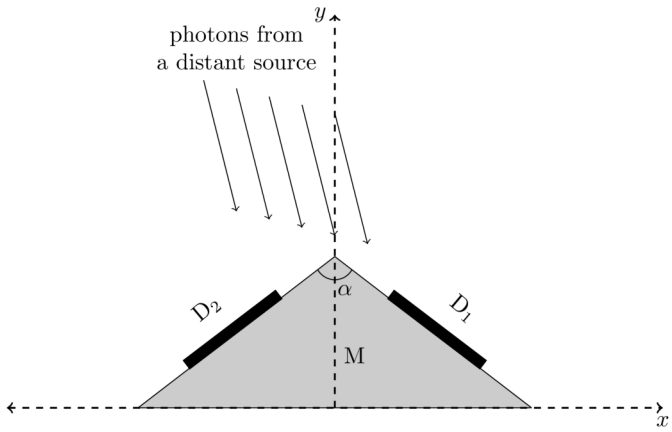
(T01) Місія Дакша [10 балів]

"Дакша" - це запропонована Індією космічна місія, що складається з двох супутників S_1 і S_2, які обертаються навколо Землі на одній коловій орбіті радіусом $r = 7000$ км в діаметрально протилежних точках (з різницею фаз 180°). Ці супутники спостерігають за Всесвітом у високоенергетичній області (рентгенівське і γ-випромінювання). Кожен із супутників Дакша використовує кілька детекторів у вигляді пласких прямокутників.

Щоб зрозуміти, як локалізувати джерело на небі, скористаємося спрощеною моделлю місії Дакша. Припустимо, що S_1 має лише два однакові детектори D_1 і D_2, кожен площею $A = 0.50$ м^2, що прикріплені до непрозорої основи M, як показано на рисунку нижче. Детектори лежать симетрично відносно осі y у площинах, перпендикулярних до площини x-y, і утворюють між собою кут $\alpha = 120°$.



(T01.1) Під час спостереження віддаленого джерела, розташованого у площині x-y, детектор D_1 реєструє потужність $P_1 = 2.70 \times 10^{-10}$ Дж с$^{-1}$, а детектор D_2 - потужність $P_2 = 4.70 \times 10^{-10}$ Дж с$^{-1}$.

Оцініть кут η між додатним напрямком осі y та напрямком на джерело. Кут вважається додатним, якщо відраховується від додатного напрямку осі y проти годинникової стрілки. **[5]**

Розглянемо один імпульс від віддаленого джерела (не обов'язково у площині x-y), зареєстрований обома супутниками (S_1 і S_2) Дакші. Моменти часу, коли були зареєстровані піки імпульсів супутниками S_1 і S_2, становлять t_1 і t_2, відповідно.

(T01.2) Якщо $t_1 - t_2$ було виміряно як 10.0 ± 0.1 мс, визначте частку, f, небесної сфери, якій може належати джерело. **[5]**

(T02) Макар-Санкранті [10 балів]

Свято "Макар-Санкранті" святкується в Індії, коли Сонце вступає в сузір'я Козерога (Макар = Козеріг, Санкранті = Входження), при спостереженні з Землі. В наші дні його святкують приблизно 14 січня кожного року. Але багато років тому це свято збігалося із зимовим сонцестоянням у північній півкулі, яке, вважатимемо, відбувається 21 грудня.

(T02.1) За наведеною вище інформацією знайдіть рік, y_c, коли святкування цього свята востаннє збігалося з днем зимового сонцестояння у північній півкулі. **[3]**

(T02.2) Якщо в Мумбаї 14 січня 2006 року вхід Сонця в сузір'я Козерога відбувся об 11:50:13 за місцевим часом, обчисліть дату D_{enter} і місцевий час t_{enter} його входження в сузір'я Козерога у 2013 році. **[3]**

(T02.3) Фестиваль Макар-Санкранті святкується в певному місці в день першого заходу Сонця в сузір'ї Козерога. Можна вважати, що місцевий час заходу Сонця для Мумбаї в січні - 18:30:00 год.

Вкажіть дату святкування фестивалю для кожного року з 2006 по 2013 рік (поставте галочки у відповідних комірках таблиці, наведеній у Зведеному аркуші відповідей (Summary Answersheet)). **[4]**

(T03) Гравітаційні хвилі **[15 балів]**

Подвійні чорні діри генерують гравітаційні хвилі. Розглянемо дві чорні діри у нашій Галактиці з масами $M = 36\ \mathrm{M}_\odot$ і $m = 29\ \mathrm{M}_\odot$, які обертаються коловими орбітами з орбітальною кутовою швидкістю ω навколо спільного центру мас.

(T03.1) В наближенні ньютонівської теорії гравітації, знайдіть вираз для кутової швидкості ω_{ini} чорних дір у момент часу t_{ini}, коли відстань між чорними дірами у 4.0 рази перевищувала суму їхніх шварцшильдівських радіусів, знаючи лише M, m та фізичні константи.

Обчисліть значення ω_{ini} (в рад c^{-1}). **[5]**

(T03.2) У загальній теорії відносності чорні діри під час руху по орбіті випромінюють гравітаційні хвилі з частотою f_{GW}, при цьому $2\pi f_{\mathrm{GW}} = \omega_{\mathrm{GW}} = 2\omega$. Це призводить до зменшення радіусу орбіти чорних дір, що, у свою чергу, збільшує f_{GW}. Швидкість зміни f_{GW} дорівнює

$$\frac{df_{\mathrm{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} {M_{\mathrm{chirp}}}^{\alpha/3} f_{\mathrm{GW}}^{\delta/3},$$

де $M_{\mathrm{chirp}} = \dfrac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ називається "чірп масою".

Знайдіть значення α, β та δ. **[4]**

(T03.3) Припустимо, що гравітаційні хвилі, пов'язані з певною подією, було вперше виявлено в момент часу $t_{\mathrm{ini}} = 0$. **[6]**

Запишіть вираз для спостережуваного часу злиття чорних дір, t_{merge}, коли f_{GW} стає дуже великим, використовуючи лише ω_{ini}, M_{chirp} та фізичні константи.
Обчислити значення t_{merge} (у секундах).

(T04) Бальмерівський декремент **[15 балів]**

Розглянемо зорю головної послідовності, оточену туманністю, видима зоряна величина якої у V-фільтрі становить 11.315^{m}. Іонізована область туманності поблизу зорі випромінює лінії Hα і Hβ; їхні довжини хвиль - 0.6563 мкм і 0.4861 мкм. Теоретично передбачене відношення потоків у лініях Hα і Hβ рівне $f_{\mathrm{H}\alpha}/f_{\mathrm{H}\beta} = 2.86$. Однак, коли це випромінювання проходить через зовнішню холодну частину пилової туманності, спостережувані потоки випромінювання в лініях Hα і Hβ дорівнюють 6.80×10^{-15} Вт м$^{-2}$ і 1.06×10^{-15} Вт м$^{-2}$, відповідно.

Екстинкція A_λ є функцією довжини хвилі і виражається як

$$A_\lambda = \kappa(\lambda) E(B-V).$$

Тут $\kappa(\lambda)$ є кривою екстинкції, а $E(B-V)$ позначає надлишок кольору в фільтрах B і V. Крива екстинкції (з λ в мкм) задається таким чином.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

де $R_V = A_V / E(B-V) = 3.1$ - відношення повного поглинання до вибіркового.

(T04.1) Знайдіть значення $\kappa(\mathrm{H}\alpha)$ і $\kappa(\mathrm{H}\beta)$. **[3]**

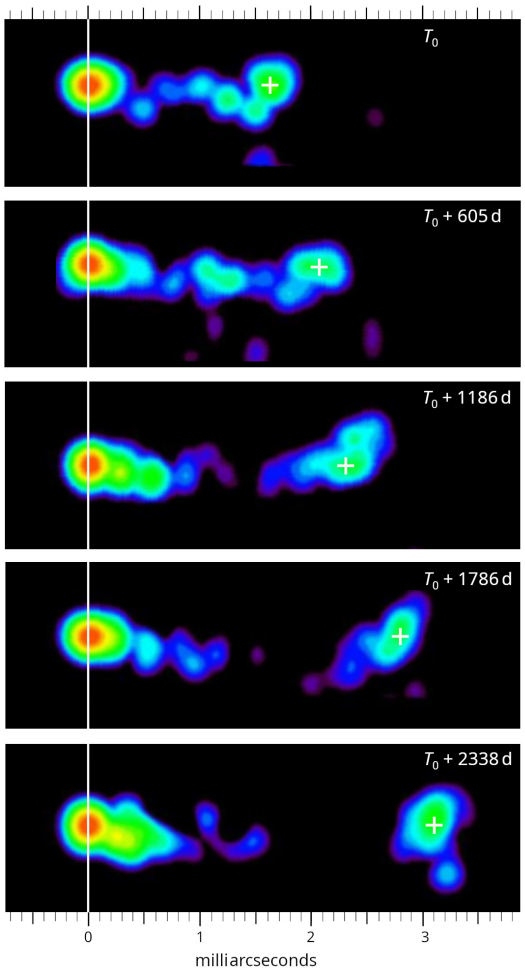
(T04.2) Знайдіть значення відношення надлишків кольору $\dfrac{E(\mathrm{H}\beta - \mathrm{H}\alpha)}{E(B-V)}$. **[4]**

(T04.3) Оцініть величини екстинкції в туманності $A_{\mathrm{H}\alpha}$ та $A_{\mathrm{H}\beta}$ на довжинах хвиль $\mathrm{H}\alpha$ та $\mathrm{H}\beta$ відповідно. **[6]**

(T04.4) Оцініть величину екстинкції в туманності (A_V) та видиму зоряну величину зорі у фільтрі V m_{V0} за умови відсутності туманності. **[2]**

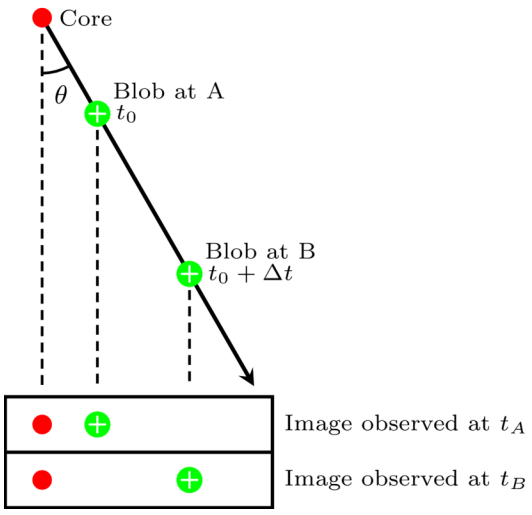
(T05) Квазари **[20 балів]**

Квазар - це надсвітна активна галактика, з надмасивною чорною дірою, яка випромінює релятивістські струмені. На рисунку показано серію радіозображень квазара (червоне зміщення якого $z = 0.53$ і світнісна відстань до якого $D_{\mathrm{L}} = 1.00 \times 10^{10}$ св.р.) в різні моменти часу. "Ядро" збігається з вертикальною білою лінією, тоді як струмінь, що складається з "плями" (позначеної білим $+$), з часом віддаляється від нього. На кожній панелі показано час спостереження (починаючи з T_0 для першого зображення), а шкала кутових відстаней вказана вгорі і внизу рисунка.



(T05.1) Для кожного спостереження визначте кутову відстань між "ядром" та "плямою" ϕ_{blob} (у кутових мілісекундах) та проєкцію його лінійної відстані на картинну площину l_{blob} (у світлових роках). Потім обчисліть проєкцію видимої швидкості "плями" на картинну площину (v_{app}) як частку швидкості світла, β_{app} ($= v_{\text{app}}/c$), використовуючи послідовні спостереження. Також обчисліть середню видиму швидкість $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$. **[5]**

Струмінь квазара насправді рухається з релятивістською швидкістю $v \equiv \beta c$, але не обов'язково в картинній площині; тобто, він утворює кут θ ("кут спостереження") до променя зору (позначений пунктирними лініями) далекого спостерігача, як показано на рисунку нижче.
У цій і всіх наступних частинах знехтуйте червоним зміщенням квазара і будь-якими релятивістськими ефектами.



(T05.2) Світло, випромінюване "плямою" у два різні моменти часу t_0 (що відповідає положенню A) і $t_0 + \Delta t$ (що відповідає положенню B), досягає спостерігача у моменти часу t_A і t_B, відповідно. Таким чином, спостережувана різниця часу дорівнює $\Delta t_\mathrm{app} = t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A}$.

(T05.2a) Запишіть вираз для відношення $\dfrac{\Delta t_\mathrm{app}}{\Delta t}$ через β та θ. **[2]**

(T05.2b) Використовуючи це співвідношення, виразіть β_{app} через β та θ. **[2]**

(T05.3) Рух називається надсвітловим, якщо видима швидкість перевищує швидкість світла ($\beta_\mathrm{app} > 1$), і досвітловим, якщо не перевищує ($\beta_\mathrm{app} < 1$).

(T05.3a) Для $\beta_\mathrm{app} = 1$ побудуйте плавну неперервну криву β як функцію θ (для позначення межі між досвітловим і надсвітловим рухами). Заштрихуйте надсвітлову область на графіку похилими лініями (///). **[4]**

(T05.3b) Знайдіть найменшу справжню швидкість струменя ($\beta_\mathrm{low} = v_\mathrm{low}/c$), за якої відбувається надсвітловий рух, а також відповідний йому кут "огляду" θ_low. **[2]**

(T05.4) Знайдіть вираз для максимального "кута спостереження", θ_max, для якого буде можливим задане значення β_app. **[2]**

Ядро квазара, його центральний компактний об'єкт, демонструє мінливість у випромінюванні через внутрішні процеси, що відбуваються в межах причинно пов'язаної області. Розмір (= радіус) цієї області зазвичай приймається приблизно в п'ять разів більшим за радіус Шварцшильда ядра.

(T05.5) Виявлено, що ядро певного квазара змінюється на часових масштабах близько 1 год. Знайдіть верхню межу, $M_{\mathrm{c,\,max}}$, для маси центрального компактного об'єкта, в одиницях сонячної маси. **[3]**

(T06) Обертання Галактики **[20 балів]**

Крива обертання нашої Галактики визначається за допомогою вимірювання променевої швидкості хмар нейтрального водню (HI) на довжині хвилі 21 см на різних галактичних довготах. Розглянемо хмару HI з галактичною довготою l, розташовану на відстані R від Центру Галактики (GC) і на відстані D від Сонця. Вважатимемо, що Сонце знаходиться на відстані $R_0 = 8.5$ кпк від GC. Припустимо, що і Сонце, і хмара HI рухаються коловими орбітами навколо GC у площині Галактики з кутовими швидкостями Ω_0 і Ω та швидкостями обертання V_0 і V, відповідно.

Компоненти променевої (V_r) та тангенціальної (V_t) швидкостей хмари, які спостерігаються з Сонця, можна виразити як

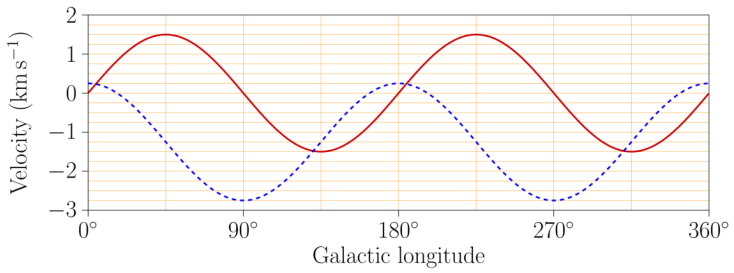
$$V_\mathrm{r} = (\Omega - \Omega_0) R_0 \sin l$$

$$V_\mathrm{t} = (\Omega - \Omega_0) R_0 \cos l - \Omega D$$

Обертання Галактики відбувається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися ззовні з північного полюсу Галактики. У цій задачі ми вважатимемо променеві швидкості додатними при віддаленні, а хмари розглядатимемо як точкові об'єкти.

(T06.1) На графіку, наведеному у Зведеному бланку відповідей (Summary Answersheet), зобразіть V_r як функцію D від $D = 0$ до $D = 2R_0$ для двох променів зору, галактичні довготи яких (i) $l = 45°$ та (ii) $l = 135°$. Позначте кожну з ваших прямих/кривих відповідним значенням l. **[5]**

(T06.2) На графіку нижче показано середні променева (суцільна червона крива) та тангенціальна (пунктирна синя крива) компоненти швидкості зір на відстані 100 пк від Сонця, побудовані як функція галактичної довготи.



Використовуючи графік, оцініть орбітальний період Сонця (P) навколо GC у мега роках (Myr). **[3]**

(T06.3) Ян Оорт зауважив, що в околицях Сонця ($D \ll R_0$) різниця кутових швидкостей ($\Omega - \Omega_0$) буде малою, і, таким чином, вивів наступне наближення першого порядку для компонент променевої та тангенціальної швидкостей:

$$V_\mathrm{r} = AD \sin 2l$$
$$V_\mathrm{t} = AD \cos 2l + BD$$

де A і B відомі як сталі Оорта.

Розглянемо два випадки:
(I) реально спостережувана крива обертання Галактики, і
(II) крива обертання для гіпотетичного сценарію, в якому Галактика позбавлена темної матерії і вся маса Галактики вважається зосередженою в її центрі.

(T06.3a) Виведіть вирази для радіального градієнта швидкості обертання в місці розташування Сонця, $\left.\dfrac{dV}{dR}\right|_{R=R_0}$, для двох сценаріїв. **[2]**

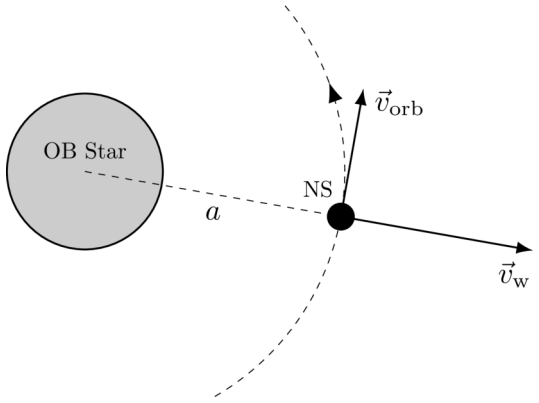
(T06.3b) Виразіть A і B через V_0, R_0 і радіальний градієнт швидкості обертання у місці розташування Сонця, $\left.\dfrac{dV}{dR}\right|_{R=R_0}$. **[8]**

(T06.3c) Відношення(A/B) сталих Оорта для двох заданих сценаріїв, (I) і (II), визначено як F_I і F_II, відповідно. Визначте F_I та F_II. **[2]**

(T07) Подвійна з нейтронною зорею **[20 балів]**

У подвійній системі, яка складається з компактної зорі та зорі-компаньйона, що не заповнює власну порожнину Роша, основним джерелом акреції на компактну зорю є зоряний вітер від зорі-компаньйона. Ця акреція з зоряного вітру особливо важлива в системах, які включають зорю раннього типу (наприклад, зорю класу O або B, яку надалі позначатимемо як OB зорю) поряд з компактним об'єктом, таким як нейтронна зоря (НЗ), що обертається по близькій орбіті.

Розглянемо таку подвійну зоряну систему НЗ-OB, де нейтронна зоря з масою $M_\mathrm{NS} = 2.0\ \mathrm{M}_\odot$ і радіусом $R_\mathrm{NS} = 11$ км обертається по коловій орбіті радіусом a навколо центру зорі OB зі швидкістю $v_\mathrm{orb} = 1.5 \times 10^5$ м c^{-1} (див. рисунок нижче). У цій задачі вважаємо, що втрата маси OB зорею є сферично-симетричною, а швидкість втрати маси дорівнює $\dot{M}_\mathrm{OB} = 1.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{M}_\odot \text{рік}^{-1}$.



(T07.1) Радіус акреції, $R_{\rm acc}$, визначається як максимальна відстань від НЗ, на якій зоряний вітер може бути захоплений НЗ. Якщо швидкість зоряного вітру на відстані орбіти НЗ становить $v_{\rm w} = 3.0 \times 10^6$ м $\rm c^{-1}$, знайдіть $R_{\rm acc}$ для цієї системи в км, використовуючи стандартну формулу для II космічної швидкості. **[3]**

(T07.2) Припускаючи, що весь захоплений матеріал випадає на поверхню НЗ, оцініть швидкість акреції $\dot{M}_{\rm acc}$ від зоряного вітру на НЗ в одиницях $\rm M_\odot рік^{-1}$, якщо $a = 0.5$ а.о. Впливом тиску випромінювання та скінченним часом охолодження акреційного газу знехтувати. **[3]**

(T07.3) Тепер розглянемо ситуацію, коли швидкість зоряного вітру на відстані a (поблизу НЗ) стає порівнянною з орбітальною швидкістю НЗ. Швидкість акреції від зоряного вітру на НЗ у цьому випадку буде визначатися виразом вигляду $\dot{M}_{\rm acc} = \dot{M}_{\rm OB} f(\tan\beta, q)$, де $q = M_{\rm НЗ}/M_{\rm OB}$ - відношення мас подвійної, а β - це кут у системі відліку НЗ, між напрямком швидкості зоряного вітру та напрямком вздовж прямої від ОВ зорі. Отримайте вираз для $f(\tan\beta, q)$ за умови $M_{\rm OB} \gg M_{\rm НЗ}$. **[6]**

(T07.4) Розглянемо ситуацію, коли повністю іонізована речовина падає радіально і зазнає перешкод через сильне магнітне поле $\vec{B}$ НЗ. Цей ефект можна моделювати як тиск, що задається формулою $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Припустимо, що НЗ має дипольне магнітне поле, величина якого в екваторіальній площині змінюється з відстанню r від НЗ для $r \gg R_{\rm NS}$, як

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\rm NS}}{r} \right)^3$$

де B_0 - магнітне поле на поверхні екватора НЗ. Припустимо, що вісь магнітного диполя збігається з віссю обертання НЗ.

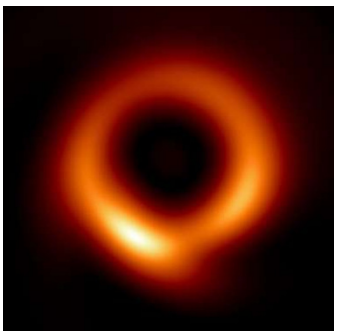
(T07.4a) Запишіть вираз для магнітного тиску $P_{\rm eq,\,mag}$ в екваторіальній площині через B_0, $R_{\rm NS}$, r та інші відповідні константи. **[1]**

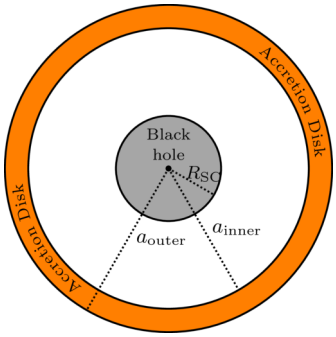
(T07.4b) Максимальна відстань, на якій акреційний потік зупиняється магнітним полем в екваторіальній площині, називається магнітосферним радіусом \(R_\text{m}\). Цей потік матерії буде чинити тиск через відносний рух між вхідним зоряним вітром і нейтронною зіркою. Отримайте приблизний вираз для критичного магнітного поля $B_{0,\,\rm c}$, для якого $R_{\rm m}$ збігається з $R_{\rm acc}$, і обчисліть його значення в Тесла. Знехтуйте магнітними ефектамия для $r > R_{\rm m}$ та вважайте $v_{\rm w} \gg v_{\rm orb}$. **[7]**

(T08) Тінь чорної діри **[20 балів]**

Зображення надмасивної чорної діри в центрі галактики M87, як показано на лівій панелі рисунка нижче, з телескопу "Горизонт подій" (ЕНТ) було оприлюднено.

Щоб зрозуміти деякі прості особливості цього зображення, ми розглянемо спрощену модель статичної, сферично-симетричної чорної діри, що не обертається, з масою $M = 6.5 \times 10^9 \mathrm{M}_\odot$, оточену безмасовим тонким плоским акреційним диском з внутрішнім і зовнішнім радіусами $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ і $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, відповідно, де R_{SC} - це радіус Шварцшильда. Схематичну модель в картинній площині показано на правій панелі рисунка нижче (рисунок не в масштабі).





Ми припускаємо, що акреційний диск є єдиним джерелом випромінювання, яке варто розглядати. Кожна точка на диску випромінює світло в усіх напрямках. Це світло поширюється під дією гравітаційного поля чорної діри. Траєкторія світлових променів визначається двома рівняннями, наведеними нижче (які подібні до рівнянь руху об'єкта навколо Сонця):

$$\frac{1}{2}v_{\text{r}}^2 + \frac{L^2}{2r^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \qquad v_\phi = r\,\omega = \frac{L}{r},$$

де $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ - відстань або радіальна координата, $\phi \in [0, 2\pi)$ - азимутальний кут, а E та L - константи, пов'язані із законами збереження енергії та моменту імпульсу, відповідно.

Тут $v_{\text{r}} \equiv dr/dt$ - величина радіальної швидкості, v_ϕ - величина тангенціальної швидкості, а $\omega \equiv d\phi/dt$ - кутова швидкість. Прицільний параметр b для траєкторії за означенням в цій задачі дорівнює $b = L/\sqrt{2E}$; сповільненням часу варто знехтувати.

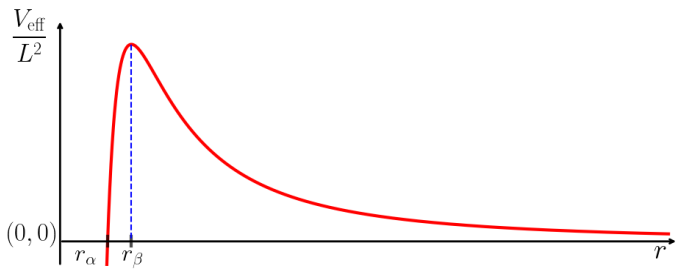
Ще одне корисне рівняння було отримане шляхом диференціювання першого рівняння цієї задачі:

$$\frac{dv_{\text{r}}}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

(T08.1) Навколо чорної діри світло може рухатися коловими траєкторіями. Знайдіть радіус r_{ph} і прицільний параметр b_{ph} для таких траєкторій. Відповідь виразіть через M і відповідні константи. **[4]**

(T08.2) Обчисліть часу секундах T_{ph} одного повного оберту світла по коловій орбіті. **[2]**

(T08.3) Наведене вище рівняння радіальної швидкості (перше рівняння у цьому питанні) можна порівняти з рівнянням виду $\frac{v_{\text{r}}^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ для траєкторій світла. Схематичний графік залежності V_{eff}/L^2 як функцію r наведено нижче.

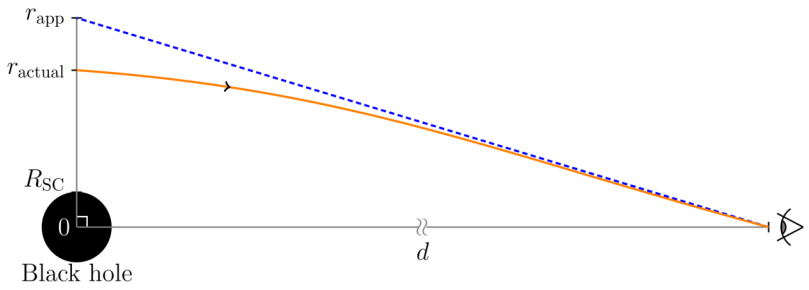


(T08.3a) На графіку відмічено дві особливих відстані r_α і r_β. Отримайте вирази для r_α та r_β через M та відповідні константи. **[2]**

(T08.3b) **[3]**

Фотон, який рухається всередину від акреційного диска до чорної діри, у деяких випадках все ще може вилетіти на нескінченність. Запишіть вираз для найменшого значення радіуса точки повороту r_t для такого фотона через M та відповідні константи. Знайдіть вираз для мінімального значення прицільного параметра, b_min, для такого фотона.

(T08.4) Промінь світла, що вилітає з картинної площини на відстані r_actual від центру системи, зазнає сильного викривлення під дією гравітаційного поля чорної діри і врешті-решт досягає спостерігача (позначеного оком) на великій відстані d від системи, як показано нижче.

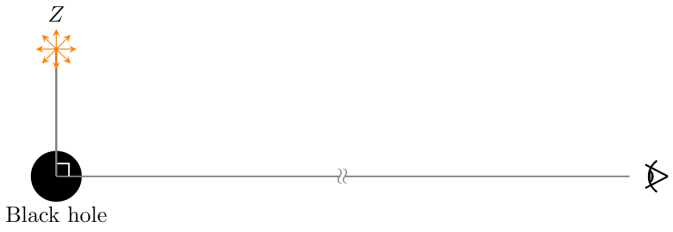


Цьому спостерігачеві здаватиметься, що промінь вийшов з іншої точки на відстані $r_\mathrm{app} \approx b$ від центру чорної діри у картинній площині, де b - прицільний параметр для цієї траєкторії фотона. Для точок на акреційному диску при $r = r_\mathrm{actual}$ можна припустити таке співвідношення:

$$b(r_\mathrm{actual}) \approx r_\mathrm{actual}(1 + R_\mathrm{SC}/r_\mathrm{actual})^{1/2}$$

Для віддаленого спостерігача, як ми, який дивиться на акреційний диск, який лежить у картинній площині, зображення системи здаватиметься коловим та симетричним. Визначте зовнішній видимий радіус r_outer та внутрішній видимий радіус r_inner зображення в астрономічних одиницях. **[5]**

(T08.5) Розглянемо ізольовану надмасивну чорну діру масою $M = 6.5 \times 10^9\ \mathrm{M}_\odot$ без акреційного диска. Короткий сильний сплеск електромагнітного випромінювання відбувається впродовж 5 с у точці Z на відстані $r_\mathrm{Z} = 6R_\mathrm{SC}$ від чорної діри, як показано на рисунку. Вибух у точці Z спричиняє випромінювання світла у всіх напрямках. Спостерігач у віддаленій від чорної діри точці (позначеній оком на рисунку нижче), робить знімок області навколо чорної діри з витримкою тривалістю 60 с.



Виберіть правильний варіант для кожного з наведених нижче тверджень:

(T08.5a) Кількість можливих шляхів, якими світло може розповсюджуватися від точки Z до спостерігача, становить **[2]**
(A) Не більше одного (B) Рівно один (C) Рівно два (D) Більше двох.

(T08.5b) Кількість зображень спалаху в точці Z, які можна побачити на зображенні з довгою витримкою, становить **[2]**
(A) Не більше одного (B) Рівно одне (C) Рівно два (D) Більше двох.

(T09) Атмосферна якість зображення **[35 балів]**

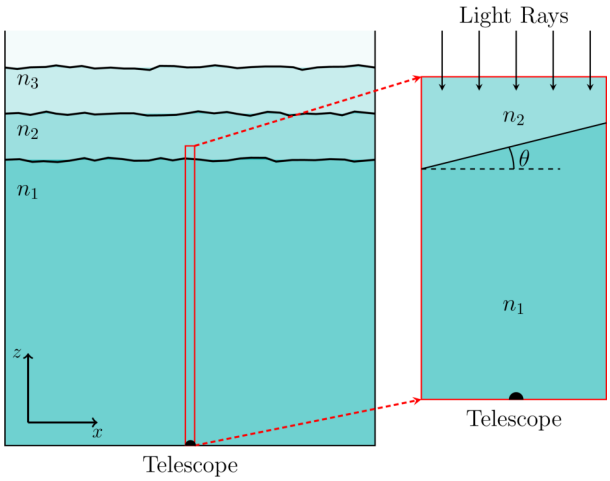
Телескоп з ахроматичною опуклою лінзою, діаметром $D = 15$ см і фокусною відстанню $f = 200$ см наведено на зорю у зеніті.

(T09.1) Знайдіть діаметр (у метрах) d_{image} зображення точкового джерела, яке дає лінза об'єктива у своїй фокальній площині для зеленого світла ($\lambda = 550$ нм), враховуючи лише дифракцію. **[1]**

На зображення астрономічного джерела також впливає так звана "атмосферна якість зображення" (“atmospheric seeing”).

Межі між шарами в атмосфері, а також показники заломлення шарів безперервно змінюються через турбулентність, коливання температури та інші фактори. Це призводить до крихітних змін положення зображення у фокальній площині телескопа, відомих як "ефект мерехтіння". У решті задачі, окрім використання дифракційного обмеження скінченного розміру зображення зорі (як це було описано вище), жодні інтерференційні ефекти не розглядатимуться.

Ліва частина рисунка нижче демонструє вертикальний переріз атмосфери з декількома шарами з різними показниками заломлення $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$. На правій частині - показано збільшений вигляд тонкого вертикального розрізу атмосфери і межу між двома найнижчими атмосферними шарами з показниками заломлення n_1 і n_2 $(n_1 > n_2)$. У цій задачі ми розглядаємо лише ці два шари та їхню межу. Рисунки не в масштабі.



(T09.2) Нехай межа між двома шарами знаходиться на висоті $H = 1$ км безпосередньо над об'єктивом телескопа, з нахилом $\theta = 30°$ відносно горизонтальної площини. У всіх частинах цієї задачі додатне значення θ відлічується проти годинникової стрілки. Для монохроматичного джерела світла $n_1 =$ 1.00027 і n_2 =1.00026. Нехай кутовий зсув зображення у фокальній площині телескопа для зорі у зеніті дорівнює α.

(T09.2a) Намалюйте, відповідним чином позначену, діаграму з променями на межі двох середовищ, на якій будуть позначені n_1, n_2, θ і α. **[2]**

(T09.2b) Знайдіть вираз для α через θ, n_1 та n_2. Використовуйте наближення для малих кутів: $\sin\alpha \approx \alpha$ і $\cos\alpha \approx 1$. **[2]**

(T09.2c) Обчислити зміщення Δx_θ (у метрах) положення зображення, якщо θ збільшується на 1% (при фіксованих значеннях n_1 та n_2). **[3]**

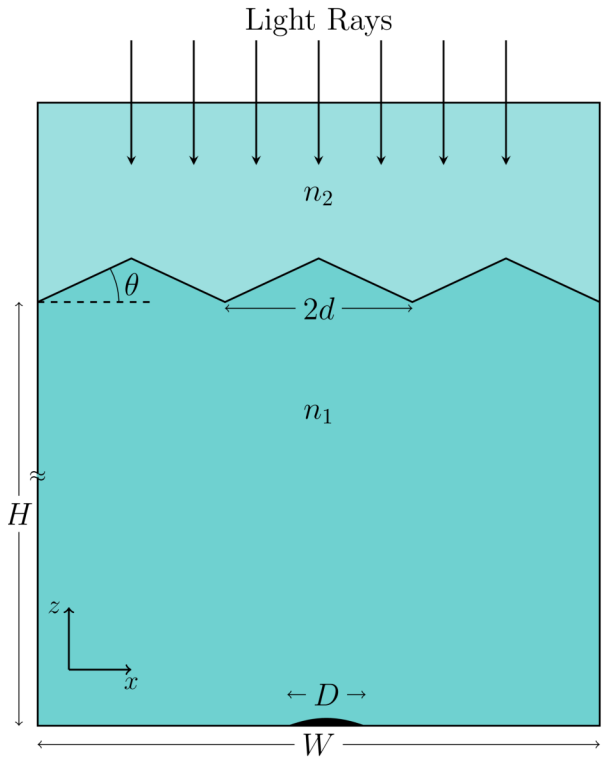
(T09.2d) Обчислити зміщення Δx_n (у метрах) положення зображення, якщо n_2 збільшується на 0.0001% (при фіксованих значеннях n_1 та θ). **[3]**

(T09.3) Для зорі в зеніті, що випромінює біле світло, виберіть, який з наведених нижче пунктів найточніше описує форму і колір її зображення, позначивши (✓) відповідну клітинку (лише одну) у Зведеному аркуші відповідей. Зауважте, що x на рисунку збільшується зліва направо. **[2]**

	Колір зображення	Форма зображення	Лівий край	Правий край
A	Білий	Круглий		
B	Білий	Еліптичний		
C	Кольоровий	Круглий	Синій	Червоний
D	Кольоровий	Круглий	Червоний	Синій
E	Кольоровий	Еліптичний	Синій	Червоний
F	Кольоровий	Еліптичний	Червоний	Синій

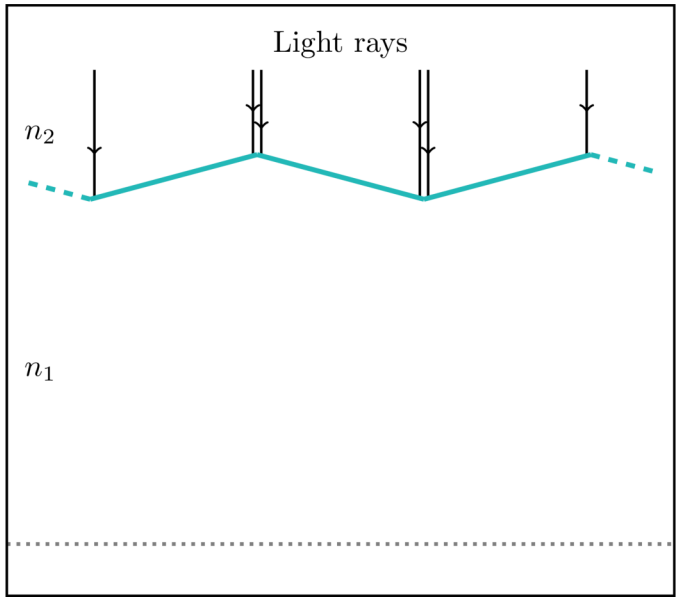
Для всіх інших частин цього завдання ми розглядаємо монохроматичне зелене світло з довжиною хвилі $\lambda = 550$ нм. Ми моделюємо межу між шарами як набір нескінченних зигзагоподібних площин (перпендикулярних до площини сторінки), розділених $d = 10$ см вздовж x-вісі, з кутами $\theta = 10°$ або $\theta = -10°$.

На рисунку нижче (не в масштабі) показано поперечний переріз цієї моделі атмосфери шириною W ($W \ll H$). Для телескопів з великою апертурою цей зиґзаґоподібний характер межі призводить до утворення спеклів у фокальній площині.



(T09.4) Розглянемо атмосферу, змодельовану, як показано вище.

(T09.4a) На рисунку нижче (не в масштабі) показано ділянку атмосфери з послідовними зигзагоподібними площинами з тими самими параметрами, що були зазначені вище.



На цій схемі, відтвореній у Зведеному аркуші відповідей, накресліть шляхи падаючих променів світла до площини, показаної сірою точковою лінією, де розміщено об'єктив телескопа.

Позначте на схемі область(і), якщо такі є, знаком "X", куди не потрапляє жоден промінь. **[4]**

(T09.4b) Обчисліть ширину W_{X} таких областей. **[3]**

(T09.4c) Знайдіть найбільший можливий діаметр $D_{\max}$ об'єктива телескопа, за допомогою якого можна буде отримати єдине зображення зорі, правильно вибравши розташування телескопа відносно структури межі. **[4]**

(T09.5) Розглянемо випадок, коли зигзагоподібна форма границі передбачена як у напрямку x, так і у напрямку y (подібно до поля пірамід), і $D = 100$ см (при $f = 200$ см). **[6]**

Намалюйте якісну картину отриманих спеклів у полі, наведеному у Зведеному аркуші відповідей.

(T09.6) Для турбулентної атмосфери знову розглянемо ту ж саму паралельно-протяжну зиґзаґоподібну форму межі між шарами тільки вздовж x-напряму, але тепер кут між двома площинами змінюється з рівномірною швидкістю від 10° до $-10°$ за 1.0 с. Припустимо, що це призводить до рівномірної швидкості зсуву положення зображення. **[5]**

Розглянемо телескоп з $D = 8$ см і $f = 1$ м. Оцініть найбільший час експозиції $t_{\max}$, допустимий для його ПЗЗ-камери, щоб отримати тільки одне зображення, а будь-яке можливе відхилення його положення залишалося менше 1% діаметра дифракційного зображення.

(T10) Нуклеосинтез Великого вибуху **[35 балів]**

В епоху домінування випромінювання у ранньому Всесвіті масштабний фактор Всесвіту $a \propto t^{1/2}$, де t - час, що минув від Великого Вибуху. Протягом більшої частини цієї ери нейтрони (n) і протони (p) залишаються в тепловій рівновазі один з одним через слабку взаємодію. Чисельна густина (N) вільних нейтронів або протонів пов'язана з температурою T та їхніми власними масами таким чином:

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_{\mathrm{B}}T}\right),$$

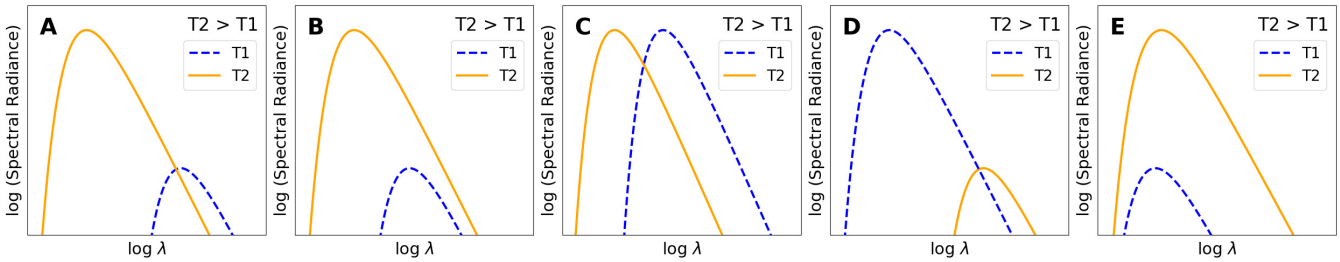
до того часу $t \leq t_{\mathrm{wk}}$ =1.70 с, коли $k_{\mathrm{B}}T \geq k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{wk}}$ =800 keV. Після t_{wk} слабка взаємодія більше не може підтримувати таку рівновагу, і вільні нейтрони розпадаються на протони з періодом напіврозпаду 610.4 с.

(T10.1) Нехай чисельна густина протонів дорівнює N_{p}, а чисельна густина нейтронів - N_{n}. Обчислити відносну частку нейтронів, яка виражається співвідношенням $X_{\mathrm{n,\,wk}} = N_{\mathrm{n}}/(N_{\mathrm{n}} + N_{\mathrm{p}})$ у момент часу t_{wk}. **[4]**

(T10.2) Фотони підтримують теплову рівновагу і можуть бути описані спектром абсолютно чорного тіла в усі епохи.

(T10.2a) Знайдіть індекс β, такий, що $T(a) \propto a^{\beta}$. **[2]**

(T10.2b) Визначте, який з наступних графіків показує правильну поведінку спектральної густини енергії для двох температур T_1 і T_2. Відмітьте "галочкою" правильний варіант у Зведеному аркуші відповідей (Summary Answersheet). **[2]**



(T10.3) Після t_{wk} процес утворення дейтерію з протонів і нейтронів описується рівнянням Саха, вперше записане індійський фізиком проф. Меґнадом Саха, яке можна спростити до

$$\frac{N_{\mathrm{D}}}{N_{\mathrm{n}}} = 6.5\eta\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m_{\mathrm{n}}c^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(m_{\mathrm{D}} - m_{\mathrm{p}} - m_{\mathrm{n}})c^2}{k_{\mathrm{B}}T}\right).$$

Тут відношення баріонів до фотонів (баріон-фотонне відношення) η дорівнює 6.1×10^{-10}, і N_{D} - чисельна густина дейтерію.

(T10.3a) Побудуйте відношення $N_{\mathrm{D}}/N_{\mathrm{n}}$ на сітці у Зведеному аркуші відповідей (Summary Answersheet), принаймні для 4 достатньо віддалених один від одного значень температури, які належать діапазону $k_{\mathrm{B}}T$ = [60, 70] keV, і намалюйте плавну криву, що проходить через ці точки. **[5]**

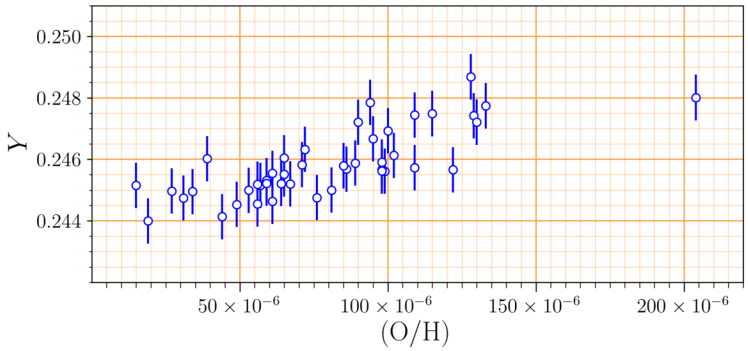
(T10.3b) За графіком знайдіть $k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{nuc}}$ (у keV) при $N_{\mathrm{D}} = N_{\mathrm{n}}$. **[1]**

(T10.3c) А зараз припустимо, що всі вільні нейтрони миттєво об'єднуються з протонами при $k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{nuc}}$, утворюючи дейтерій, і весь цей дейтерій миттєво перетворюється на гелій ($^4_2$He). Обчисліть відповідну епоху або момент початку нуклеосинтезу t_{nuc} (у секундах) для утворення гелію. **[4]**

(T10.4) Обчисліть значення $X_{\mathrm{n,\,nuc}}$ безпосередньо перед t_{nuc}. **[5]**

(T10.5) Первинна частка гелію, Y_{prim}, визначається як частка повної баріонної маси у Всесвіті, яка зосереджена у гелії одразу після t_{nuc}. Отримайти теоретичну оцінку для значення Y_{prim}. Лише для цього обчислення припустіть, що $m_{\mathrm{p}} \approx m_{\mathrm{n}}$ і що маса гелію, $m_{\mathrm{He}} \approx 4m_{\mathrm{n}}$. **[3]**

(T10.6) Первісний вміст гелію дуже важко виміряти, оскільки зорі безперервно перетворюють водень на гелій у Всесвіті. Обсяг переробки зорями в галактиці характеризується відносною чисельною густиною кисню (який виробляється лише зорями) до водню, що позначається як (O/H). Нижче наведено компіляцію вимірювань (O/H) і вмісту гелію Y для різних галактик.
.



Використовуючи всі точки на цій діаграмі (яка відтворена у Зведеному аркуші відповідей), дайте відповіді на наступні запитання.

(T10.6a) Оцініть Y для блакитної компактної карликової галактики зі значенням (O/H)=1.75×10^{-4}. **[2]**

(T10.6b) Знайдіть кутовий коефіцієнт нахилу $dY/d(\mathrm{O/H})$ прямої, яка відповідає наведеним вище даним. **[2]**

(T10.6c) Оцініть первісний вміст гелію, $Y_{\mathrm{prim}}^{\mathrm{obs}}$, на основі наведених вище спостережень. **[2]**

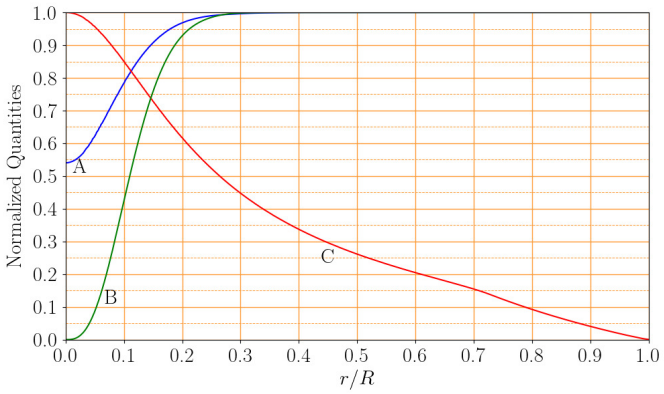
(T10.7) Відхилення між Y_{prim} і $Y_{\mathrm{prim}}^{\mathrm{obs}}$ можна узгодити, змінивши відношення баріонів до фотонів (баріон-фотонне відношення) η. Коли η зменшується, як показано стрілкою ↓ у Зведеному аркуші відповідей, вкажіть збільшення (↑) або зменшення (↓) у $N_{\mathrm{D}}/N_{\mathrm{n}}(T)$, T_{nuc} (коли $N_{\mathrm{D}} = N_{\mathrm{n}}$), t_{nuc}, $X_{\mathrm{n,\,nuc}}$, та Y_{prim} у комірках, наведених у Зведеному аркуші відповідей (Summary Answersheet). **[3]**

(T11) Зорі крізь графіки **[50 балів]**

Зорі добре апроксимуються як сферично-симетричні об'єкти, а отже, радіальна відстань r від центру може бути обрана як єдина незалежна змінна при моделюванні внутрішньої будови зорі. Масу, що міститься у сфері радіуса r, позначимо через $m(r)$. Світність $l(r)$ визначається як результуюча енергія, що виходить назовні через сферичну поверхню радіуса r за одиницю часу. Інші цікаві величини, наприклад, густина $\rho(r)$, температура $T(r)$, масова частка гідрогену $X(r)$, масова частка гелію $Y(r)$ і ядерна енергія, що генерується на одиницю маси за одиницю часу $\epsilon_{\mathrm{nuc}}(r)$, вважаються функціями r. У цій задачі ми знехтуємо ефектами дифузії та гравітаційного осідання елементів усередині зорі.

Символ "log" означає логарифм за основою 10. Задача складається з трьох незалежних частин.

(T11.1) **Частина 1: Всередині зорі**
На наведеному нижче графіку показано зміну трьох структурних величин, A, B і C, як функції дробового радіуса r/R у моделі зорі масою $1\mathrm{M}_{\odot}$ і віком 4 гігароки (Gyr), де R - радіус фотосфери зорі. Значення масової частки гелію на поверхні (фотосфері) Y_{s} та металічності (масової частки всіх елементів, важчих за гелій) на поверхні (фотосфері) Z_{s} зорі задаються як (Y_{s}, Z_{s}) = (0.28, 0.02). Усі величини, показані на графіках, нормовано на відповідні максимальні значення.



(T11.1a) Визначте однозначно три величини A, B і C з п'яти запропонованих варіантів: **[6]**

$$T(r),\ l(r),\ \epsilon_{\rm nuc}(r),\ X(r),\ Y(r).$$

(Запишіть A/B/C у клітинках навпроти відповідних величин у Зведеному аркуші відповідей. Обґрунтовувати відповідь не потрібно).

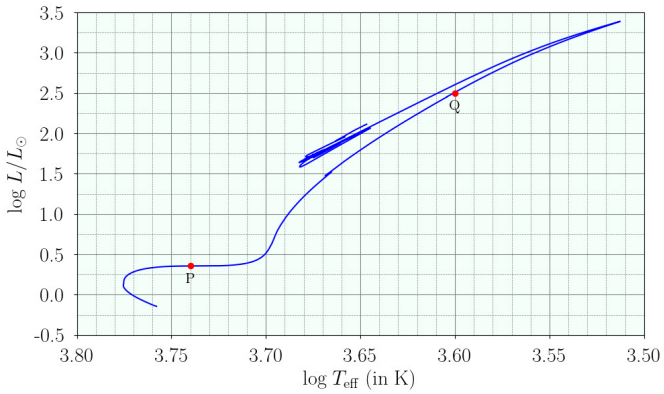
(T11.1b) Яка масова частка гелію у центрі зорі $Y_{\rm c}$? **[3]**

(T11.1c) Побудуйте графіки залежності двох інших величин зі списку п'яти (які не були ідентифіковані як криві A, B або C), наведених у (T11.1a), як функції r/R на тому самому графіку у Зведеному аркуші відповідей, і позначте їх відповідними величинами. **[5]**

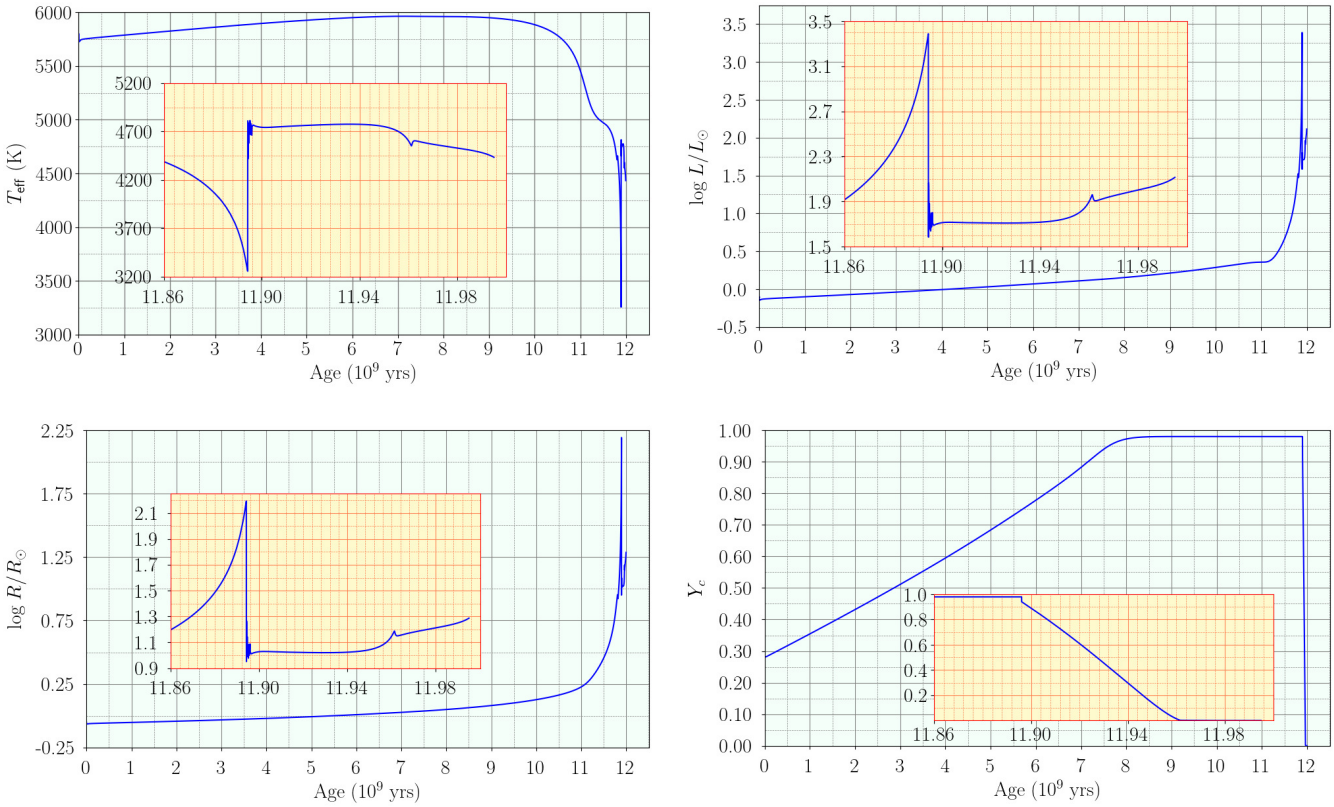
(T11.2) **Частина 2: Зорі, що еволюціонують**

Розглянемо еволюцію зорі $1\mathrm{M}_\odot$, початковий однорідний склад якої задається масовими частками гелію, $Y_0 = 0.28$, і металів, $Z_0 = 0.02$. На наведених нижче рисунках показано зміну різних глобальних величин цієї зорі в міру її еволюції від ZAMS (зорі головної послідовності нульового віку) до кінця горіння гелію в ядрі.

На графіку нижче показано еволюційний трек зорі на діаграмі Герцшпрунга-Рассела (далі HR-діаграмі) (графік $\log L/L_\odot$ від $\log T_{\rm eff}$, де L - поверхнева світність, а $T_{\rm eff}$ - ефективна температура).



На рисунку нижче наведено чотири графіки, які показують зміну $T_{\rm eff}$ (у Кельвінах), L (подано як $\log L/L_\odot$), R (подано як $\log R/R_\odot$) і $Y_{\rm c}$ з віком (в 10^9 років) тієї самої зорі. На кожному з цих чотирьох графіків для більшої наочності на вставках детально показано варіації відповідних величин у діапазоні від 11.86×10^9 років до 12.00×10^9 років.



Використовуйте ці графіки, щоб відповісти на наведені нижче запитання.

(T11.2a) Який приблизний час життя зорі на головній послідовності, $t_{\rm MS}$ (у роках)? **[1]**

(T11.2b) Який приблизний час, $\Delta t_{\rm He}$ (у роках), протягом якого зоря спалює гелій у своєму ядрі? **[1]**

(T11.2c) Яка частка $f_{\rm H}$ початкової кількості гідрогену у ядрі зорі згоріла, коли світність зорі дорівнює $1 \mathrm{L}_\odot$? **[3]**

(T11.2d) Яким буде радіус зорі R_1 (в одиницях $\mathrm{R}_\odot$), коли згорить 60% початкової кількості гідрогену у її центрі? **[3]**

(T11.2e) Чому дорівнюють радіуси зорі $R_{\rm P}$ та $R_{\rm Q}$ (в одиницях $\mathrm{R}_\odot$), що відповідають її положенням P і Q, відповідно, як позначено на HR-діаграмі? **[4]**

(T11.3) Частина 3: Розподіл маси всередині зорі

Рівняння, яке описує розподіл маси всередині зорі, має вигляд

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Було б зручно записати це рівняння через три безрозмірні змінні, а саме: масову частку, q, частку радіуса, x, і відносну густину, σ, які ми визначимо як

$$q = m/M \qquad x = r/R \qquad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

де M та R - повна маса та радіус зорі відповідно, відповідно, а $\bar{\rho} \equiv \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ - середня густина зорі. Для конкретної зорі, яку ми розглядатимемо в цій частині, наведено таку інформацію:

- Густина у центрі $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$

- Половина маси зорі міститься у внутрішніх 25% її повного радіуса, а 70% маси зорі міститься у внутрішніх 35% її повного радіуса.

У всіх наступних частинах цього питання достатньо буде округлити всі отримані числові коефіцієнти з точністю до 0.005.

(T11.3a) Виразіть наведене вище рівняння, що описує залежність маси від радіуса, через x, $\frac{dq(x)}{dx}$ та $\sigma(x)$. **[2]**

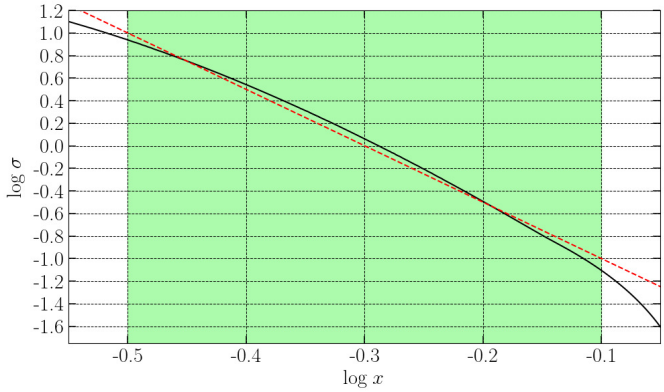
Щоб отримати розподіл маси від радіусу, треба знати профіль густини всередині зорі. Для розв'язання цієї задачі опишемо зміну густини з радіусом наближеними формулами у двох областях x:

- внутрішня частина зорі: $0 \leq x \leq 0.32$
- середня частина зорі: $0.32 < x < 0.80$

Ми не робимо жодних наближень для зовнішньої частини, тобто $0.80 \leq x \leq 1.00$.

(T11.3b) **Наближення для середньої частини**:

Зміна $\log \sigma$, як функція $\log x$ у середній частині зорі показана (чорною кривою) на графіку нижче. Ми зробимо лінійну апроксимацію (показану на графіку пунктирною червоною лінією) для $\log \sigma$ як функції $\log x$ в області $-0.5 < \log x < -0.1$, тобто $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (показана зеленою заштрихованою областю). Далі ми апроксимуємо кутовий коефіцієнт нахилу цієї лінії найближчим цілим числом.



Використовуючи це наближення, запишіть вираз для $\sigma(x)$ як функцію x в області $0.32 < x < 0.80$. **[4]**

(T11.3c) Використовуючи результат (T11.3b), виведіть вираз для $q(x)$ в області $0.32 < x < 0.80$. **[6]**

(T11.3d) **Наближення для внутрішньої частини**:

[8]

У внутрішній частині зорі ($0 \leq x \leq 0.32$) густину можна апроксимувати лінійною функцією від радіуса, тобто $\sigma(x) = Ax + B$, де A, B є сталими. Визначте A і B, і отримайте вираз для $q(x)$ в області $0 \leq x \leq 0.32$. Зауважте, що наближення, прийняті в попередній частині і в цій частині, можуть призвести до невеликих розривів значення густини або маси при $x = 0.32$.

(T11.3e) Вирази для $q(x)$, отримані в частинах (T11.3c) і (T11.3d), є наближеннями, які досить добре описують зміну маси з радіусом, але тільки в певних областях зорі. Для області $0.80 \leq x \leq 1$ (для якої ми не отримали жодного виразу) можна використати відповідну екстраполяцію з сусідньої області. Використовуючи ці наближені вирази і дані, побудуйте плавну криву (без розривів ані в $q(x)$, ані у відповідній похідній) для $q(x)$ від x для всієї зорі ($0 \leq x \leq 1$), яка представляє зміну маси з радіусом. **[4]**

(T12) Випромінювання Гокінга чорними дірами **[50 балів]**

(T12.1)

Чорна діра (ЧД) зазвичай утворюється внаслідок гравітаційного колапсу масивної зорі наприкінці її життєвого циклу в точку, яка називається сингулярністю. Через надзвичайну гравітацію такого об'єкта ніщо, що потрапляє на так званий горизонт подій (сферичну поверхню з $r = R_{\mathrm{SC}}$, де r - відстань від сингулярності), не може "втекти" з неї. Тут R_{SC} є радіусом Шварцшильда.

(T12.1a) **Моделювання походження випромінювання Гокінга:** Розглянемо пару частинок, кожна з яких має масу m, яка утворюються по обидва боки горизонту ЧД. Одна частинка знаходиться трохи поза горизонтом на відстані $r \approx R_{\mathrm{SC}}$, тоді як інша частинка знаходиться всередині горизонту на відстані $r = \kappa R_{\mathrm{SC}}$. Припустимо, що повна енергія кожної частинки складається з її енергії спокою mc^2 та гравітаційної потенціальної енергії, зумовленої гравітаційним впливом ЧД.

Визначте значення κ, для якого пара частинок має нульову повну енергію. **[4]**

(T12.1b) **Температура чорної діри:** Якщо частинка, утворена за межами горизонту подій в описаному вище процесі, має достатню кінетичну енергію, вона може покинути ЧД у процесі, який називається випромінюванням Гокінґа. Частинка всередині горизонту, яка має від'ємну енергію, поглинається і зменшує масу ЧД.

Припустимо, що все випромінювання Гокінґа складається з фотонів зі спектром абсолютно чорного тіла, який має пік на довжині хвилі $\lambda_{\mathrm{bb}} \approx 16 R_{\mathrm{SC}}$. Відомо, що для ЧД сонячної маси, $R_{\mathrm{SC},\odot}$ =2.952 км.

Отримайте вираз для температури, T_{bh}, ЧД, що відповідає випромінюванню цього АЧТ. Відповідь виразіть через його масу M_{bh} та фізичні константи. Обчисліть радіус Шварцшильда, $R_{\mathrm{SC},10\odot}$, і температуру, $T_{\mathrm{bh},10\odot}$, для ЧД з масою $10\,\mathrm{M}_\odot$. **[4]**

(T12.1c) **Втрата маси чорною дірою:** Припустимо, що випромінювання Гокінґа випромінюється з горизонту подій.

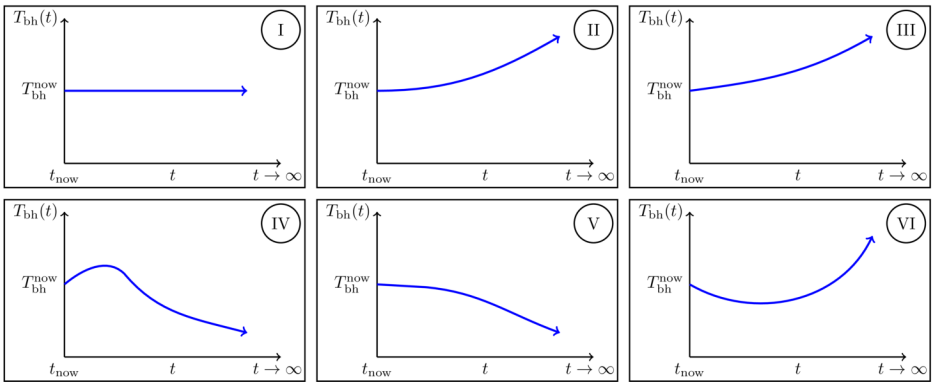
Використовуючи формулу еквівалентності маси та енергії, отримайте вираз для швидкості втрати маси, $dM_{\mathrm{bh}}(t)/dt$, через масу $M_{\mathrm{bh}}(t)$ ЧД і фізичні константи.

В решті-решт, отримайте вираз для $M_{\mathrm{bh}}(t)$ для ЧД з початковою масою M_0. Зообразіть залежність $M_{\mathrm{bh}}(t)$ як функцію від параметра t в діапазоні від $M_{\mathrm{bh}} = M_0$ до $M_{\mathrm{bh}} = 0$. **[8]**

(T12.1d) **Час життя чорної діри:** Отримайте вираз для часу життя τ_{BH}, за який чорна діра з початковою масою M_0 повністю випаровується внаслідок випромінювання Гокінга, через M_0 та фізичні константи. Обчисліть час життя $\tau_{\mathrm{bh},10\odot}$ (у секундах) для чорної діри з $M_0 = 10\,\mathrm{M}_\odot$. **[3]**

(T12.1e) **Чорна діра у ванні випромінювання КМВ:** Розглянемо ізольовану чорну діру в космосі, далеко від інших тіл, з поточною температурою $T_{\rm bh}^{\rm now}$, оточену космічним мікрохвильовим вимпромінюванням (КМВ) з поточною температурою $T_{\rm cmb}^{\rm now} = 2.7$ K. Чорна діра може збільшувати масу, поглинаючи випромінювання КМВ, і втрачати масу внаслідок випромінювання Гокінга.

Беручи до уваги прискорене розширення Всесвіту, визначте, які з наступних рисунків показують довготривалу еволюцію в часі $T_{\rm bh}$ у наступних трьох випадках: (X) $T_{\rm bh}^{\rm now} > T_{\rm cmb}^{\rm now}$, (Y) $T_{\rm bh}^{\rm now} = T_{\rm cmb}^{\rm now}$, (Z) $T_{\rm bh}^{\rm now} < T_{\rm cmb}^{\rm now}$.



Вкажіть свою відповідь, позначивши відповідну клітинку (тільки одну) для кожного випадку X, Y або Z у таблиці, наведеній у Зведеному аркуші відповідей (Summary Answersheet), що відповідає номеру відповідного рисунка. **[6]**

(T12.2) Первинні чорні діри (ПЧД) значно менших мас могли утворюватися у дуже ранньому Всесвіті. Усі наступні питання стосуються саме ПЧД. Тут можна знехтувати будь-якими процесами, що збільшують масу чорної діри.

(T12.2a) **ПЧД, що випаровуються в поточну епоху:** Як ви могли помітити з відповідей на попередні запитання, чорним дірам сонячної маси знадобилося б багато часу, щоб випаруватися. Однак, оскільки ПЧД можуть мати значно меншу масу, ми можемо спостерігати, як вони випаровуються у теперішній час.

Знайдіть початкову масу $M_{0,\,\rm PBH}$ (у кг), радіус Шварцшильда $R_{\rm SC,\,PBH}$ (у м) і температуру $T_{\rm PBH}$ (у К) чорної діри, яка може повністю випаровуватись у наш час, тобто з часом життя $\tau_{\rm PBH} = 14$ мільярдів років. **[4]**

(T12.2b) **Утворення ПЧД:** У ранньому Всесвіті, де домінує випромінювання, масштабний фактор змінюється як $a(t) \sim t^{1/2}$. В цю епоху ПЧД утворюються внаслідок колапсу всієї енергії, що міститься в області фізичного розміру ct, де t - вік Всесвіту в цей час.

ПЧД з масою $1{\times}10^{12}$ кг утворюється, коли вік Всесвіту становить приблизно $1{\times}10^{-23}$ с. Обчисліть вік Всесвіту, t_{20}, коли утворюється ПЧД з масою $1{\times}10^{20}$ кг. **[6]**

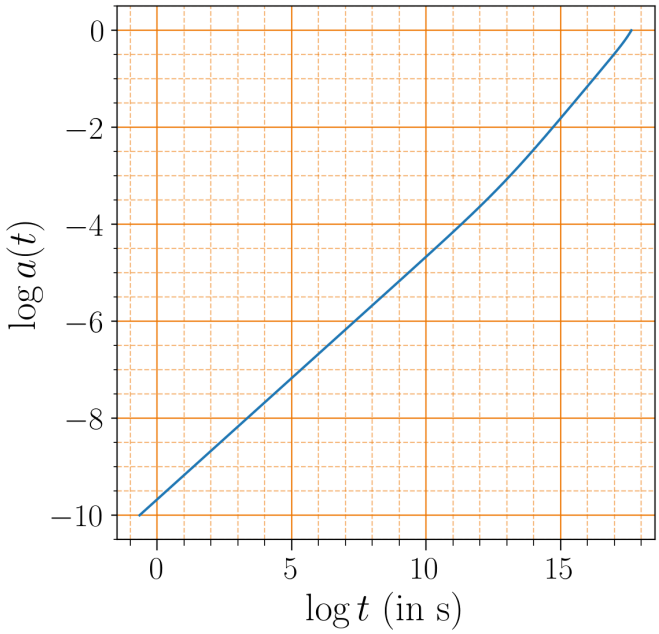
(T12.2c) **Спостережуваний спектр випромінювання Гокінґа від ПЧД:** Розглянемо ПЧД з початковою масою 1×10^{10} кг, яка повністю випаровується наприкінці свого життя $\tau_{\rm PBH}$. Для спрощення припустимо, що більша частина випромінювання Гокінґа випромінюється в цей час з температурою, яка відповідає його початковій масі. Також візьмемо масштабний фактор Всесвіту, що еволюціонує таким чином: $a(t) \sim t^{2/3}$.

Обчислити довжину хвилі, на яку припадає максимум випромінювання Гокінґа, що спостерігається на Землі $\lambda_{\rm earth}$ у теперішню епоху (при $t = 14$ мільярдів років). **[5]**

(T12.2d)

Високоенергетичне космічне випромінювання ПЧД: Тепер припустимо, що випромінювання Гокінґа, випромінюване у певний момент часу t, відповідає фотонам, випромінюваним з енергією $k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{bh}}(t)$. Також, найбільшою можливою температурою для чорної діри є температура Планка T_{Planck}, де $k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Еволюцію масштабного фактора у відповідних часових масштабах показано на наступному рисунку. Масштабний множник сьогодні дорівнює одиниці. $t(s)$ на осі часу показує вік Всесвіту в секундах.



Якщо на Землі спостерігається фотон з енергією $E_{\mathrm{det}} = 3.0 \times 10^{20}$ eV, визначте найбільше і найменше можливі значення початкової маси ПЧД (M_0^{max} і M_0^{min}, відповідно), які можуть генерувати цей фотон. **[10]**