một vật thể compact như sao neutron (NS) trong một quỹ đạo gần.

Sao neutron của một hệ sao NS-OB như vậy có khối lượng $M_{NS} = 2.0 M_{\odot}$ và bán kính $R_{NS} = 11$ km, quay trên một quỹ đạo tròn bán kính a xung quanh tâm của sao OB với vận tốc $v_{orb} = 1.5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (hình dưới đây). Trong suốt bài toán này, sự mất khối lượng của sao OB được giả định tuân theo đối xứng cầu với tốc độ là $\dot{M}_{OB} = 1.0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.



- (T07.1) Bán kính bồi tụ (accretion radius), R_{acc} , được định nghĩa là khoảng cách tối đa tính từ NS mà gió sao có thể bị NS bắt giữ. Nếu tốc độ gió sao tại quỹ đạo của NS là $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, hãy tìm R_{acc} cho hệ trên (theo km) dựa trên tính toán về vận tốc thoát. [3]
- (T07.2) Giả sử rằng tất cả vật chất bị bắt giữ đều được tích tụ bởi NS, ước tính tốc độ bồi tụ khối lượng, $\dot{M}_{acc}$, từ gió sao vào NS theo đơn vị $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ nếu $a = 0.5 \text{ au}$. Bỏ qua các tác động của áp suất bức xạ và thời gian làm mát (cooling time) hữu hạn của khí bồi tụ. [3]
- (T07.3) Bây giờ hãy xem xét tình huống khi tốc độ gió sao tại khoảng cách quỹ đạo a (gần NS) trở nên tương đương với tốc độ quỹ đạo của NS. Tỷ lệ bồi tụ khối lượng từ gió sao vào NS trong trường hợp này sẽ được cho bởi biểu thức dạng $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$, trong đó $q = M_{NS}/M_{OB}$ là tỉ lệ khối lượng của hệ sao đôi và β là góc trong hệ quy chiếu của NS giữa hướng vận tốc gió và hướng xuyên tâm ra xa khỏi sao OB. Hãy tìm biểu thức cho $f(\tan \beta, q)$ giả sử $M_{OB} \gg M_{NS}$. [6]
- (T07.4) Xem xét rằng vật chất bị ion hóa hoàn toàn tích tụ theo hướng xuyên tâm và bị cản trở do từ trường mạnh $\vec{B}$ của NS. Hiệu ứng này có thể được mô hình hóa như một áp suất, được cho bởi $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Giả định rằng NS có một từ trường lưỡng cực có độ lớn trong mặt phẳng xích đạo thay đổi theo khoảng cách r tính từ NS cho $r \gg R_{NS}$ như sau

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{NS}}{r} \right)^3$$

trong đó B_0 là từ trường tại xích đạo của NS. Giả định rằng trục của lưỡng cực từ thẳng hàng với trục quay của NS.

- (T07.4a) Tìm áp suất từ $P_{eq, mag}$ trong mặt phẳng xích đạo theo B_0, R_{NS}, r , và các hằng số thích hợp khác. [1]

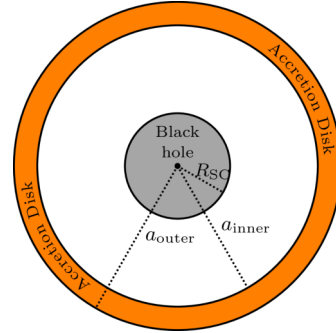
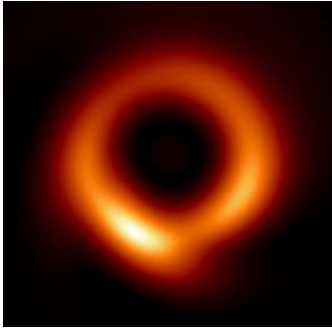
- (T07.4b) Khoảng cách tối đa mà dòng chảy bồi tụ bị dừng lại bởi từ trường tại mặt phẳng xích đạo được gọi là bán kính từ quyển R_m . Dòng chảy vật chất này sẽ tạo ra một áp suất do chuyển động tương đối giữa gió sao và NS. Tìm biểu thức xấp xỉ cho từ trường tối hạn $B_{0,c}$ mà tại đó R_m trùng với R_{acc} và tính giá trị của nó theo đơn vị Tesla. Bỏ qua các hiệu ứng từ cho $r > R_m$ và chỉ xét $v_w \gg v_{orb}$. [7]

(T08) Bóng của lỗ đen

[20 điểm]

Kính viễn vọng Chân trời Sự kiện (EHT) đã công bố hình ảnh của lỗ đen siêu khối lượng tại trung tâm của thiên hà M87 như được hiển thị ở hình bên trái dưới đây.

Để hiểu một số đặc điểm đơn giản của ảnh này, chúng ta sẽ xem xét mô hình đơn giản hóa của một lỗ đen không quay, tĩnh, đối xứng cầu với khối lượng $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$, được bao quanh bởi một đĩa bồi tụ mỏng, phẳng, không có khối lượng với bán kính trong và ngoài lần lượt là $a_{inner} = 6R_{SC}$ và $a_{outer} = 10R_{SC}$, với R_{SC} là bán kính Schwarzschild. Hình phác thảo nhìn từ trên xuống được hiển thị ở hình bên phải dưới đây (không theo tỷ lệ).



Chúng ta giả định rằng đĩa bồi tụ là nguồn sáng duy nhất cần xem xét. Mỗi điểm trên đĩa phát ra ánh sáng theo mọi hướng. Ánh sáng này di chuyển dưới ảnh hưởng của trường hấp dẫn của lỗ đen. Đường đi của các tia sáng tuân theo hai phương trình dưới đây (tương tự như của một vật thể xung quanh Mặt Trời):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

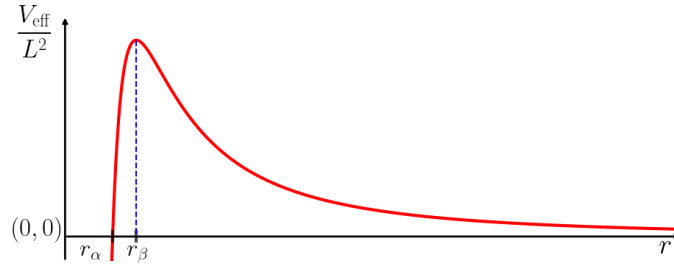
trong đó $r \in (R_{SC}, \infty)$ là bán kính, $\phi \in [0, 2\pi)$ là góc phương vị, còn E và L là các hằng số tương ứng liên quan đến năng lượng bảo toàn và mô-men động lượng bảo toàn.

Ở đây $v_r \equiv dr/dt$ là độ lớn của vận tốc hướng tâm, v_ϕ là độ lớn của vận tốc tiếp tuyến, và $\omega \equiv d\phi/dt$ là vận tốc góc. Chúng ta định nghĩa tham số va chạm b (impact parameter) cho một quỹ đạo là $b = L/\sqrt{2E}$. Sự giãn thời gian được bỏ qua trong bài toán này.

Một phương trình hữu ích khác được thu được bằng cách lấy đạo hàm của phương trình đầu tiên:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

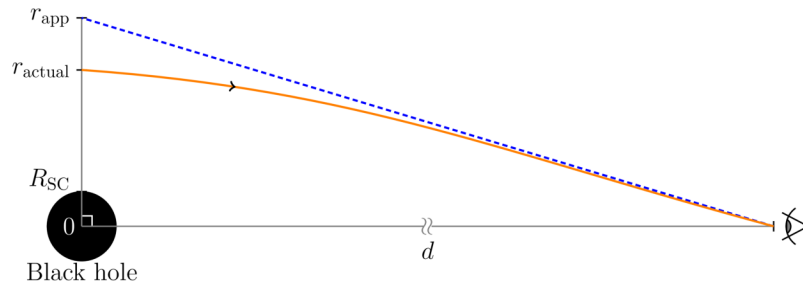
- (T08.1) Các quỹ đạo ánh sáng tròn có thể tồn tại xung quanh lỗ đen. Tìm bán kính, r_{ph} và tham số va chạm b_{ph} cho các quỹ đạo của photon như vậy theo M và các hằng số liên quan. [4]
- (T08.2) Tính thời gian T_{ph} cần thiết để hoàn thành một quỹ đạo tròn của đường đi ánh sáng tính theo giây. [2]
- (T08.3) Phương trình vận tốc xuyên tâm được đưa ra ở trên (phương trình đầu tiên trong câu hỏi này) có thể so sánh với một phương trình có dạng $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$ cho các quỹ đạo ánh sáng. Đồ thị V_{eff}/L^2 theo hàm của r được đưa ra dưới đây.



(T08.3a) Đồ thị chỉ ra hai bán kính đặc biệt, r_α và r_β . Tìm các biểu thức cho r_α và r_β theo M và các hằng số liên quan. [2]

(T08.3b) Một photon di chuyển từ đĩa bồi tụ hướng về lỗ đen vẫn có thể thoát ra vô cực trong một số trường hợp. Tìm biểu thức giá trị nhỏ nhất của bán kính quay đầu (turning point radius) r_t cho photon này theo M và các hằng số liên quan. Tìm biểu thức giá trị nhỏ nhất của tham số va chạm $b_{\min}$ cho photon này. [3]

(T08.4) Một tia sáng tới từ khoảng cách r_{actual} tính từ tâm của hệ trong mặt phẳng bầu trời chịu sự bẻ cong mạnh do lực hấp dẫn của lỗ đen và cuối cùng sẽ đến người quan sát (được biểu thị bằng một con mắt) cách hệ một khoảng cách lớn d như được minh họa dưới đây.

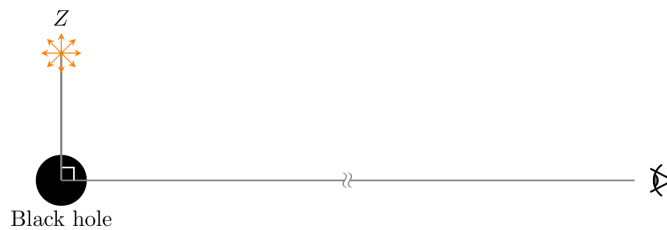


Đối với người quan sát này, tia sáng sẽ xuất hiện như đã phát ra từ một điểm khác ở khoảng cách $r_{\text{app}} \approx b$ tính từ tâm lỗ đen trong mặt phẳng bầu trời, nơi b là tham số va chạm cho quỹ đạo photon đó. Đối với các điểm trên đĩa bồi tụ tại $r = r_{\text{actual}}$, có thể giả định mối quan hệ sau:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

Đối với người quan sát từ xa, như chúng ta, với góc nhìn trực diện của đĩa bồi tụ, ảnh của hệ sẽ xuất hiện đối xứng tròn trong mặt phẳng bầu trời. Xác định bán kính biểu kiến ngoài cùng, r_{outer} , và bán kính biểu kiến trong cùng, r_{inner} , của ảnh theo đơn vị au. [5]

(T08.5) Xem xét một lỗ đen siêu khối lượng cô lập có khối lượng $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$ không có đĩa bồi tụ. Một vụ nổ ngắn mạnh của bức xạ điện từ xảy ra trong 5s tại một điểm Z ở khoảng cách $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ tính từ lỗ đen như được hiển thị trong hình. Vụ nổ tại điểm Z phát ra ánh sáng theo mọi hướng. Người quan sát tại một điểm xa lỗ đen (được biểu thị bằng con mắt trong hình dưới đây) chụp một bức ảnh của vùng xung quanh lỗ đen có thời gian phơi sáng trong 60s.



Chọn phương án đúng cho mỗi câu dưới đây:

(T08.5a) Số lượng đường đi khả dĩ của ánh sáng từ Z đến người quan sát là
(A) Tối đa một (B) Chính xác một (C) Chính xác hai (D) Lớn hơn hai. [2]

- (T08.5b) Số lượng ảnh của vụ nổ EM tại Z sẽ được nhìn thấy trong hình ảnh phơi sáng nêu trên là [2]
(A) Tối đa một (B) Chính xác một (C) Chính xác hai (D) Lớn hơn hai.

(T09) Hiện tượng nhìn thấy qua khí quyển

[35 điểm]

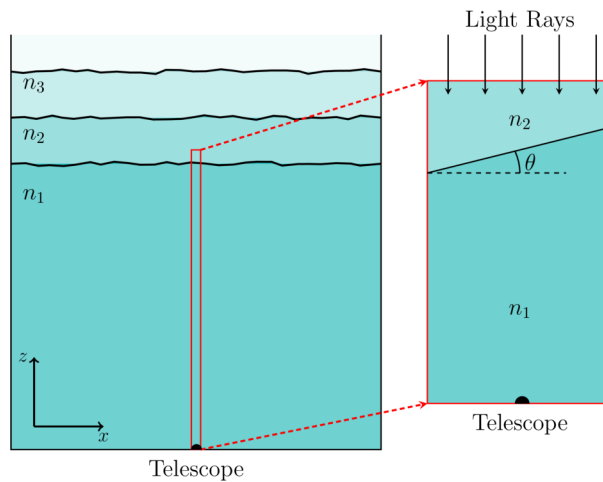
Một kính thiên văn với thấu kính hội tụ sắc sai (achromatic convex) có đường kính $D = 15$ cm và tiêu cự $f = 200$ cm hướng về một ngôi sao trên thiên đỉnh.

- (T09.1) Tìm đường kính ảnh (theo m) d_{image} của một nguồn điểm được tạo ra bởi vật kính tại mặt phẳng [1]
tiêu điểm của nó cho ánh sáng xanh lá cây ($\lambda = 550$ nm), chỉ xét đến các hiệu ứng của nhiễu xạ.

Ảnh của một nguồn thiên văn bị ảnh hưởng bởi “atmospheric seeing”.

Ranh giới giữa các lớp khí trong khí quyển cũng như chiết suất của các lớp thay đổi liên tục do nhiễu loạn, biến đổi nhiệt độ và các yếu tố khác. Điều này dẫn đến những thay đổi nhỏ trong vị trí của hình ảnh trên tiêu diện của kính thiên văn, được gọi là “twinkling effect”. Đối với cả bài toán, ngoài việc sử dụng kích thước giới hạn nhiễu xạ hữu hạn (diffraction limited finite size) của ảnh ngôi sao (như đã sử dụng ở trên), không cần xem xét các hiệu ứng giao thoa.

Hình bên trái dưới đây cho thấy mặt cắt dọc của khí quyển với nhiều lớp khí có chiết suất khác nhau ($n_1, n_2, n_3, \dots$). Hình bên phải cho thấy cái nhìn phóng to của một đoạn dọc mỏng của khí quyển và ranh giới giữa hai lớp khí thấp nhất có chiết suất n_1 và n_2 ($n_1 > n_2$). Trong bài này, ta chỉ xem xét hai lớp này và ranh giới của chúng. Các sơ đồ không theo tỷ lệ.



- (T09.2) Giả sử ranh giới giữa hai lớp nằm ở độ cao $H = 1$ km ngay trên vật kính của kính thiên văn, với độ nghiêng $\theta = 30^\circ$ so với mặt phẳng ngang. Trong tất cả các phần của bài toán này, θ được coi là dương theo hướng ngược chiều kim đồng hồ. Đối với nguồn sáng đơn sắc, $n_1 = 1.00027$ và $n_2 = 1.00026$. Giả sử sự dịch chuyển góc của ảnh tại tiêu diện của kính thiên văn đối với một ngôi sao ở thiên đỉnh là α .

- (T09.2a) Vẽ sơ đồ tia thích hợp có nhãn tại ranh giới n_1, n_2, θ và α . [2]

- (T09.2b) Tìm biểu thức cho α theo θ, n_1 và n_2 . Sử dụng các xấp xỉ góc nhỏ: $\sin \alpha \approx \alpha$ và $\cos \alpha \approx 1$. [2]

- (T09.2c) Tính độ dịch chuyển vị trí của ảnh Δx_θ (theo m) nếu θ tăng 1% (giữ cố định n_1 và n_2). [3]

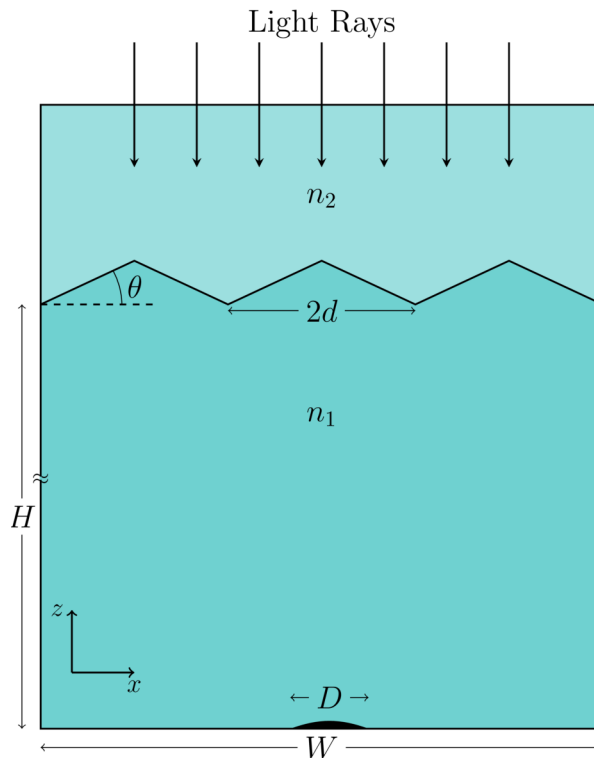
- (T09.2d) Tính độ dịch chuyển vị trí của ảnh Δx_n (m) nếu n_2 tăng 0.0001% (giữ cố định n_1 và θ). [3]

- (T09.3) Đối với ánh sáng trắng đến từ một ngôi sao ở thiên đỉnh, hãy chọn mô tả sau đây gần nhất với hình dạng và màu sắc của ảnh bằng cách đánh dấu (✓) vào ô thích hợp (chỉ một ô) trong Bảng tóm tắt câu trả lời. Lưu ý x tăng từ trái sang phải trong hình. [2]

	Màu sắc hình ảnh	Hình dạng hình ảnh	Cạnh trái	Cạnh phải
A	Trắng	Tròn		
B	Trắng	Elip		
C	Màu	Tròn	Xanh	Đỏ
D	Màu	Tròn	Đỏ	Xanh
E	Màu	Elip	Xanh	Đỏ
F	Màu	Elip	Đỏ	Xanh

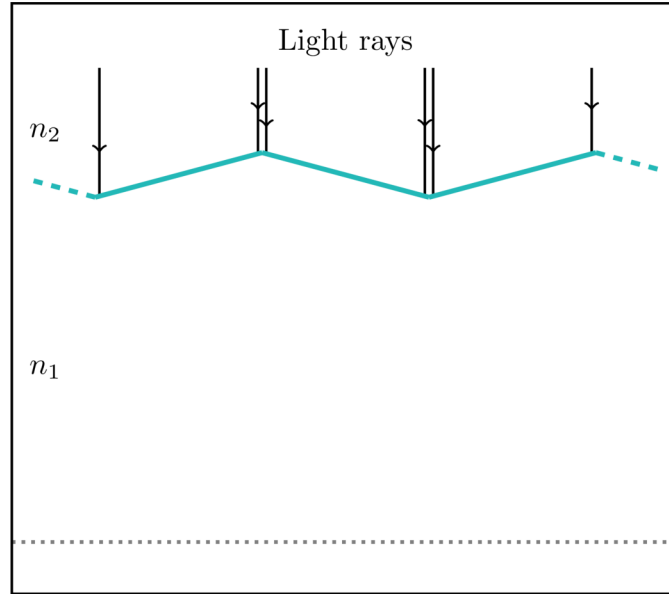
Đối với tất cả các phần còn lại của câu hỏi này, hãy xem xét ánh sáng xanh đơn sắc với $\lambda = 550 \text{ nm}$. Chúng ta mô hình hóa ranh giới giữa các lớp như một tập hợp các mặt phẳng zigzag vô hạn (chạy vuông góc với mặt phẳng của trang) được ngăn cách bởi $d = 10 \text{ cm}$ dọc theo trục x , với $\theta = 10^\circ$ hoặc $\theta = -10^\circ$.

Hình dưới đây (không theo tỷ lệ) cho thấy mặt cắt ngang của mô hình khí quyển này với chiều rộng W ($W \ll H$). Đối với kính viễn vọng có khẩu độ lớn, tính chất zigzag của ranh giới này dẫn đến sự hình thành các đốm sáng ở tiêu diện.



(T09.4) Xem xét một mô hình khí quyển được mô phỏng như trên.

(T09.4a) Một phần của khí quyển với các mặt phẳng zigzag liên tiếp, có các thông số giống như đã nêu ở trên, được hiển thị trong hình dưới đây (không theo tỷ lệ).



Trong hình này, được tái hiện trong Bảng Tóm tắt Câu trả lời (Summary Answersheet), vẽ các đường đi của tia sáng tới mặt phẳng nơi đặt vật kính kính thiên văn, được hiển thị bằng đường chấm chấm xám.

Đánh dấu vùng, nếu có, bằng “X” trong sơ đồ nơi không có tia sáng nào đến được. [4]

(T09.4b) Tính toán chiều rộng W_X của vùng đó. [3]

(T09.4c) Tìm đường kính lớn nhất, $D_{\max}$, của vật kính kính thiên văn mà với nó có thể thu được một ảnh duy nhất của một ngôi sao, bằng cách chọn vị trí thích hợp của kính thiên văn so với cấu trúc của ranh giới. [4]

(T09.5) Xem xét trường hợp khi hình dạng zigzag của biên được cho phép theo cả hai hướng x và y (giống như một cánh đồng kim tự tháp), và $D = 100$ cm (với $f = 200$ cm). [6]

Vẽ mẫu định tính của các đốm sáng kết quả trong ô được cung cấp trong Bảng Tóm tắt Đáp án (Summary Answersheet.).

(T09.6) Đối với một bầu khí quyển nhiễu loạn, hãy xem xét cùng một hình zigzag chạy song song của lớp biên chỉ dọc theo hướng x , nhưng bây giờ góc giữa hai mặt phẳng đang thay đổi với tốc độ đều từ 10° đến -10° trong 1.0 giây. Giả sử rằng điều này dẫn đến tốc độ dịch chuyển đều vị trí của ảnh. [5]

Xem xét một kính viễn vọng với $D = 8$ cm và $f = 1$ m. Ước tính thời gian phơi sáng dài nhất $t_{\max}$ cho phép cho máy ảnh CCD để chỉ nhận được một ảnh duy nhất, và bất kỳ sai lệch nào có thể xảy ra vị trí của nó vẫn nhỏ hơn 1% đường kính giới hạn nhiễu xạ của ảnh.

(T10) Tổng hợp hạt nhân Big Bang

[35 điểm]

Trong kỷ nguyên bức xạ chiếm ưu thế ở vũ trụ sơ khai, hệ số tỷ lệ của vũ trụ $a \propto t^{1/2}$, trong đó t là thời gian kể từ Big Bang. Trong phần lớn thời kỳ này, neutron (n) và proton (p) duy trì cân bằng nhiệt với nhau thông qua các tương tác yếu. Mật độ số lượng (N) của neutron hoặc proton tự do liên quan đến nhiệt độ T và khối lượng tương ứng của chúng m sao cho

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

miễn là thời gian $t \leq t_{\text{wk}} = 1.70$ s, khi $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. Sau t_{wk} , các tương tác yếu không còn có thể duy trì cân bằng như vậy, và neutron tự do phân rã thành proton với thời gian bán rã là 610.4 s.

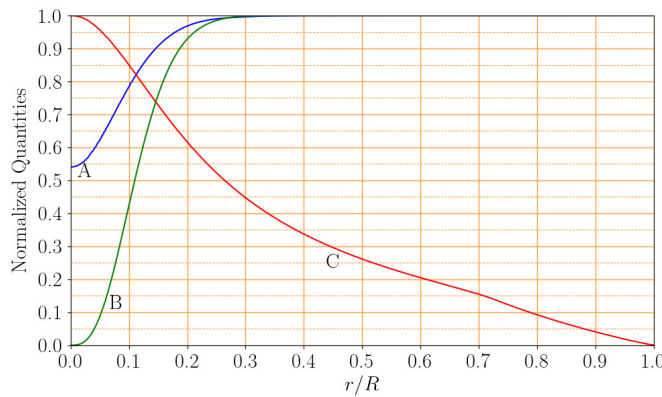
(T11) Các ngôi sao qua đồ thị
[50 điểm]

Các ngôi sao có thể được xấp xỉ tốt như những vật thể đối xứng cầu, do đó khoảng cách xuyên tâm r từ tâm có thể được chọn làm biến độc lập duy nhất trong việc mô hình hóa lõi sao. Khối lượng chứa trong một hình cầu có bán kính r được ký hiệu là $m(r)$. Độ trưng $l(r)$ được định nghĩa là năng lượng ròng chảy ra ngoài qua một bề mặt cầu có bán kính r mỗi đơn vị thời gian. Các đại lượng quan tâm khác, ví dụ, mật độ $\rho(r)$, nhiệt độ $T(r)$, tỉ phần khối lượng hydro $X(r)$, tỉ phần khối lượng heli $Y(r)$, và năng lượng hạt nhân sinh ra trên mỗi đơn vị khối lượng và trên mỗi đơn vị thời gian $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, được coi là các hàm của r . Trong bài này, chúng ta sẽ bỏ qua các hiệu ứng khuếch tán và gravitational settling của các nguyên tố bên trong ngôi sao.

Ký hiệu "log" để cập đến logarit cơ số 10. Bài này bao gồm ba phần độc lập.

(T11.1) Phần 1: Bên trong một ngôi sao

Biểu đồ dưới đây cho thấy sự biến đổi của ba đại lượng, A, B và C, như hàm của bán kính phân đoạn r/R trong một mô hình sao có khối lượng $1 M_{\odot}$ và tuổi 4 Gyr, trong đó R là bán kính quang quyển của ngôi sao. Các giá trị của tỉ phần khối lượng heli tại bề mặt (quang quyển) Y_s , và độ kim loại (phần khối lượng của tất cả các nguyên tố nặng hơn heli) tại bề mặt (quang quyển) Z_s , của ngôi sao được cho bởi $(Y_s, Z_s) = (0.28, 0.02)$. Tất cả các đại lượng được hiển thị trong đồ thị đều được chuẩn hóa theo giá trị tối đa tương ứng của chúng.



(T11.1a) Xác định ba đại lượng A, B và C một cách duy nhất từ năm khả năng:

[6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Viết A/B/C vào các ô bên cạnh các đại lượng tương ứng trong Bảng tóm tắt câu trả lời (Summary Answersheet.). Không cần giải thích cho câu trả lời của bạn.)

(T11.1b) Tỷ lệ khối lượng của heli tại tâm sao Y_c là bao nhiêu?

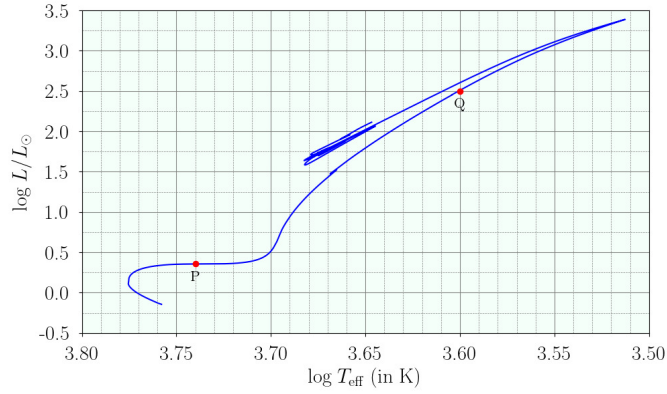
[3]

(T11.1c) Vẽ phác hai đại lượng còn lại từ danh sách năm đại lượng (không được xác định là đường cong A, B hoặc C) đã cho trong (T11.1a), dưới dạng hàm của r/R trên cùng một đồ thị trong Bảng tóm tắt câu trả lời, và ghi nhãn theo các đại lượng tương ứng của chúng.

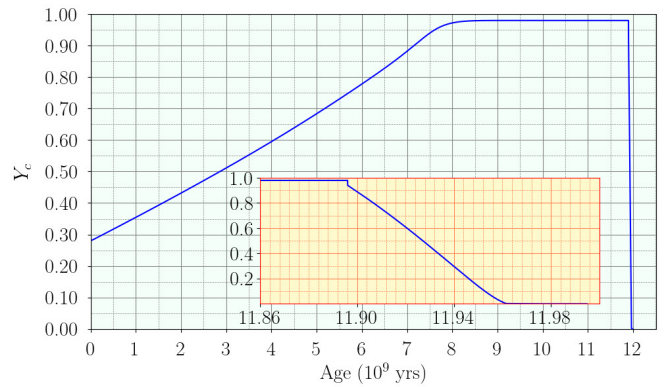
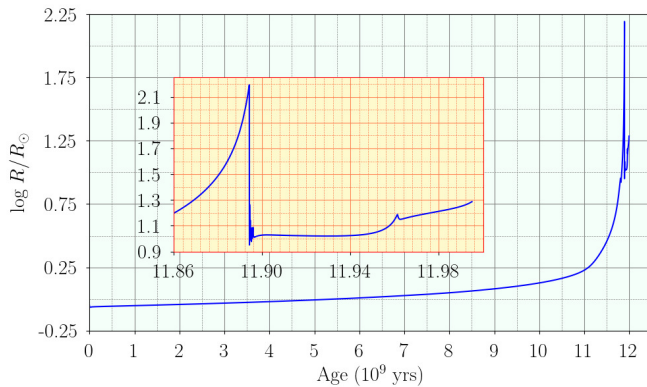
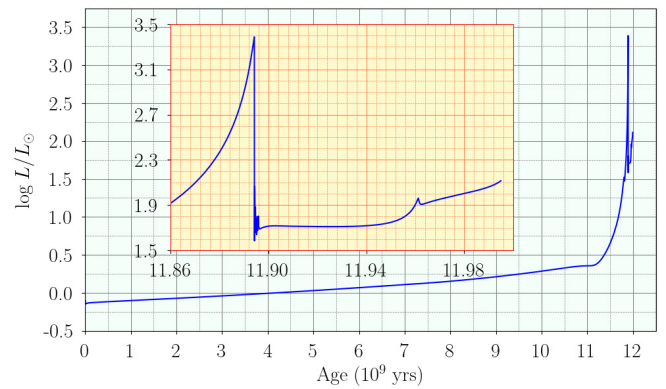
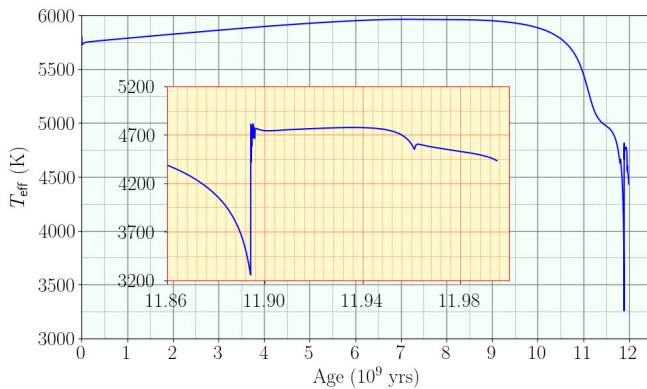
[5]
(T11.2) Phần 2: Các ngôi sao đang tiến hóa

Xem xét sự tiến hóa của một ngôi sao $1 M_{\odot}$ có thành phần ban đầu đồng nhất được cho bởi các tỉ phần khối lượng của heli, $Y_0 = 0.28$, và kim loại $Z_0 = 0.02$. Các hình dưới đây cho thấy sự biến đổi của các đại lượng toàn cầu khác nhau của ngôi sao này khi nó tiến hóa từ ZAMS (Zero Age Main Sequence) cho đến khi kết thúc quá trình đốt cháy heli trong lõi của nó.

Biểu đồ dưới đây cho thấy đường tiến hóa của ngôi sao trên biểu đồ HR (biểu đồ của $\log L/L_{\odot}$ so với $\log T_{\text{eff}}$, trong đó L là độ trưng bề mặt và T_{eff} là nhiệt độ hiệu dụng).



Hình dưới đây có bốn đồ thị cho thấy sự biến đổi của T_{eff} (đơn vị K), L (được vẽ dưới dạng $\log L/L_{\odot}$), R (được vẽ dưới dạng $\log R/R_{\odot}$), và Y_c theo tuổi (đơn vị 10^9 năm) của cùng một ngôi sao. Trong mỗi đồ thị này, các hình nhỏ cho thấy sự biến đổi của các đại lượng tương ứng chi tiết giữa các tuổi từ 11.86×10^9 năm đến 12.00×10^9 năm, để có độ rõ nét cao hơn.



Sử dụng các đồ thị này để trả lời các câu hỏi dưới đây.

- (T11.2a) Tuổi thọ dài chính xấp xỉ, t_{MS} (tính bằng năm), của ngôi sao là bao nhiêu? [1]
- (T11.2b) Thời gian xấp xỉ, Δt_{He} (tính bằng năm), mà ngôi sao đốt cháy heli trong lõi của nó là bao lâu? [1]
- (T11.2c) Tỷ lệ, f_{H} , của lượng hydro ban đầu ở trung tâm đã bị đốt cháy khi độ sáng của ngôi sao là $1 L_{\odot}$ là bao nhiêu? [3]
- (T11.2d) Bán kính của ngôi sao, R_1 (tính bằng đơn vị $R_{\odot}$) là bao nhiêu khi 60% lượng hydro ban đầu ở trung tâm đã bị đốt cháy? [3]
- (T11.2e) Bán kính của ngôi sao, R_P và R_Q (tính bằng đơn vị $R_{\odot}$), tương ứng với các vị trí P và Q được đánh dấu trên biểu đồ HR là bao nhiêu? [4]

(T11.3) **Phần 3: Phân bố khối lượng bên trong một ngôi sao**

Phương trình chi phối sự phân bố khối lượng bên trong một ngôi sao được cho bởi

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Sẽ thuận tiện hơn nếu biểu diễn phương trình này theo ba biến không thứ nguyên, cụ thể là khối lượng phân đoạn, q , bán kính phân đoạn, x , và mật độ tương đối, σ , mà chúng ta định nghĩa là

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

trong đó M và R là tổng khối lượng và bán kính của ngôi sao, tương ứng, và $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ là mật độ trung bình của ngôi sao. Đối với ngôi sao cụ thể mà chúng ta sẽ xem xét trong phần này, thông tin sau được cung cấp:

- Mật độ trung tâm $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$
- Một nửa khối lượng của ngôi sao nằm trong 25% bán kính tổng của nó, và 70% khối lượng của nó nằm trong 35% bán kính tổng của nó.

Trong tất cả các phần tiếp theo của câu hỏi này, sẽ đủ để làm tròn tất cả các hệ số số học được suy ra đến trong khoảng 0.005.

(T11.3a) Biểu diễn phương trình trên mô tả sự phụ thuộc của khối lượng vào bán kính theo x , $\left[\frac{dq(x)}{dx} \right]$ và $\sigma(x)$. **[2]**

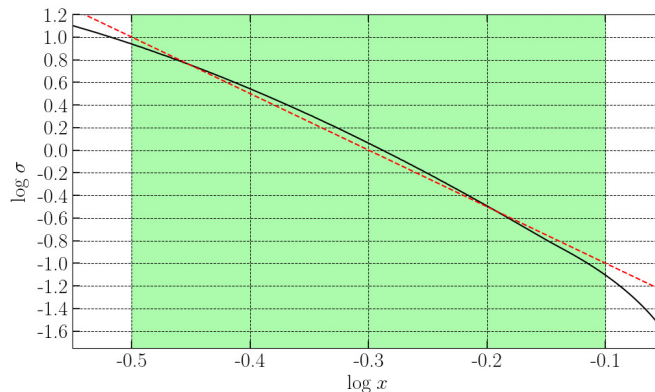
Để có được phân bố khối lượng theo bán kính, chúng ta cần biết cấu trúc mật độ bên trong ngôi sao. Đối với bài toán này, chúng ta sẽ mô tả sự biến đổi của mật độ theo bán kính bằng các dạng xấp xỉ trong hai miền của x :

- phần bên trong của ngôi sao: $0 \leq x \leq 0.32$
- phần giữa của ngôi sao: $0.32 < x < 0.80$

Chúng ta không thực hiện bất kỳ xấp xỉ nào cho phần ngoài cùng, tức là, $0.80 \leq x \leq 1.00$.

(T11.3b) **Xấp xỉ cho phần giữa:**

Sự biến đổi của $\log \sigma$, như là một hàm của $\log x$ trong phần giữa của ngôi sao được thể hiện (bằng đường cong màu đen) trong đồ thị dưới đây. Chúng ta sẽ thực hiện một xấp xỉ tuyến tính (được thể hiện bằng đường gạch đỏ trong đồ thị) cho $\log \sigma$ như là một hàm của $\log x$ trong miền $-0.5 < \log x < -0.1$, tức là, $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (được thể hiện bằng miền màu xanh lá cây). Hơn nữa, chúng ta sẽ xấp xỉ độ dốc của đường này bằng số nguyên gần nhất.



Sử dụng xấp xỉ này để viết một biểu thức cho $\sigma(x)$ như là một hàm của x trong miền $0.32 < x < 0.80$. [4]

(T11.3c) Sử dụng kết quả của (T11.3b) để suy ra một biểu thức cho $q(x)$ trong miền $0.32 < x < 0.80$. [6]

(T11.3d) **Xấp xỉ cho phần bên trong:**

Trong phần bên trong của ngôi sao ($0 \leq x \leq 0.32$), mật độ có thể được xấp xỉ như một hàm tuyến tính của bán kính, tức là, $\sigma(x) = Ax + B$, trong đó A, B là các hằng số. Xác định A và B , và do đó thu được một biểu thức cho $q(x)$ trong miền $0 \leq x \leq 0.32$. Lưu ý rằng các xấp xỉ được áp dụng trong phần trước và phần này có thể dẫn đến các gián đoạn nhỏ trong mật độ hoặc khối lượng tại $x = 0.32$. [8]

(T11.3e) Các biểu thức cho $q(x)$ thu được trong các phần (T11.3c) và (T11.3d) là các xấp xỉ mô tả sự biến đổi của khối lượng theo bán kính khá tốt, nhưng chỉ trong các vùng cụ thể của ngôi sao. Đối với miền $0.80 \leq x \leq 1$ (mà chúng ta chưa suy ra bất kỳ biểu thức nào), có thể sử dụng ngoại suy thích hợp từ vùng lân cận. Sử dụng các biểu thức xấp xỉ này và dữ liệu đã cho để phác thảo một đường cong mượt mà (không có bất kỳ gián đoạn nào trong $q(x)$ hoặc đạo hàm của nó) cho $q(x)$ so với x cho toàn bộ ngôi sao ($0 \leq x \leq 1$) thể hiện sự biến đổi của khối lượng theo bán kính. [4]

(T12) Bức xạ Hawking từ lỗ đen

[50 điểm]

(T12.1) Một lỗ đen (BH) thường hình thành do sự sụp hấp dẫn của một ngôi sao khổng lồ ở cuối chu kỳ sống của nó vào một điểm gọi là điểm kỳ dị. Do lực hấp dẫn cực mạnh của một vật thể như vậy, không gì có thể thoát ra khỏi chân trời sự kiện (bề mặt hình cầu với $r = R_{\text{SC}}$, trong đó r là khoảng cách tính từ điểm kỳ dị). Ở đây, R_{SC} được gọi là bán kính Schwarzschild.

(T12.1a) **Mô hình hóa nguồn gốc của bức xạ Hawking:** Xem xét một cặp hạt, mỗi hạt có khối lượng m , được tạo ra ở hai phía của chân trời BH. Một hạt nằm hơi ngoài chân trời tại $r \approx R_{\text{SC}}$, trong khi hạt kia nằm trong chân trời tại $r = \kappa R_{\text{SC}}$. Giả sử rằng năng lượng toàn phần của mỗi hạt là tổng của năng lượng nghỉ mc^2 và thế năng hấp dẫn do BH gây ra.

Xác định giá trị của κ sao cho cặp hạt có tổng năng lượng bằng không. [4]

(T12.1b) **Nhiệt độ của lỗ đen:** Nếu hạt được tạo ra bên ngoài chân trời trong quá trình trên có đủ động năng, nó có thể thoát khỏi lỗ đen trong một quá trình gọi là bức xạ Hawking. Hạt bên trong chân trời, có năng lượng âm, bị hấp thụ và làm giảm khối lượng của lỗ đen.

Giả sử rằng tất cả bức xạ Hawking được tạo thành từ các photon với phổ bức xạ vật đen (black body spectrum) đạt cực đại tại bước sóng $\lambda_{\text{bb}} \approx 16R_{\text{SC}}$. Biết rằng đối với một lỗ đen có khối lượng cỡ khối lượng mặt trời, $R_{\text{SC}, \odot} = 2.952 \text{ km}$.

Xác định biểu thức cho nhiệt độ T_{bh} của lỗ đen tương ứng với bức xạ vật đen này, tính theo khối lượng của nó M_{bh} và các hằng số vật lý. Tính bán kính Schwarzschild $R_{\text{SC}, 10\odot}$ và nhiệt độ $T_{\text{bh}, 10\odot}$ cho một lỗ đen có khối lượng $10 M_{\odot}$. [4]

(T12.1c) **Sự mất khối lượng của lỗ đen:** Giả sử rằng bức xạ Hawking được phát ra từ chân trời sự kiện.

Sử dụng sự tương đương giữa khối lượng và năng lượng, tìm biểu thức cho tốc độ mất khối lượng $dM_{\text{bh}}(t)/dt$ theo khối lượng $M_{\text{bh}}(t)$ của lỗ đen và các hằng số vật lý.

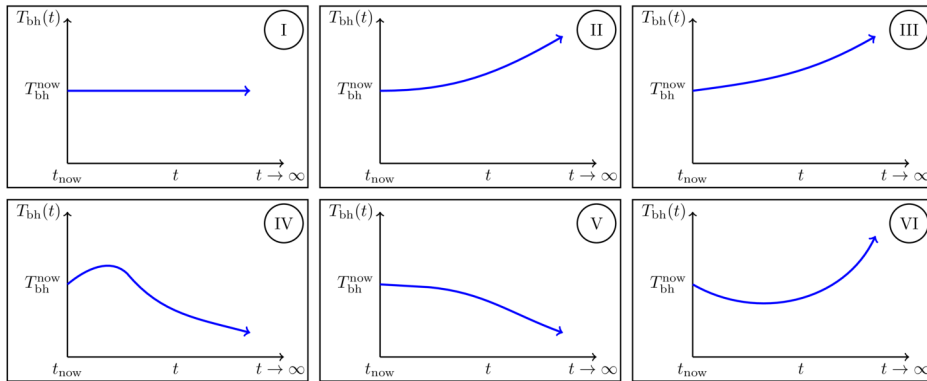
Từ đó, tìm biểu thức $M_{\text{bh}}(t)$ cho một lỗ đen với khối lượng ban đầu M_0 . Vẽ phác $M_{\text{bh}}(t)$ như một hàm của t từ lúc $M_{\text{bh}} = M_0$ đến $M_{\text{bh}} = 0$. [8]

(T12.1d) **Tuổi thọ của lỗ đen:** Tìm biểu thức cho tuổi thọ τ_{BH} mà tại đó một lỗ đen với khối lượng ban đầu M_0 hoàn toàn bốc hơi do bức xạ Hawking, tính theo M_0 và các hằng số vật lý. Tính tuổi thọ $\tau_{bh,10\odot}$ (tính theo giây) cho một lỗ đen với $M_0 = 10 M_\odot$. [3]

(T12.1e) **Lỗ đen trong bể bức xạ CMB:** Xem xét một lỗ đen cô lập trong không gian, cách xa các thiên thể khác, với nhiệt độ hiện tại T_{bh}^{now} , được bao quanh bởi bức xạ nền vi sóng vũ trụ (CMB) với nhiệt độ hiện tại $T_{cmb}^{now} = 2.7$ K. Lỗ đen có thể tăng khối lượng bằng cách hấp thụ bức xạ CMB, và mất khối lượng qua bức xạ Hawking.

Xét đến sự giãn nở tăng tốc của Vũ trụ, hãy xác định hình nào sau đây thể hiện sự tiến hóa theo thời gian dài hạn của T_{bh} trong ba trường hợp sau:

(X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Chỉ ra câu trả lời của bạn bằng cách đánh dấu vào ô thích hợp (chỉ một ô) cho mỗi trường hợp X, Y hoặc Z ở Bảng được đưa ra trong Summary Answersheet. [6]

(T12.2) Các lỗ đen nguyên thủy (PBHs) với khối lượng nhỏ hơn nhiều có thể hình thành trong Vũ trụ từ rất sớm. Mọi câu hỏi sau đây đều liên quan đến PBHs. Ở đây, bất kỳ quá trình nào làm tăng khối lượng của lỗ đen có thể được bỏ qua.

(T12.2a) **PBH bốc hơi ở thời kỳ hiện tại:** Như bạn có thể đã nhận thấy từ các câu trả lời cho các câu hỏi trước, các lỗ đen có khối lượng bằng khối lượng mặt trời sẽ mất rất nhiều thời gian để bốc hơi. Tuy nhiên, vì PBH có thể có khối lượng nhỏ hơn nhiều, ta có thể thấy chúng bốc hơi trong thời gian hiện tại.

Tìm khối lượng ban đầu $M_{0, PBH}$ (theo kg), bán kính Schwarzschild $R_{SC, PBH}$ (theo m), và nhiệt độ T_{PBH} (theo K) của một lỗ đen có thể đang bốc hơi hoàn toàn ở thời kỳ hiện tại, tức là những lỗ đen có tuổi thọ $\tau_{PBH} = 14$ tỷ năm. [4]

(T12.2b) **Sự hình thành của PBH:** Trong giai đoạn đầu của Vũ trụ chịu chi phối chủ đạo bởi bức xạ, hệ số thang (scale factor) $a(t) \sim t^{1/2}$. Trong thời kỳ này, PBH hình thành do sự sụp đổ của toàn bộ năng lượng chứa trong một vùng có kích thước vật lý ct , với t là tuổi của Vũ trụ tại thời điểm đó.

Một PBH với khối lượng 1×10^{12} kg hình thành khi tuổi của Vũ trụ khoảng 1×10^{-23} s. Tính tuổi của Vũ trụ, t_{20} , khi một PBH có khối lượng 1×10^{20} kg hình thành. [6]