

(T03) คลื่นความโน้มถ่วง
[15 คะแนน]

หลุมดำคู่ที่โคจรรอบกันจะสร้างคลื่นความโน้มถ่วง พิจารณาหลุมดำสองหลุมในกาแล็กซีของเรา โดยมีมวล $M = 36 M_{\odot}$ และ $m = 29 M_{\odot}$ ซึ่งโคจรในวงโคจรเป็นวงกลมรอบจุดศูนย์กลางมวลของระบบ

(T03.1) โดยสมมติความโน้มถ่วงของนิวตัน จงหาความถี่เชิงมุม ω_{ini} ของวงโคจรของหลุมดำ ณ เวลา t_{ini} เมื่อระยะห่างระหว่างหลุมดำเท่ากับ 4.0 เท่าของผลรวมของรัศมีชวาร์ตชิลด์ของพวกมัน โดยเขียนคำตอบในรูปของ M , m , และค่าคงตัวทางฟิสิกส์เท่านั้น

จงคำนวณค่าของ ω_{ini} (ในหน่วย rad s^{-1}).

[5]

(T03.2) ในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป หลุมดำที่โคจรรอบกันจะปล่อยคลื่นความโน้มถ่วงที่มีความถี่ f_{GW} โดยที่ $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$ สิ่งนี้ทำให้วงโคจรของหลุมดำหดตัว ซึ่งส่งผลให้ f_{GW} เพิ่มขึ้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f_{GW} คือ

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

โดยที่ $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ เรียกว่า “มวลเชิร์ป (chirp mass)”

จงหาค่าของ α , β และ δ

[4]

(T03.3) สมมติว่าคลื่นความโน้มถ่วงที่เกี่ยวข้องกับเหตุการณ์นี้ถูกตรวจพบครั้งแรกที่เวลา $t_{\text{ini}} = 0$

[6]

จงหาเวลาที่สังเกตเห็นการรวมตัวของหลุมดำ t_{merge} เมื่อ f_{GW} มีค่ามาก ๆ โดยเขียนคำตอบในรูปของ ω_{ini} , M_{chirp} , และค่าคงตัวทางฟิสิกส์
จงคำนวณค่าของ t_{merge} (ในหน่วยวินาที).