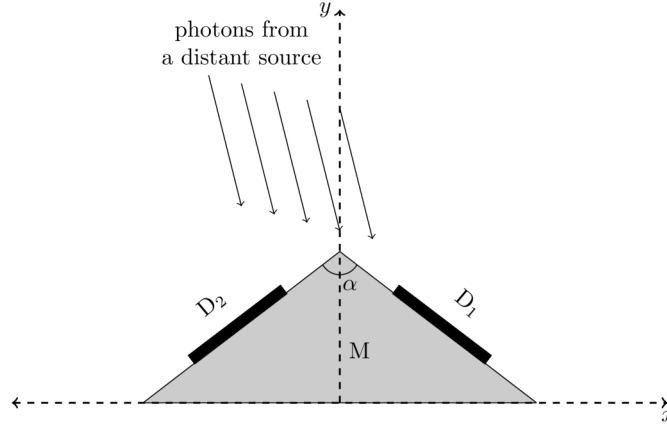


(T01) Daksha Misyonu

[10 puan]

"Daksha", iki uydudan (S_1 ve S_2) oluşan bir Hint misyonudur. Uydular Yer'in çevresinde $r = 7000$ km yarıçaplı aynı çembersel yörüngede, 180° faz farkıyla dolanırlar. Bu uydular evreni yüksek enerji bölgesinde (X-ışınları ve γ ışınları) gözlerler. Daksha uydularının her biri çok sayıda düz, dikdörtgen dedektörler kullanır.

Gökyüzünde bir kaynağın nasıl konumlandırılacağını anlamak için Daksha görevinin basitleştirilmiş bir modelini kullanacağız. S_1 'in her biri $A = 0.50$ m² alana sahip yalnızca iki özdeş dedektörü (D_1 ve D_2) olduğunu ve dedektörlerin aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi opak bir M yuvasına bağlı olduğunu varsayalım. Dedektörler y eksenini etrafında simetrik olarak x - y düzlemine dik düzlemlerde yer almakta ve birbirleriyle $\alpha = 120^\circ$ açı yapmaktadırlar.



- (T01.1) x - y düzleminde yer alan uzak bir kaynağı gözlerken, D_1 dedektörü gücü $P_1 = 2.70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ ve D_2 dedektörü gücü $P_2 = 4.70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ olarak kaydeder.

Kaynağın konum vektörünün pozitif y -ekseni ile yaptığı açığı (η) bulun. Pozitif y -ekseninden saat yönünün tersine olan açı pozitif kabul edilir. **[5]**

Her iki Daksha uydusu (S_1 ve S_2) tarafından kaydedilen uzak bir kaynaktan (illa x - y düzleminde olması gerekmez) gelen tek bir atım (puls) sinyalini ele alalım. S_1 ve S_2 uydularının kaydettiği atım sinyallerinin tepe noktalarının zamanları sırasıyla t_1 ve t_2 dir.

- (T01.2) $t_1 - t_2$, 10.0 ± 0.1 ms olarak ölçüldüğüne göre kaynağın bulunabileceği gökyüzü kesrini, f , belirleyin. **[5]**

(T02) Makar-Sankranti

[10 puan]

"Makar-Sankranti" festivali Hindistan'da Güneş'in Yer'den görüldüğü şekliyle Oğlak (ing. Capricorn) burcu bölgesine (Makar = Oğlak, Sankranti = Giriş) girdiği zaman kutlanır. Günümüzde her yıl 14 Ocak civarında kutlanmaktadır. Festival, yıllar önce kuzey yarımkürede 21 Aralık'ta gerçekleştiğini varsaydığımız Kış Gündönümü'ne de denk gelmişti.

- (T02.1) Yukarıdaki bilgilere dayanarak kuzey yarımkürede bu kutlamanın en son kış gündönümüne denk geldiği yılı y_c bulunuz. **[3]**
- (T02.2) Güneş 14 Ocak 2006'da Mumbai'de yerel saatle 11:50:13'te Oğlak burcuna girmiş olarak görünüyorsa, 2013 yılında Oğlak burcuna girişinin tarihini (D_{enter}) ve yerel saatini (t_{enter}) hesaplayın. **[3]**
- (T02.3) Makar-Sankranti festivali belirli bir konum için Oğlak burcundaki ilk gün batımında kutlanır. Ocak ayında Mumbai'de yerel gün batımı saatinin 18:30:00 olduğunu varsayabilirsiniz. **[3]**

2006-2013 yılları arasındaki her yıl için festivalin kutlanma tarihini belirtiniz (Özet Cevap Kağıdındaki tabloda ilgili kutuyu ✓ ile işaretleyin). **[4]**

(T03) Kütleçekim Dalgaları
[15 puan]

Ortak kütle merkezi etrafında yörüngede dolanan çift karadelik sistemleri kütleçekim dalgaları üretir. Galaksimizde kütleleri $M = 36 M_{\odot}$ ve $m = 29 M_{\odot}$ olan ve kütle merkezi etrafında, yörünge açısal frekansı ω ile çembersel yörüngelerde dolanan iki kara deliği ele alalım.

- (T03.1) Newton kütleçekimi varsayımını kullanarak karadeliklerin yörüngelerine ait açısal frekans (ω_{ini}) için bir ifade türetin. Bu ifade, karadelikler arasındaki ayrıklığın, Schwarzschild yarıçaplarının toplamının 4.0 katı olduğu t_{ini} anına karşılık gelmelidir. Sonuç yalnızca M , m ve fiziksel sabitler cinsinden verilmelidir.

ω_{ini} değerini rad s^{-1} cinsinden hesaplayın.

[5]

- (T03.2) Genel görelilikte, yörüngedeki karadelikler f_{GW} frekansında kütleçekim dalgaları yayar, öyle ki $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$ olur. Bu da karadelik yörüngelerini küçültür ve f_{GW} 'yi artırır. f_{GW} 'nin değişim oranı

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

olur. Burada $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ "chirp kütlesi" olarak adlandırılır.

α , β ve δ değerlerini bulun.

[4]

- (T03.3) Olayla ilişkili kütleçekim dalgalarının ilk olarak $t_{\text{ini}} = 0$ anında tespit edildiğini varsayın.

[6]

Karadelik birleşmesinin gözlenen zamanı t_{merge} için, f_{GW} çok büyük hale geldiğinde, yalnızca ω_{ini} , M_{chirp} ve fiziksel sabitler cinsinden bir ifade türetin. t_{merge} değerini saniye cinsinden hesaplayın.

(T04) Balmer Oranı
[15 puan]

Bir bulutsu ile çevrelenen bir anakol yıldızı düşünün. Bu yıldızın V-bandı parlaklığı 11.315 kadir olarak gözlenmiştir. Bulutsunun yıldıza yakın olan iyonize bölgesi $H\alpha$ ve $H\beta$ çizgilerinde ışıma yayar; dalga boyları sırasıyla $0.6563 \mu\text{m}$ ve $0.4861 \mu\text{m}$ 'dir. $H\alpha$ ile $H\beta$ çizgilerinin teorik olarak tahmin edilen akı oranı $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2.86$ 'dır. Bununla birlikte, bu ışınım soğuk tozlu bulutsunun dış kısmından geçtiğinde, $H\alpha$ ve $H\beta$ çizgilerinin gözlenen emisyon akıları sırasıyla $6.80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ ve $1.06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ 'dir.

Sönümleme A_{λ} dalga boyunun bir fonksiyonudur ve

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

olarak ifade edilir. Burada, $\kappa(\lambda)$ sönümleme eğrisidir, $E(B - V)$ ise B ve V filtrelerindeki renk artığını gösterir. Sönümleme eğrisi (μm cinsinden λ ile) aşağıdaki gibi verilir.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

Burada, $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ toplamın seçili sönümlemeye oranıdır.

- (T04.1) $\kappa(H\alpha)$ ve $\kappa(H\beta)$ değerlerini bulun.

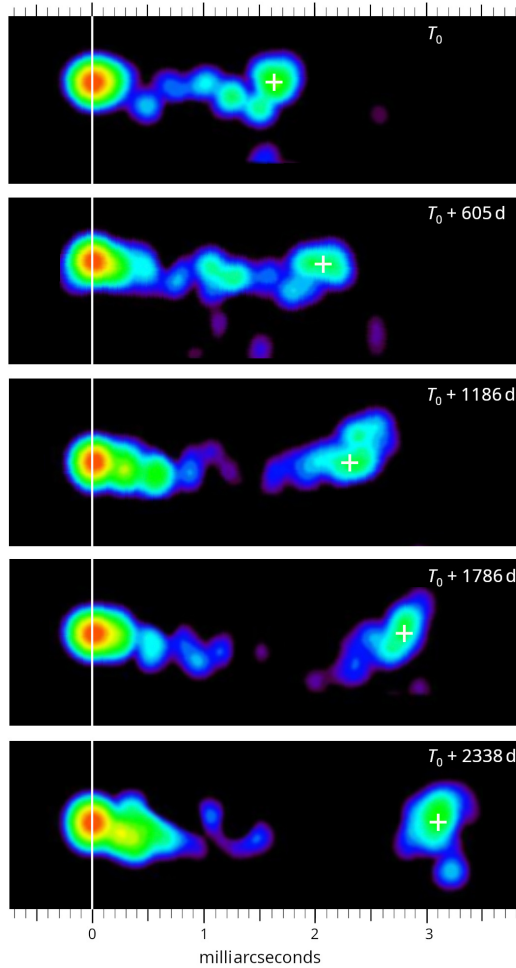
[3]

- (T04.2) Renk artığı oranının $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$ değerini bulun. [4]
- (T04.3) Sırasıyla $H\alpha$ ve $H\beta$ dalgaboylarında bulutsudan kaynaklanan sönümlemeleri, $A_{H\alpha}$ ve $A_{H\beta}$ belirleyin. [6]
- (T04.4) Bulutsunun sönümlemesini (A_V) ve bulutsu olmasaydı yıldızın V-bandındaki görünür parlaklığını, m_{V0} , hesaplayın. [2]

(T05) Kuazarlar

[20 puan]

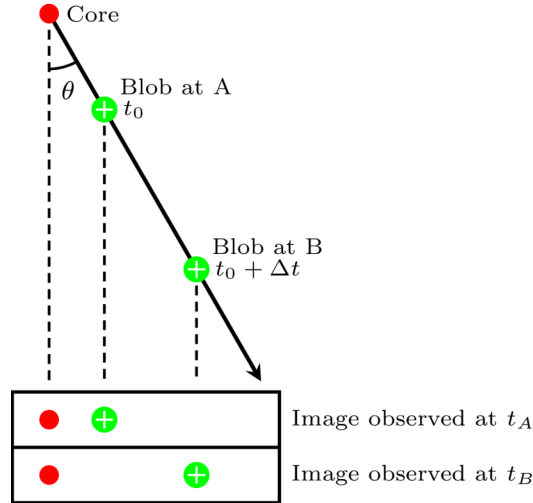
Bir kuazar, görelî jetler yayan süper-kütleli bir karadeliğ tarafından desteklenen son derece parlak aktif bir galaksidir. Şekilde bir kuazarın (kırmızıya kayması $z = 0.53$ ve ışınım gücü uzaklığı $D_L = 1.00 \times 10^{10}$ IY) farklı zamanlardaki radyo görüntüleri alt alta gösterilmektedir. "Çekirdek" dikey beyaz çizgi ile hizalanmışken, bir "madde yığını" (blob) (beyaz + işaretli) içeren bir jet zaman içinde ondan uzaklaşır. Her panel gözlem zamanını göstermektedir (ilk görüntü için T_0 ile başlayarak) ve açısal ölçek şeklin üstünde ve altında belirtilmiştir.



- (T05.1) Her bir gözlem için madde yığınının açısal ayrıklığını, ϕ_{blob} (mili-yaysaniyesi cinsinden) ve kuazar çekirdeğinden enine uzaklığını, l_{blob} (ışık yılı cinsinden) belirleyin. Sonra, ardışık gözlemleri kullanarak madde yığınının enine yöndeki görünür hızını (v_{app}) ışık hızının bir kesri olarak $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ hesaplayın. Ayrıca tüm gözlem dönemi boyunca ortalama görünür hızı da $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ hesaplayın. [5]

Kuazar jeti aslında görelî bir hızda $v \equiv \beta c$ hareket eder, ancak mutlaka gökyüzü düzleminde olması gerekmez; örneğin, aşağıdaki çizimde gösterildiği gibi, uzak bir gözlemcinin görüş doğrultusuna göre (kesikli çizgilerle gösterilen) θ (görüş açısı) açısı yapar.

Bu ve devamındaki tüm kısımlar için, kuazarın kırmızıya kaymasını ve görelî etkileri göz ardı edin.



- (T05.2) Madde yığını tarafından iki farklı zamanda t_0 (A konumuna karşılık gelir) ve $t_0 + \Delta t$ (B konumuna karşılık gelir) yayınlanan ışık, gözlemciye sırasıyla t_A ve t_B zamanlarında ulaşır. Dolayısıyla, gözlenen zaman farkı $\Delta t_{app} = t_B - t_A$ olur.

(T05.2a) $\frac{\Delta t_{app}}{\Delta t}$ oranını β ve θ cinsinden ifade eden bir bağıntı elde edin. [2]

(T05.2b) Bu oranı kullanarak, β_{app} 'i β ve θ cinsinden ifade edin. [2]

- (T05.3) Görünür hız ışık hızını aştığında ($\beta_{app} > 1$) hareket süperlüminal olarak, aşmadığında ise ($\beta_{app} < 1$) sublüminal olarak adlandırılır.

(T05.3a) $\beta_{app} = 1$ için, θ 'nın bir fonksiyonu olarak β 'nin düzgün bir eğrisini çizerek sublüminal ve süperlüminal hareketler arasındaki sınırı işaretleyin. Grafikte süperlüminal bölgeyi eğik çizgilerle (///) tarayın. [4]

(T05.3b) Süperlüminal hareketin gerçekleşmesi için gereken en düşük gerçek jet hızını ($\beta_{low} = v_{low}/c$) ve buna karşılık gelen görüş açısını θ_{low} bulun. [2]

- (T05.4) β_{app} 'ın belirli bir değeri için mümkün olabilecek maksimum görüş açısı θ_{max} için bir bağıntı elde edin. [2]

Bir kuazarın çekirdeği, merkezindeki kompakt nesne, nedensel olarak bağlı bir bölgede meydana gelen iç süreçler yüzünden ışımasında değişkenlik gösterir. Bu bölgenin boyutu (= yarıçapı) tipik olarak çekirdeğin Schwarzschild yarıçapının yaklaşık beş katı olarak alınır.

- (T05.5) Belirli bir kuazarın çekirdeğinin yaklaşık 1 saatlik zaman ölçeklerinde değiştiği bulunmuştur. [3] Merkezi kompakt nesnenin kütlesi için, Güneş kütlesi biriminde $M_{c, max}$ üst sınırı belirleyin.

(T06) Galaktik Dönme

[20 puan]

Galaksimizin dönme eğrisi, çeşitli galaktik boylamlardaki nötral hidrojen (HI) bulutlarının görüş doğrultusundaki 21 cm hız ölçümlerinden belirlenir. Galaktik boylamı l , Galaksi Merkezinden (GC) R uzaklıkta ve Güneş'ten D uzaklıktaki bir HI bulutunu düşünün. Güneş'in GC'den $R_0 = 8.5$ kpc uzaklıkta olduğunu varsayın. Hem Güneş'in hem de HI bulutunun, Galaksi düzleminde GC etrafında dairesel yörüngelerde olduğunu ve açısal hızlarının Ω_0 ve Ω , dönme hızlarının ise V_0 ve V olduğunu varsayın.

Bulutun, Güneş'ten gözlenen dikine hız (V_r) ve teğet hız (V_t) bileşenleri şu şekilde ifade edilebilir:

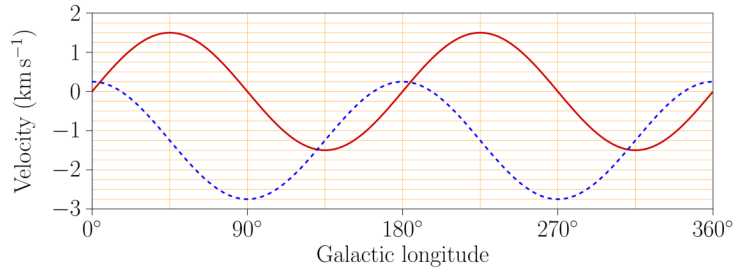
$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Kuzey Galaktik Kutbundan bakıldığında, Galaktik dönme saat yönündedir. Bu problemde, dikine hızı uzaklaşırken pozitif alacağız ve bulutları nokta kaynaklar olarak düşüneceğiz.

(T06.1) Özet Cevap Kağıdında verilen grafikte, V_r 'yi D 'nin bir fonksiyonu olarak $D = 0$ 'dan $D = 2R_0$ 'a kadar iki ayrı görüş doğrultusu için çizin: (i) $l = 45^\circ$ ve (ii) $l = 135^\circ$. Her bir çizginizi/eğrinizi grafik üzerinde l değerleriyle etiketleyin. [5]

(T06.2) Aşağıdaki grafik, Güneş'ten 100 pc uzaklıktaki yıldızların ortalama dikine (düz, kırmızı eğri) ve teğet (kesikli, mavi eğri) hız bileşenlerini, Galaktik boylamın bir fonksiyonu olarak göstermektedir.



Grafiği kullanarak, Güneş'in GC etrafındaki yörünge periyodunu (P) mega-yıl (Myr) cinsinden tahmin edin. [3]

(T06.3) Jan Oort, açısal hızlar arasındaki farkın $(\Omega - \Omega_0)$ Güneş komşuluğunda ($D \ll R_0$) küçük olacağını belirtmişti ve bu nedenle de dikine ve teğet hız bileşenleri için aşağıdaki birinci dereceden yaklaşımı türetmişti:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

burada A ve B Oort sabitleri olarak bilinir.

İki durumu ele alalım:

(I) Galaksinin gözlenen gerçek dönme eğrisi ve

(II) Galaksinin karanlık madde içermediği ve tüm kütesinin merkezinde toplandığı varsayılan hipotetik bir senaryo için dönme eğrisi.

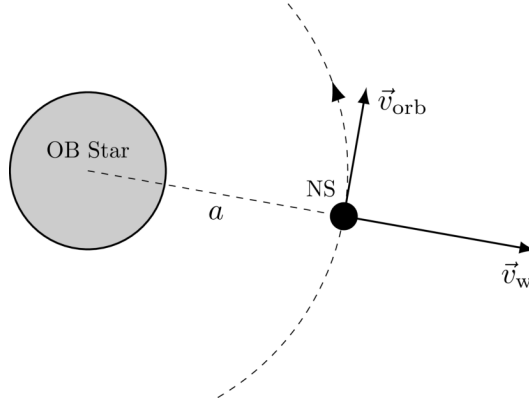
Her iki durum için Güneş'in konumundaki dönme hızının radyal gradyenti [2]
(T06.3a) $\left(\frac{dV}{dR}\right)_{R=R_0}$ için ifadeler türetin.

A ve B 'yi V_0 , R_0 ve Güneş'in konumundaki dönme hızının radyal gradyenti [8]
(T06.3b) $\left(\frac{dV}{dR}\right)_{R=R_0}$ cinsinden ifade edin.

Verilen iki durum (I ve II) için Oort sabitlerinin oranı (A/B), sırasıyla F_I ve F_{II} olarak tanımlanır. F_I ve F_{II} 'yi hesaplayın. [2]
(T06.3c)

Kompakt bir yıldız içeren bir çift sistemde, yoldaş yıldızın Roche lobunu doldurmadığı durumda kompakt yıldız için temel madde aktarım kaynağı yoldaş yıldızdan gelen yıldız rüzgarıdır. Bu rüzgarla beslenen yığılma, özellikle yakın bir yörüngede nötron yıldızı (NS) gibi kompakt bir nesne ile birlikte erken tip bir yıldız (O veya B yıldızı gibi, bundan böyle OB yıldızı olarak anılacaktır) içeren sistemlerde önemlidir.

Böyle bir NS-OB çift yıldız sistemi düşünün. Kütlesi $M_{\text{NS}} = 2.0 M_{\odot}$ ve yarıçapı $R_{\text{NS}} = 11 \text{ km}$ olan bir nötron yıldızı, OB yıldızının merkezi etrafında $v_{\text{orb}} = 1.5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ hızla a yarıçaplı çembersel bir yörüngede dolmaktadır (aşağıdaki şekle bakın). Bu problem boyunca OB yıldızının kütle kaybının küresel simetrik olduğunu ve hızının $\dot{M}_{\text{OB}} = 1.0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ olduğu varsayılmaktadır.



- (T07.1) Yığılma yarıçapı (R_{acc}), NS'nin yıldız rüzgarını yakalayabileceği maksimum uzaklık olarak tanımlanır. NS yörüngesindeki yıldız rüzgar hızı $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ ise yukarıdaki sistem için standart kaçış hızı hesaplamasını kullanarak R_{acc} 'yi km cinsinden bulun. [3]
- (T07.2) Tüm yakalanan malzemenin NS tarafından toplandığını varsayalım. $a = 0.5 \text{ AB}$ ise kütle aktarım oranını ($\dot{M}_{\text{acc}}$) $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ biriminde, yıldız rüzgarından NS'ye doğru hesaplayın. Radyasyon basıncının ve aktarılan gazın sonlu soğuma süresinin etkilerini ihmal edin. [3]
- (T07.3) Şimdi, a yörünge uzaklığındaki (NS yakınında) yıldız rüzgar hızının NS'nin yörünge hızıyla karşılaştırılabilir hale geldiği durumu düşünün. Bu durumda, yıldız rüzgarından NS üstüne kütle aktarım oranı, $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} f(\tan \beta, q)$ şeklinde ifade edilecektir. Burada, $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$, ikilinin kütle oranı ve β , NS referans sisteminde, rüzgar hızının yönü ile OB yıldızından olan radyal yön arasındaki açıdır. $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$ varsayarak $f(\tan \beta, q)$ ifadesini elde edin. [6]
- (T07.4) Tamamen iyonize maddenin dikine olarak yığıldığını ve NS'nin güçlü manyetik alanı ($\vec{B}$) nedeniyle de kısıtlandığını düşünün. Bu etki, $\frac{B^2}{2\mu_0}$ ile verilen bir basınç olarak modellenenebilir. NS'nin bir dipol manyetik alana sahip olduğunu varsayalım. Bu manyetik alanın büyüklüğü, ekvator düzleminde, NS'den olan r uzaklığına bağlı olarak $r \gg R_{\text{NS}}$ durumunda şu şekilde değişmektedir:

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

Burada B_0 , NS'nin ekvatorundaki manyetik alan şiddetidir.

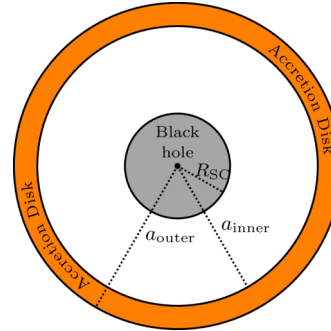
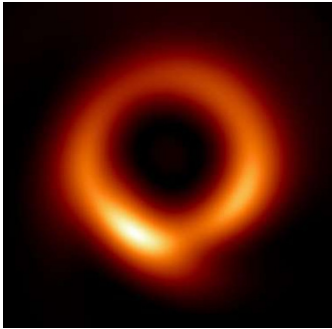
- (T07.4a) Ekvator düzlemindeki manyetik basıncı, $P_{\text{eq, mag}}$, B_0 , R_{NS} , r ve diğer uygun sabitler cinsinden elde edin. [1]
- (T07.4b) Ekvator düzleminde manyetik alan tarafından kısıtlandığı yığılma akışının maksimum mesafesine manyetosferik yarıçap (R_m) denir. Bu madde akışı, gelen yıldız rüzgarı ile NS arasındaki göreceli hareket nedeniyle bir basınç uygulayacaktır. R_m 'nin R_{acc} ile çakıştığı kritik manyetik alan ($B_{0, c}$) için yaklaşık bir ifade elde edin ve değerini Tesla cinsinden hesaplayın. $r > R_m$ için manyetik etkiler ihmal edilir ve $v_w \gg v_{\text{orb}}$ kabul edilir. [7]

(T08) Bir karadeliğin gölgesi

[20 puan]

Olay Ufku Teleskobu (EHT), M87 galaksisinin merkezindeki süper-kütleli karadeliğin bir görüntüsünü aşağıdaki şekilde sol panelde gösterildiği gibi yayınladı.

Bu görüntünün bazı basit özelliklerini anlamak için, $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$ kütleli, dönmeyen, statik, küresel simetrik bir karadeliğin basitleştirilmiş bir modelini ele alacağız. İç ve dış yarıçapları sırasıyla $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ and $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$ olan kütsüz, ince, düzlemsel bir yığılma diski ile çevrilidir, ve burada R_{SC} Schwarzschild yarıçapıdır. Aşağıdaki şekilde sağ panelde karşıdan görünümü için bir çizim gösterilmektedir (şekil ölçekli değildir).



Dikkate alınması gereken tek ışık kaynağının yığılma diski olduğu varsayılmaktadır. Disk üzerindeki her bir nokta her yönde ışık yayar. Bu ışık karadeliğin kütleçekim alanının etkisi altında hareket eder. Işık ışınlarının yolu aşağıda verilen iki denklem tarafından yönetilir (bunlar Güneş etrafındaki bir cisminkine benzer):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

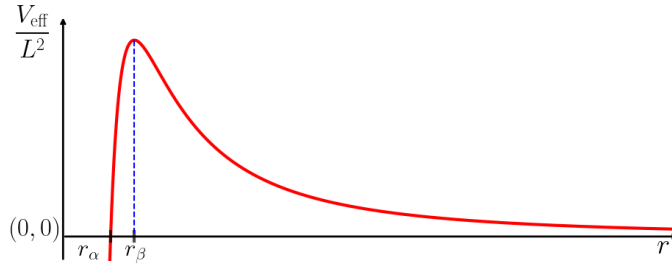
burada $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ radyal koordinat, $\phi \in [0, 2\pi)$ azimut açısıdır ve E ile L sırasıyla korunmuş enerji ve korunmuş açısal momentum ile ilgili sabitlerdir.

Burada $v_r \equiv dr/dt$ dikine hızın büyüklüğü, v_ϕ teğet hızın büyüklüğü ve $\omega \equiv d\phi/dt$ açısal hızdır. Bir yörünge için b etki parametresi $b = L/\sqrt{2E}$ olarak tanımlanır. Bu problemde zaman genişlemesi ihmal edilmiştir.

Bir başka kullanışlı denklem de ilk denklemin türevinin alınmasıyla elde edilir:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

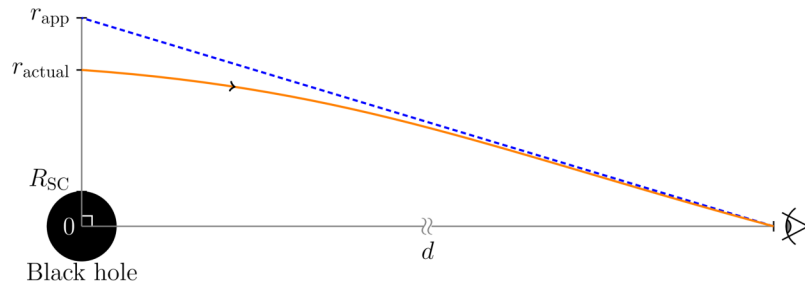
- (T08.1) Karadeliğin etrafında çembersel ışık yörüngeleri bulunabilir. Bu tür foton yörüngeleri için yarıçapı (r_{ph}) ve etki parametresini (b_{ph}), M ve ilgili sabitler cinsinden bulun. [4]
- (T08.2) Çembersel ışık yörüngesinin bir tam turunu tamamlamak için geçen süreyi (T_{ph}) saniye [2] cinsinden hesaplayın.
- (T08.3) Yukarıda verilen dikine hız denklemi (bu sorudaki ilk denklem) ışık yörüngeleri için $\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ şeklindeki bir denklemle karşılaştırılabilir. Aşağıda r 'nin bir fonksiyonu olarak V_{eff}/L^2 'nin şematik bir grafiği verilmiştir.



(T08.3a) Grafik, r_α ve r_β olmak üzere iki özel yarıçapı göstermektedir. r_α ve r_β için M ve ilgili sabitler cinsinden ifadeler elde edin. [2]

(T08.3b) Yığılma diskinden karadeliğe doğru içeri ilerleyen bir foton bazı durumlarda yine de dışarıya, sonsuzluğa kaçabilir. Böyle bir foton için dönüş noktası yarıçapının (r_t) en küçük değerinin ifadesini M ve ilgili sabitler cinsinden bulun. Bu foton için etki parametresinin minimum değerinin ($b_{\min}$) ifadesini bulun. [3]

(T08.4) Gökyüzü düzleminde sistemin merkezinden r_{actual} yarıçapı uzaklıktan gelen bir ışık ışını, karadeliğin kütleçekimi nedeniyle güçlü bir bükülmeye maruz kalacak ve sonunda aşağıda gösterildiği gibi sistemden d kadar oldukça uzakta bulunan bir gözlemciye (göz ile gösteriliyor) ulaşacaktır.

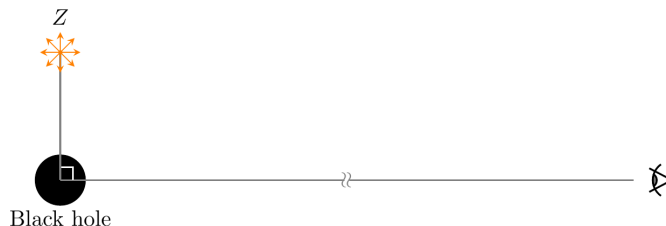


Bu gözlemci için ışın, karadeliğin merkezinden $r_{\text{app}} \approx b$ uzaklıkta gökyüzü düzleminde farklı bir noktadan gelmiş gibi görünecektir. Burada b söz konusu foton yörüngesi için etki parametresidir. Yığılma diski üzerinde $r = r_{\text{actual}}$ 'deki noktalar için aşağıdaki ilişki varsayılabilir:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

Bizim gibi uzak bir gözlemci için yığılma diski karşıdan görünürken, sistemin görüntüsü gökyüzü düzleminde dairesel simetrik olarak görünecektir. Görüntünün en dıştaki görünür yarıçapını (r_{outer}) ve en içteki görünür yarıçapını (r_{inner}) AB birimi cinsinden belirleyin. [5]

(T08.5) Herhangi bir yığılma diski olmayan $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$ kütleli izole bir süper-kütleli karadeliğin düşünün. Şekilde gösterildiği gibi karadeliğinden $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ uzaklıktaki bir Z noktasında 5 s süren kısa ve güçlü bir elektromanyetik ışınım patlaması meydana gelir. Z noktasındaki patlama her yönde ışık yayar. Karadeliğinden uzak bir noktadaki bir gözlemci (aşağıdaki şekilde göz ile gösterilmiştir) 60 saniye boyunca karadeliğin etrafındaki bölgenin uzun pozlu bir görüntüsünü çeker.



Aşağıdaki ifadelerin her biri için doğru seçeneği seçiniz:

- (T08.5a) Işığın Z'den gözlemciye kadar gidebileceği olası yolların sayısı [2]
(A) En fazla bir (B) Tam olarak bir (C) Tam olarak iki (D) İki'den büyüktür.
- (T08.5b) Uzun pozlama görüntüsünde görülecek, Z'deki EM patlamasına ait görüntü sayısı [2]
(A) En fazla bir (B) Tam olarak bir (C) Tam olarak iki (D) İki'den büyüktür.

(T09) Atmosferik Görüş

[35 puan]

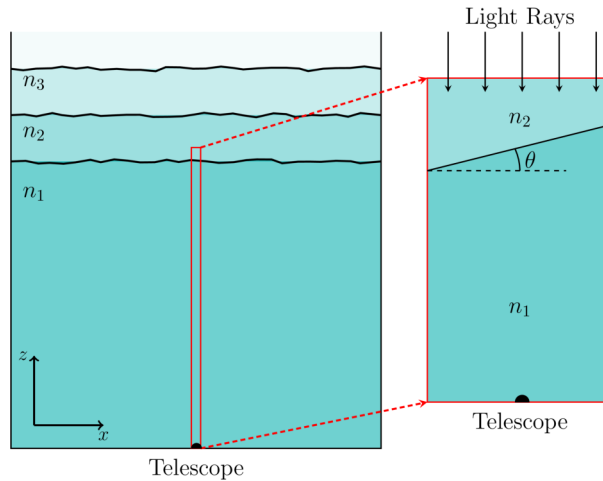
Çapı $D = 15$ cm ve odak uzunluğu $f = 200$ cm olan akromatik dışbükey objektifli bir teleskop zenitteki bir yıldızla doğrultulmuştur.

- (T09.1) Bir nokta kaynağın görüntüsü objektif mercek tarafından odak düzleminde yeşil ışık ($\lambda = 550$ nm) için, yalnızca kırınım etkilerini dikkate alınarak oluşturulmaktadır. Bu görüntünün çapını (d_{image}) m cinsinden bulun. [1]

Bir astronomi kaynağının görüntüsü "atmosferik görüş" olarak adlandırılan durumdan da etkilenir.

Atmosferdeki katmanlar arasındaki sınırlar ve katmanların kırılma indisleri türbülans, sıcaklık değişimi ve diğer faktörler nedeniyle sürekli olarak değişir. Bu da teleskobun odak düzlemindeki görüntünün konumunda "parıltı etkisi" olarak bilinen küçük değişikliklere yol açar. Problemin geri kalanında, yıldızın görüntüsünün kırınım sınırlı sonlu boyutunu kullanmak dışında (yukarıda kullanıldığı gibi), hiçbir girişim etkisi dikkate alınmayacaktır.

Aşağıdaki şekildeki sol panel, farklı kırılma indislerine ($n_1, n_2, n_3, \dots$) sahip çok katmanlı atmosferin dikey bir kesitini göstermektedir. Sağ panel, atmosferin ince bir dikey parçasının yakınlılaştırılmış görüntüsünü ve n_1 ve n_2 ($n_1 > n_2$) kırılma indislerine sahip en düşük iki atmosferik katman arasındaki sınırı göstermektedir. Bu problem için sadece bu iki katmanı ve sınırlarını dikkate alıyoruz. Diyagramlar ölçeklendirilmemiştir.



- (T09.2) İki katman arasındaki sınır, teleskop objektifinin hemen üzerinde, $H = 1$ km yükseklikte ve yatay düzleme göre $\theta = 30^\circ$ eğimli olsun. Bu problemin tüm bölümlerinde θ saat yönünün tersinde pozitif olarak alınmıştır. Monokromatik bir ışık kaynağı için $n_1 = 1.00027$ ve $n_2 = 1.00026$ 'dır. Zenitteki bir yıldız için teleskobun odak düzlemindeki görüntünün açılma kayması α olsun.

- (T09.2a) Sınırdaki, n_1, n_2, θ ve α 'yı gösteren, uygun şekilde etiketlenmiş bir ışın-diyagramı çizin. [2]
- (T09.2b) α 'nın θ, n_1 ve n_2 cinsinden ifadesini bulun. Küçük açı yaklaşımlarını kullanın: $\sin \alpha \approx \alpha$ ve $\cos \alpha \approx 1$. [2]
- (T09.2c) n_1 ve n_2 sabit tutularak θ %1 artarsa görüntünün konumundaki yer değiştirmeyi (Δx_θ) m cinsinden hesaplayın. [3]

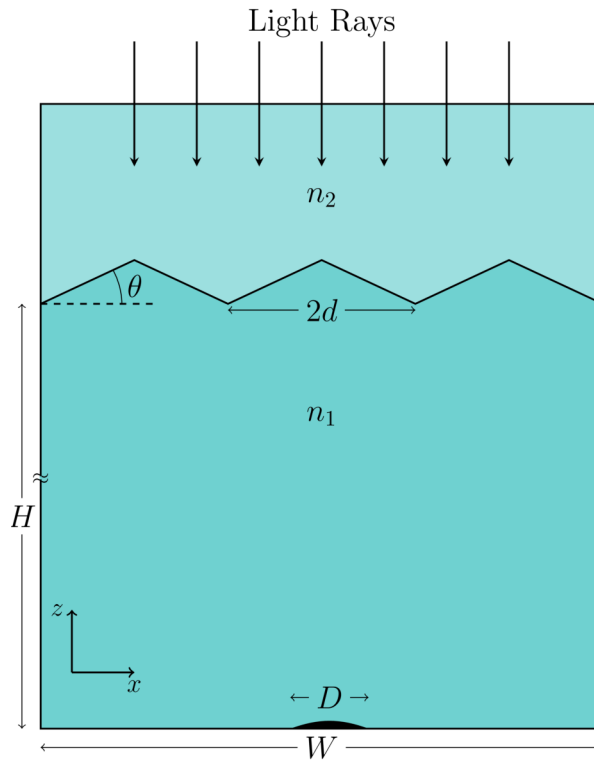
(T09.2d) n_1 ve θ sabit tutularak n_2 %0.0001 artarsa görüntünün konumundaki yer değiştirmeyi (Δx_θ) m cinsinden hesaplayın. [3]

(T09.3) Zenitteki bir yıldızdan gelen beyaz ışık için, aşağıdakilerden hangisinin görüntünün şeklini ve rengini en iyi tanımladığını Özet Cevap Kağıdındaki uygun sadece bir tane kutuyu ✓ ile işaretleyerek seçin. Şekilde x 'in soldan sağa doğru arttığına dikkat edin. [2]

	Görüntü rengi	Görüntü şekli	Sol kenar	Sağ kenar
A	Beyaz	Çembersel		
B	Beyaz	Eliptik		
C	Renkli	Çembersel	Mavi	Kırmızı
D	Renkli	Çembersel	Kırmızı	Mavi
E	Renkli	Eliptik	Mavi	Kırmızı
F	Renkli	Eliptik	Kırmızı	Mavi

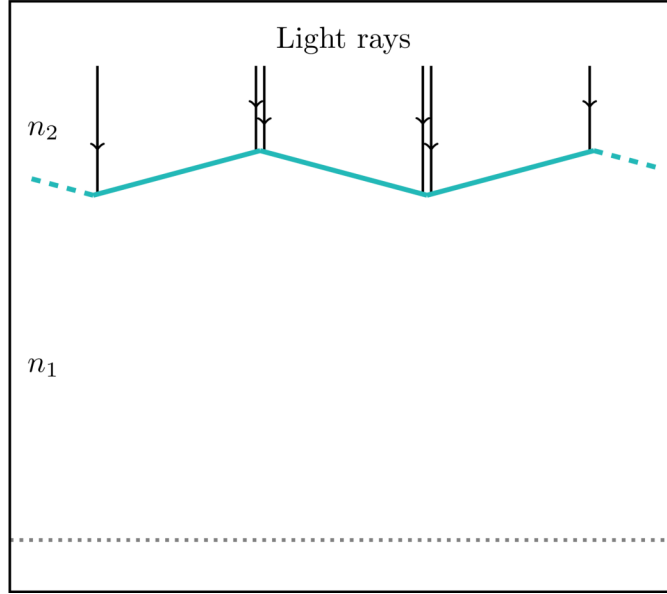
Bu sorunun geri kalan tüm kısımları için $\lambda = 550$ nm olan tek renkli yeşil ışığı dikkate alıyoruz. Katmanlar arasındaki sınırı x -ekseni boyunca $d = 10$ cm ile ayrılmış, $\theta = 10^\circ$ ya da $\theta = -10^\circ$ olan bir dizi sonsuz zikzak düzlem (sayfa düzlemine dik uzanan) olarak modelleyeceğiz.

Aşağıdaki şekil (ölçekli değil) bu atmosfer modelinin W ($W \ll H$) genişliğindeki bir kesitini göstermektedir. Geniş açıklıklı teleskoplar için sınırın bu zikzak yapısı odak düzleminde beneklerin oluşmasına neden olur.



(T09.4) Yukarıdaki gibi modellenmiş bir atmosfer düşünün.

(T09.4a) Atmosferin ardışık zikzak düzlemlere sahip bir kesiti (yukarıda belirtilen parametrelerle aynı) aşağıdaki diyagramda gösterilmiştir (ölçekli değil).



Özet Cevap Kağıdında yeniden çizilen bu diyagramda, gri noktalı çizgi ile gösterilen teleskop objektifinin yerleştirildiği düzleme kadar gelen ışık ışınlarının yollarını çizin.

Varsa, ışık ışınlarının ulaşamayacağı bölgeleri diyagramda "X" ile işaretleyin. [4]

(T09.4b) Bu tür bölge(ler)in genişliğini (W_X) hesaplayın. [3]

(T09.4c) Sınırın yapısına göre teleskobun konumunu uygun şekilde seçerek, bir yıldızın tek bir görüntüsünü elde etmenin mümkün olacağı en büyük teleskop objektif çapını, ($D_{\max}$) bulun. [4]

(T09.5) Sınırın zikzak şekline hem x hem de y yönlerinde (piramitler alanı gibi) izin verildiği ve $D = 100$ cm ve $f = 200$ cm ile olduğu durumu düşünün. [6]

Ortaya çıkan beneklerin desenini kabaca Özet Cevap Kağıdında verilen kutuya çizin.

(T09.6) Türbülanslı bir atmosfer için yine sınır tabakasının sadece x -doğrultusu boyunca paralel olarak ilerleyen aynı zikzak şeklini düşünün, ancak şimdi iki düzlem arasındaki açı 1.0 s içinde 10° 'den -10° 'ye düzgün bir oranda değişmektedir. Bunun, görüntünün konumunda düzgün bir kayma oranına yol açtığını varsayın. [5]

$D = 8$ cm ve $f = 1$ m olan bir teleskop düşünün. CCD kamera için izin verilen en uzun pozlama süresini $t_{\max}$ tahmin edin, böylece yalnızca tek bir görüntü elde edilir ve konumundaki olası herhangi bir sapma görüntünün kırınım sınırlı çapının %1'inden daha az kalır.

(T10) Büyük Patlama Nükleosentezi

[35 puan]

Erken evrende radyasyonca baskın çağda, t Büyük Patlamadan bu yana geçen süre olmak üzere, evrenin ölçek faktörü $a \propto t^{1/2}$ olarak verilir. Bu çağın büyük bir kısmında nötronlar (n) ve protonlar (p) zayıf etkileşmeler yoluyla birbirleriyle termal dengede kalırlar. Serbest nötron veya protonların sayı yoğunluğu (N) sıcaklık T ve karşılık gelen kütleleri m ile ilişkilidir. Bu durum $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV ve zaman $t \leq t_{\text{wk}} = 1.70$ s olduğu sürece geçerlidir.

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

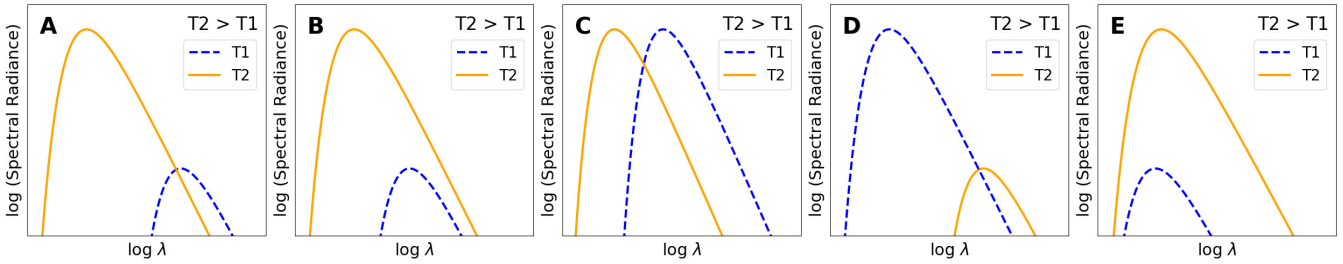
olur. t_{wk} 'den sonra, zayıf etkileşmeler artık böyle bir dengeyi koruyamaz ve serbest nötronlar 610.4 s yarılanma süresiyle protonlara bozunur.

(T10.1) Protonların sayı yoğunluğu N_p ve nötronların sayı yoğunluğu N_n olsun. t_{wk} zamanında [4]
nötronların göreceli bolluğunu $X_{n, wk} = N_n / (N_n + N_p)$ oranı ile hesaplayın.

(T10.2) Fotonlar tüm çağlarda termal dengeyi korur ve kara cisim tayfını muhafaza ederler.

(T10.2a) $T(a) \propto a^\beta$ olacak şekilde β üssünün değerini bulun. [2]

(T10.2b) Aşağıdaki grafiklerden hangisinin T_1 ve T_2 sıcaklıkları için spektral enerji [2]
yoğunluğunun doğru davranışını gösterdiğini belirleyin. Özet Cevap Kağıdında doğru
seçeneği işaretleyiniz(✓).



(T10.3) t_{wk} 'dan sonra, proton ve nötronlardan döteryum oluşum süreci, Hintli fizikçi Prof. Meghnad Saha tarafından önerilen Saha denklemi ile belirlenir ve

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

şeklinde basitleştirilebilir. Burada, baryon-foton oranı η , 6.1×10^{-10} 'dır ve N_D döteryumun sayı yoğunluğudur.

(T10.3a) Özet Cevap Kağıdındaki grafik alanına N_D/N_n oranını $k_B T = [60, 70]$ keV aralığında [5]
yer alan makul aralıklı en az 4 sıcaklık değeri için işaretleyin ve bu noktalardan geçen
düzgün bir eğri çizin.

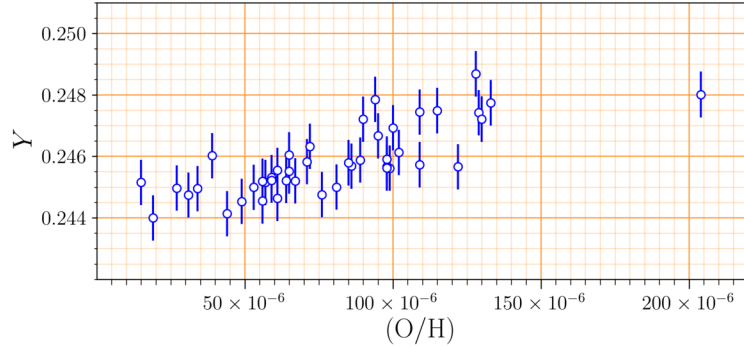
(T10.3b) Grafikten $N_D = N_n$ için $k_B T_{nuc}$ değerini (keV cinsinden) bulun. [1]

(T10.3c) Bunun yerine, şimdi tüm serbest nötronların döteryumu oluşturmak üzere protonlarla [4]
 $k_B T_{nuc}$ anında anlık olarak birleştiğini ve bunun da tamamının hemen helyuma
dönüştüğünü (${}^4_2\text{He}$) varsayın. Helyum oluşumuna karşılık gelen nükleosentez
dönemini veya zamanını, t_{nuc} (saniye cinsinden) hesaplayın.

(T10.4) t_{nuc} anından hemen önce $X_{n, nuc}$ değerini hesaplayın. [5]

(T10.5) İlkel Helyum bolluğu, Y_{prim} , evrendeki toplam baryonik kütleinin, t_{nuc} anından hemen sonra [3]
Helyum içinde bağlı olan kısmı olarak tanımlanır. Y_{prim} değerinin teorik bir tahminini elde edin.
Sadece bu hesaplama amacıyla, $m_p \approx m_n$ ve Helyum kütleinin $m_{He} \approx 4m_n$ olduğunu varsayın.

- (T10.6) Evrende yıldızlar sürekli olarak Hidrojeni Helyuma dönüştürdüğü için, Helyumun ilk bolluğunu ölçmek çok zordur. Bir galaksideki yıldızlar tarafından yapılan sentezin miktarı, galaksideki Hidrojene göre (sadece yıldızlar tarafından üretilen) Oksijenin göreceli sayı yoğunluğu, (O/H) olarak gösterilir. Farklı galaksiler için (O/H) ve Helyum bolluğu, Y , ölçümlerinin bir derlemesi aşağıda çizilmiştir.



Bu grafikteki tüm noktaları kullanarak aşağıdakileri yanıtlayın.

- (T10.6a) $(O/H)=1.75 \times 10^{-4}$ değerine sahip bir mavi kompakt cüce galaksi için Y 'yi tahmin edin. [2]
- (T10.6b) Yukarıdaki verilere uyumlayacağınız doğru çizgisinin eğimini $dY/d(O/H)$ elde edin. [2]
- (T10.6c) Yukarıdaki gözlemlere dayanarak, ilkel Helyum bolluğunu, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, hesaplayın. [2]
- (T10.7) Y_{prim} ve $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ arasındaki fark, baryon-foton oranı η değiştirilerek giderilebilir. η azaldığında, Özet Cevap Kağıdında $\downarrow$ ile gösterildiği gibi, $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} ($N_D = N_n$ olduğu zaman), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$ ve Y_{prim} artışını ($\uparrow$) veya azalışını ($\downarrow$) Özet Cevap Kağıdındaki kutulara işaretleyin. [3]

(T11) Grafikler aracılığıyla yıldızlar

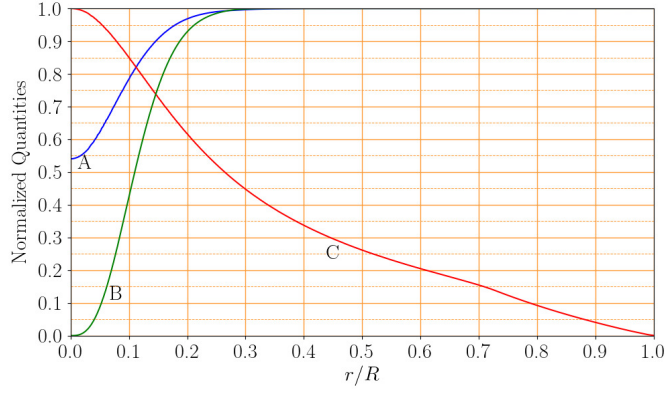
[50 puan]

Yıldızlar küresel olarak simetrik nesneler olarak iyi bir şekilde değerlendirilebilir, ve bu nedenle merkezden olan radyal mesafe r yıldızın iç yapısının modellenmesinde tek bağımsız değişken olarak seçilebilir. Yarıçapı r olan bir kürenin içerdiği kütle $m(r)$ ile gösterilir. Parlaklık $l(r)$, birim zamanda r yarıçaplı küresel bir yüzeyden dışarı doğru akan net enerji olarak tanımlanır. İlgilenilen diğer büyüklükler, örneğin yoğunluk $\rho(r)$, sıcaklık $T(r)$, hidrojen kütle oranı $X(r)$, helyum kütle oranı $Y(r)$ ve birim zamanda birim kütle başına üretilen nükleer enerji $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, r 'nin fonksiyonları olarak alınır. Bu problem boyunca yıldız içindeki elementlerin difüzyon ve kütleçekimsel çökelme etkilerini ihmal edeceğiz.

"log" sembolü 10 tabanına göre logaritma anlamına gelmektedir. Problem üç bağımsız bölümden oluşmaktadır.

(T11.1) Bölüm 1: Bir yıldızın içinde

Aşağıdaki grafik, kütlesi $1 M_{\odot}$ ve yaşı 4 GYr olan bir yıldız modelinde R yıldızın fotosferik yarıçapı olmak üzere üç yapısal niceliğin, A, B ve C, kesirsel yarıçapın r/R fonksiyonu olarak değişimini göstermektedir. Yıldızın (fotosferik) yüzeyindeki helyum kütle oranı, Y_s ve yıldızın (fotosferik) yüzeyindeki metal bolluğu (helyumdan daha ağır tüm elementlerin kütle oranı), Z_s , değerleri (Y_s, Z_s) = (0.28, 0.02) ile verilmiştir. Çizimlerde gösterilen tüm nicelikler ilgili maksimum değerlerine göre normalize edilmiştir.



(T11.1a) Beş olasılık arasından üç niceliği, A, B ve C, benzersiz bir şekilde tanımlayın: [6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Özet Cevap Kağıdında uygun niceliklerin yanındaki kutulara A/B/C yazın. Cevabınız için herhangi bir gerekçeye ihtiyaç yoktur).

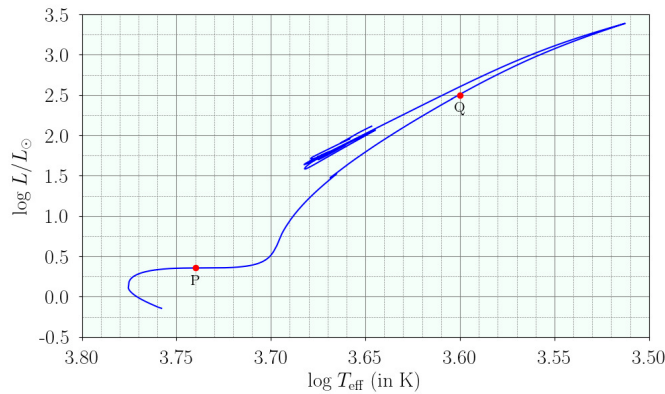
(T11.1b) Yıldızın merkezindeki helyumun kütlece kesri, Y_c , nedir? [3]

(T11.1c) (T11.1a)'da verilen beşli listeden (A, B veya C eğrileri olarak tanımlanmayan) kalan iki niceliği Özet Cevap Kağıdındaki aynı grafik üzerinde r/R 'nin fonksiyonu olarak çizin ve ilgili miktarlarına göre etiketleyin. [5]

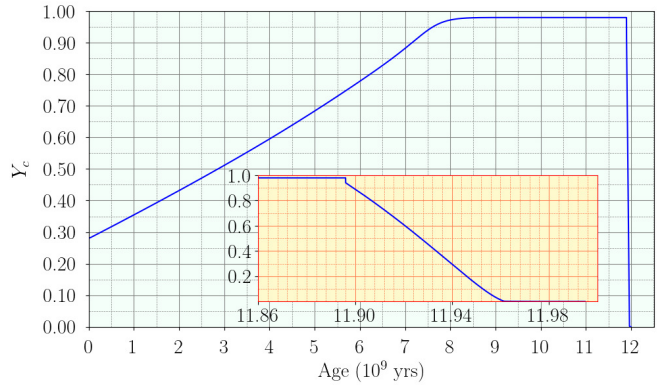
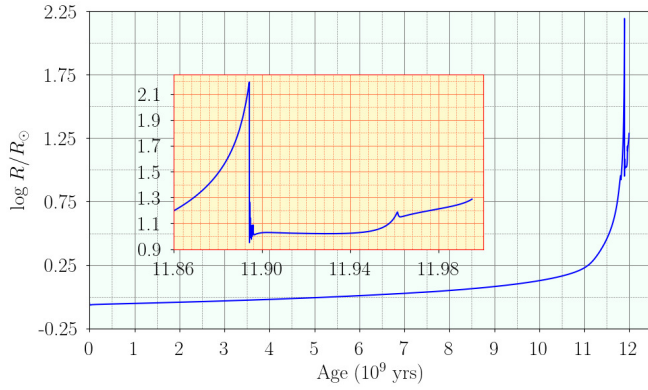
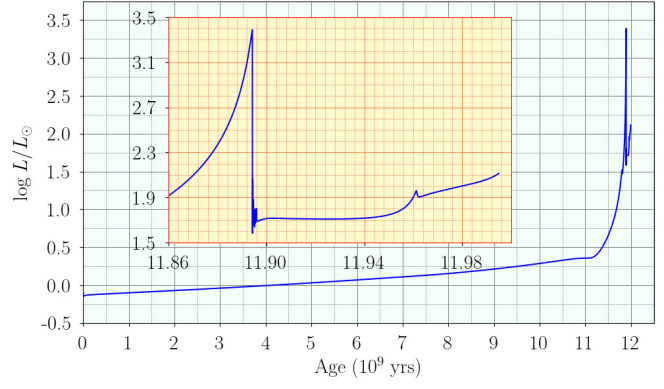
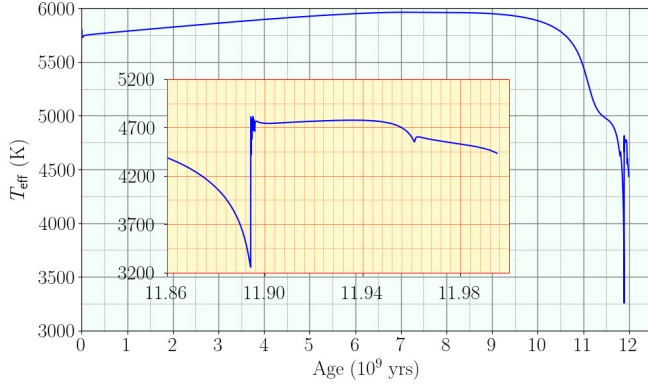
(T11.2) Bölüm 2: Evrimleşen yıldızlar

Başlangıçtaki düzgün bileşimi helyum, $Y_0 = 0.28$, ve metallerin, $Z_0 = 0.02$ kütle oranlarıyla verilen $1M_{\odot}$ kütleli bir yıldızın evrimini ele alalım. Aşağıdaki şekiller, bu yıldızın ZAMS'tan (Sıfır Yaş Anakolu) çekirdeğindeki helyum yanmasının sonuna kadar evrimleşirken farklı niceliklerinin global değişimini göstermektedir.

Aşağıdaki grafik yıldızın HR diyagramındaki evrimsel yolunu göstermektedir ($\log L/L_{\odot}$ karşın $\log T_{\text{eff}}$ grafiği, burada L yüzey ışınlıgücü ve T_{eff} etkin sıcaklıktır).



Aşağıdaki şekilde T_{eff} (K cinsinden), L ($\log L/L_{\odot}$ olarak çizilmiş), R ($\log R/R_{\odot}$ olarak çizilmiş) ve Y_c değerlerinin aynı yıldızın yaşıyla (10^9 yıl cinsinden) değişimini gösteren dört grafik bulunmaktadır. Bu dört grafiğin her birinde, daha fazla ayrıntı için, küçük grafikler 11.86×10^9 yıl ile 12.00×10^9 yıl arasındaki yaşlar için ilgili niceliklerin değişimlerini ayrıntılı olarak göstermektedir.



Aşağıdaki soruları yanıtlamak için bu grafikleri kullanın.

- (T11.2a) Yıldızın yaklaşık anakol ömrü t_{MS} (yıl cinsinden) nedir? [1]
- (T11.2b) Yıldızın çekirdeğinde helyum yakıtı yaklaşık süre, Δt_{He} (yıl cinsinden) nedir? [1]
- (T11.2c) Yıldızın parlaklığı $1 L_{\odot}$ olduğunda, merkezindeki başlangıç hidrojen miktarının ne kadarı f_H yanmıştır? [3]
- (T11.2d) Merkezindeki başlangıç hidrojen miktarının 60%'ı yakıldığında yıldızın yarıçapı R_1 ($R_{\odot}$ cinsinden) ne olur? [3]
- (T11.2e) HR - diyagramında işaretlendiği gibi, yıldızın sırasıyla P ve Q konumlarına karşılık gelen yarıçapları R_P ve R_Q ($R_{\odot}$ cinsinden) nedir? [4]

(T11.3) **Bölüm 3: Bir yıldızın içindeki kütle dağılımı**

Bir yıldızın içindeki kütle dağılımını yöneten denklem şu şekilde verilir:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Bu denklemi üç boyutsuz değişken cinsinden ifade etmek uygun olacaktır: kesirsel kütle, q , kesirsel yarıçap, x , ve

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

olarak tanımladığımız göreceli yoğunluk, σ , burada M ve R sırasıyla yıldızın toplam kütlesi ve yarıçapıdır, ve $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ yıldızın ortalama yoğunluğudur. Bu bölümde ele alacağımız belirli bir yıldız için aşağıdaki bilgiler verilmiştir:

- Merkezi yoğunluk $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$ 'dur.
- Yıldızın kütesinin yarısı toplam yarıçapının %25'lik iç kısmında, kütesinin %70'i ise toplam yarıçapının %35'lik iç kısmında yer almaktadır.

Bu sorunun sonraki tüm bölümlerinde, türetilen tüm sayısal katsayıları 0.005 içinde yuvarlamak yeterli olacaktır.

- (T11.3a) Kütlenin yarıçapa bağımlılığını tanımlayan yukarıdaki denklemi x , $\frac{dq(x)}{dx}$ ve $\sigma(x)$ [2]
cinsinden ifade edin.

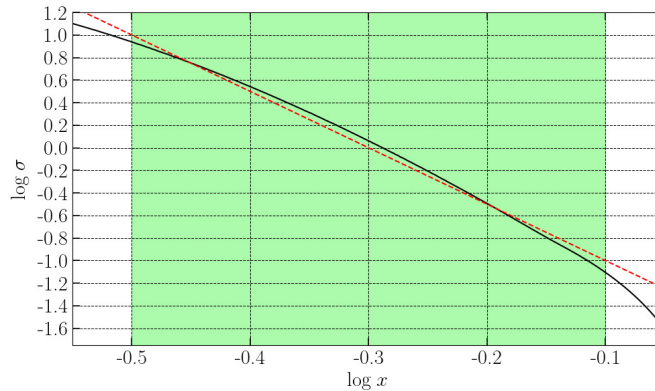
Kütlenin yarıçapla dağılımını elde etmek için yıldızın içindeki yoğunluk profilini bilmemiz gerekir. Bu problemin amacı doğrultusunda, yoğunluğun yarıçapla değişimini x 'in iki alanında yaklaşık formlarla tanımlayacağız:

- yıldızın iç kısmı: $0 \leq x \leq 0.32$
- yıldızın orta kısmı: $0.32 < x < 0.80$

En dış kısım için herhangi bir yaklaşım yapmıyoruz, örneğin $0.80 \leq x \leq 1.00$.

- (T11.3b) **Orta kısım için yaklaşım:**

Yıldızın orta kısmında $\log x$ 'in bir fonksiyonu olarak $\log \sigma$ 'nın değişimi aşağıdaki grafikte (siyah eğri ile) gösterilmiştir. $-0.5 < \log x < -0.1$ alanında $\log x$ 'in bir fonksiyonu olarak $\log \sigma$ için doğrusal bir yaklaşım yapacağız (grafikte kesikli kırmızı çizgi olarak gösterilmiştir), yani $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (yeşil gölgeli alan ile gösterilmiştir). Ayrıca, bu doğrunun eğimini en yakın tamsayıya yaklaştıracğız.



Bu yaklaşımı kullanarak $0.32 < x < 0.80$ alanında x 'in bir fonksiyonu olarak $\sigma(x)$ [4]
için bir ifade yazınız.

- (T11.3c) (T11.3b) sonucunu kullanarak $0.32 < x < 0.80$ alanında $q(x)$ için bir ifade türetiniz. [6]

- (T11.3d) **İç kısım için yaklaşım:**

Yıldızın iç kısmında ($0 \leq x \leq 0.32$), yoğunluk yarıçapın doğrusal bir fonksiyonu [8]
olarak yaklaşılabılır, yani $\sigma(x) = Ax + B$, burada A, B sabitlerdir. A ve B
değerlerini belirleyin ve böylece $0 \leq x \leq 0.32$ alanında $q(x)$ için bir ifade elde edin.
Önceki bölümde ve bu bölümde benimsenen yaklaşımların $x = 0.32$ 'de yoğunluk
veya kütlede küçük süreksizliklere yol açabileceğini unutmayın.

- (T11.3e) (T11.3c) ve (T11.3d) bölümlerinde elde edilen $q(x)$ ifadeleri, kütleinin yarıçapla değişimini oldukça iyi tanımlayan, ancak yalnızca yıldızın belirli bölgelerinde geçerli olan yaklaşımlardır. (Herhangi bir ifade türetmediğimiz) $0.80 \leq x \leq 1$ alanı için, komşu bölgeden uygun ekstrapolasyon kullanmak mümkündür. Bu yaklaşık ifadeleri ve verilen verileri kullanarak tüm yıldız için ($0 \leq x \leq 1$) $q(x)$ karşın x için kütleinin yarıçapla değişimini temsil eden düzgün bir eğri çizin ($q(x)$ veya türevinde herhangi bir süreksizlik olmadan). [4]

(T12) Karadeliklerdeki Hawking Işınımı

[50 puan]

- (T12.1) Bir karadelik (BH), tipik olarak, yaşam döngüsünün sonunda büyük bir yıldızın çekimsel çöküşü ile tekillik olarak adlandırılan bir noktada oluşur. Böylesine güçlü bir kütleçekime sahip bir cisimde, olay ufkuna ($r = R_{SC}$ olan küresel bir yüzey; burada r tekillikten olan mesafedir) giren hiçbir şey dışarı çıkamaz. Burada, R_{SC} Schwarzschild yarıçapı olarak adlandırılır.

- (T12.1a) **Hawking ışıınının kökenini modelleme:** BH ufkunun her iki tarafında üretilen, her biri m kütleine sahip bir çift parçacığı düşünün. Bir parçacık ufkun biraz dışında, $r \approx R_{SC}$ konumunda, diğer parçacık ise ufkun içinde, $r = \kappa R_{SC}$ konumundadır. Bir parçacığın toplam enerjisinin, durgun kütle enerjisi mc^2 ile BH nedeniyle oluşan kütleçekimsel potansiyel enerjisinin toplamı olduğunu varsayın.

Parçacık çiftinin toplam enerjisinin sıfır olduğu κ değerini belirleyin.

[4]

- (T12.1b) **Bir karadelğin sıcaklığı:** Yukarıdaki süreçte ufuk dışında üretilen parçacık yeterli kinetik enerjiye sahipse Hawking ışıınını olarak adlandırılan süreç ile karadelikten kaçabilir. Ufuk içindeki negatif enerjiye sahip parçacık ise soğrulur ve karadelğin kütleini azaltır.

Tüm Hawking ışıınının, dalgaboyu $\lambda_{bb} \approx 16R_{SC}$ olan bir kara cisim tayfına sahip fotonlardan oluştuğunu varsayın. $1 M_{\odot}$ kütleindeki karadelik için $R_{SC, \odot} = 2.952$ km olduğu bilinmektedir.

Bu kara cisim ışıınınına karşılık gelen karadelğin sıcaklığı (T_{bh}) için kütle (M_{bh}) ve fiziksel sabitler cinsinden bir ifade elde edin. $10 M_{\odot}$ kütleli bir karadelik için Schwarzschild yarıçapını ($R_{SC, 10\odot}$) ve sıcaklığı ($T_{bh, 10\odot}$) hesaplayın. [4]

- (T12.1c) **Karadelğin kütle kaybı:** Hawking ışıınının olay ufkundan dışarı yayınlandığını varsayın.

Kütle-enerji eşdeğerliğini kullanarak BH'nin kütle ($M_{bh}(t)$) ve fiziksel sabitler cinsinden kütle kayıp oranı ($dM_{bh}(t)/dt$) için bir ifade elde edin.

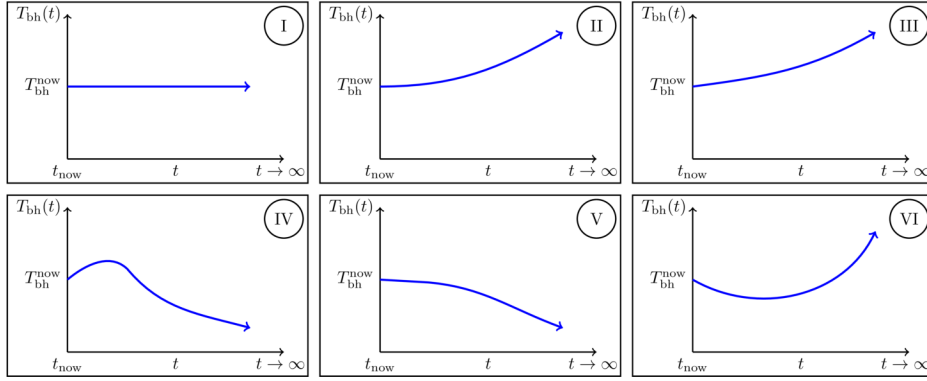
Buna bağlı olarak, başlangıç kütle M_0 olan bir BH için $M_{bh}(t)$ ifadesini elde edin. $M_{bh} = M_0$ 'dan $M_{bh} = 0$ 'a kadar $M_{bh}(t)$ 'yi t 'nin bir fonksiyonu olarak çizin. [8]

- (T12.1d) **Bir karadelğin ömrü:** Başlangıç kütle M_0 olan bir karadelğin Hawking ışıınını nedeniyle tamamen buharlaştığı ömrü, τ_{BH} ifadesini, M_0 ve fiziksel sabitler cinsinden elde edin. $\tau_{bh, 10\odot}$ ömrünü $M_0 = 10 M_{\odot}$ olan bir karadelik için saniye cinsinden hesaplayın. [3]

- (T12.1e) **CMB ışıınını banyosunda karadelik:** Uzayda, diğer cisimlerden uzakta, şu anki sıcaklığı T_{bh}^{now} olan izole bir karadelği, şu anki sıcaklığı $T_{cmb}^{now} = 2.7$ K olan kozmik mikrodalga ardalan (CMB) ile çevrili olarak düşünün. Karadelik, CMB ışıınınını soğurarak kütleini artırabilir ve Hawking ışıınını ile kütleini kaybedebilir.

Evrenin ivmelenen genişlemesini dikkate alarak, aşağıdaki üç durum için T_{bh} 'nin uzun vadeli zamansal evrimini gösteren şekilleri belirleyin:

(X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



X, Y veya Z durumu için uygun şekil numarasına karşılık gelen cevabınızı Özet Cevap [6] Kağıdındaki kutuyu (tek birini) işaretleyerek belirtin .

(T12.2) Çok daha küçük kütlelere sahip ilkel kara delikler (PBH'ler) çok erken evrende oluşabilir. Aşağıdaki tüm sorular PBH'lerle ilgilidir. Burada, karadelikğin kütlesini artıran herhangi bir süreç göz ardı edilebilir.

(T12.2a) **PBH'nin günümüzdeki çağda buharlaşması:** Önceki soruların cevaplarından da fark etmiş olabileceğiniz gibi, Güneş kütleli karadeliklerin buharlaşması uzun zaman alır. Ancak, PBH'ler çok daha küçük bir kütleyle sahip olabileceğinden, onları günümüzde buharlaşırken görebiliriz.

Günümüz çağında tamamen buharlaşmakta olabilecek bir karadelikğin başlangıç [4] kütlesini $M_{0, \text{PBH}}$ (kg cinsinden), Schwarzschild yarıçapını $R_{\text{SC, PBH}}$ (m cinsinden) ve sıcaklığını T_{PBH} (K cinsinden) bulun, yani ömrü $\tau_{\text{PBH}} = 14$ milyar yıl olanlar.

(T12.2b) **PBH'nin Oluşumu:** Radyasyonca baskın erken evrende, ölçek faktörü $a(t) \sim t^{1/2}$ olarak değişir. Bu dönemde, PBH'ler, fiziksel boyutu ct olan bir bölgedeki tüm enerjinin çökmesiyle oluşur, burada t o zamanki evrenin yaşıdır.

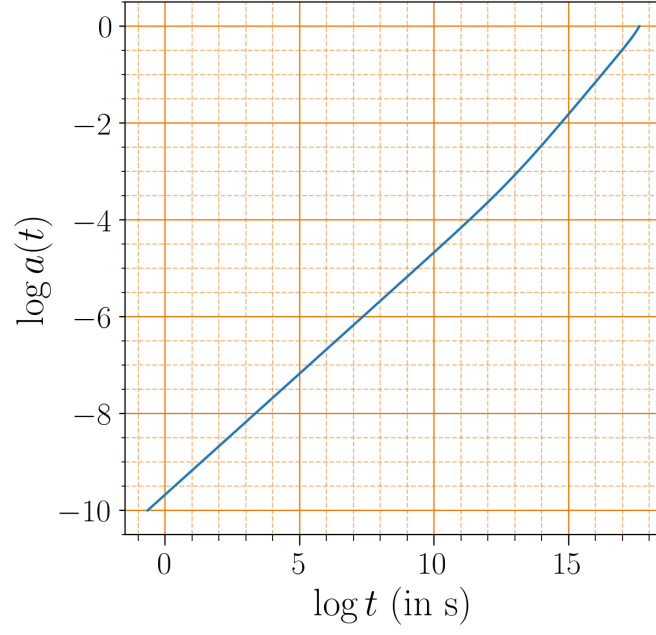
1×10^{12} kg kütleli bir PBH, evrenin yaşı yaklaşık 1×10^{-23} s olduğunda oluşur. [6]
 1×10^{20} kg kütleli bir PBH'nin oluştuğu evrenin yaşı t_{20} 'yi hesaplayın.

(T12.2c) **PBH'den Hawking radyasyonunun gözlenen spektrumu:** Başlangıç kütlesi 1×10^{10} kg olan ve ömrünün sonunda tamamen buharlaşan bir PBH düşünün τ_{PBH} . Bu bölüm için, basitlik adına, Hawking radyasyonunun çoğunun bu zamanda yayınlandığını ve başlangıç kütlesine karşılık gelen bir sıcaklığa sahip olduğunu varsayın. Ayrıca, evrenin ölçek faktörünün $a(t) \sim t^{2/3}$ olarak evrildiğini kabul edin.

Bu Hawking radyasyonunun Dünya'da gözlemlenen tepe dalgaboyunu, λ_{earth} , [5] günümüzdeki çağ için ($t = 14$ milyar yıl) hesaplayın.

(T12.2d) **PBH'den yüksek enerjili kozmik radyasyon:** Şimdi, belirli bir zamanda, t , yayınlanan Hawking ışınımının, $k_B T_{\text{bh}}(t)$ gibi bir enerjiye sahip fotonlara karşılık geldiğini varsayalım. Ayrıca, bir karadelik için mümkün olan en yüksek sıcaklık, Planck sıcaklığıdır: T_{Planck} burada $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Ölçek faktörünün ilgili zaman ölçekleri boyunca evrimi aşağıdaki şekilde verilmiştir. Günümüzdeki ölçek faktörü bir olarak ayarlanmıştır. Zaman eksenindeki $t(s)$ evrenin yaşını saniye cinsinden temsil eder.



Eğer Dünya'da $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$ eV enerjili bir foton gözlenirse, bu fotondan [10]
sorumlu olabilecek PBH'nin başlangıç kütesinin en büyük ve en küçük olası
değerlerini belirleyin (M_0^{max} ve M_0^{min} , sırasıyla).