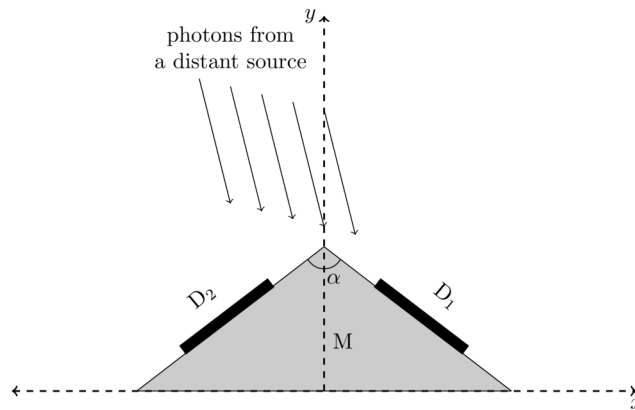


(T01) โครงการดักขา (Daksha Mission)
[10 คะแนน]

“ดักขา (Daksha)” เป็นโครงการของอินเดีย ซึ่งประกอบด้วยดาวเทียมสองดวง S_1 และ S_2 ที่โคจรรอบโลกในวงโคจรเดียวกัน ซึ่งเป็นวงโคจรวงกลมที่มีรัศมี $r = 7000$ กิโลเมตร การโคจรของดาวเทียมทั้งสองมีเฟสต่างกัน 180° ดาวเทียมเหล่านี้สังเกตการณ์จักรวาลในช่วงพลังงานสูง (รังสีเอกซ์และรังสี γ) ดาวเทียมแต่ละดวงของ Daksha ใช้เครื่องตรวจจับที่มีรูปร่างแบนและเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหลายตัว

เพื่อทำความเข้าใจวิธีการระบุตำแหน่งแหล่งกำเนิดบนท้องฟ้า เราจะใช้แบบจำลองง่าย ๆ ของโครงการ Daksha สมมติว่า S_1 มีเครื่องตรวจจับ (detector) เหมือนกันเพียงสองเครื่อง D_1 และ D_2 โดยแต่ละเครื่องมีพื้นที่ $A = 0.50$ ตารางเมตร ติดตั้งอยู่บนฐานที่ราบแสง M ดังแสดงในรูปด้านล่าง เครื่องตรวจจับทั้งสองวางอยู่อย่างสมมาตรเทียบกับแกน y โดยอยู่ในระนาบที่ตั้งฉากกับระนาบ $x - y$ และทำมุม $\alpha = 120^\circ$ ซี่งกันและกัน



- (T01.1) เมื่อสังเกตแหล่งกำเนิดที่อยู่ห่างไกลที่ตั้งอยู่ในระนาบ $x - y$ เครื่องตรวจจับ D_1 บันทึกค่ากำลังเป็น $P_1 = 2.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$ และเครื่องตรวจจับ D_2 บันทึกค่ากำลังเป็น $P_2 = 4.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$

จงประมาณค่ามุม η ที่เวกเตอร์ตำแหน่งของแหล่งกำเนิดทำกับแกน y ด้านบวก โดยมุมที่วัดทวนเข็มนาฬิกาถือว่ามีค่าเป็นบวก **[5]**

พิจารณาพัลส์เดี่ยว (single pulse) จากแหล่งกำเนิดที่อยู่ห่างไกล (ซึ่งไม่จำเป็นต้องอยู่ในระนาบ $x - y$) ที่บันทึกโดยดาวเทียมทั้งสองดวง (S_1 และ S_2) ของ Daksha เวลา ณ จุดสูงสุด (peak) ของพัลส์ที่บันทึกโดย S_1 และ S_2 คือ t_1 และ t_2 ตามลำดับ

- (T01.2) ถ้าวัด $t_1 - t_2$ ได้เป็น $10.0 \pm 0.1 \text{ ms}$ แล้ว จงหาเศษส่วนท้องฟ้า (fraction of the sky, f) ที่อาจมีแหล่งกำเนิดแสงอยู่ **[5]**

(T02) มกรสงกรานต์ (Makar-Sankranti)
[10 คะแนน]

เทศกาลเฉลิมฉลองมกรสงกรานต์ในประเทศอินเดียมีขึ้นเมื่อดวงอาทิตย์ปรากฏเข้าสู่เขตจักรราศีมกร (มกร = ราศีมกร, สงกรานต์ = การข้าม) ในปีปัจจุบัน เทศกาลนี้จะถูกจัดประมาณวันที่ 14 มกราคมของทุกปี เมื่อหลายปีก่อนเทศกาลนี้ถูกจัดตรงกับวันเพ็ญ (Winter Solstice) ในซีกโลกเหนือซึ่งตรงกับวันที่ 21 ธันวาคม

- (T02.1) จากข้อมูลข้างต้น จงหาว่าปีล่าสุด y_c ที่การเฉลิมฉลองในเทศกาลนี้ถูกจัดขึ้นในวันเพ็ญ (Winter Solstice) ของซีกโลกเหนือพอดีคือปีใด **[3]**

(T02.2) หากดวงอาทิตย์เข้าสู่เขตราศีเมษเมื่อวันที่ 14 มกราคม 2006 ตามเวลาท้องถิ่น 11:50:13 น. ที่ นครมุมไบ จงคำนวณวันที่ D_{enter} และเวลาท้องถิ่น t_{enter} ที่ดวงอาทิตย์เข้าสู่ราศีเมษในปี 2013 [3]

(T02.3) ณ สถานที่หนึ่ง การทดลองเทศกาลมกรสงกรานต์จะจัดขึ้นในวันที่ดวงอาทิตย์ตกครั้งแรกเมื่อเข้าสู่เขตราศีเมษไปแล้ว โดยให้ถือว่า ณ นครมุมไบ ในเดือนมกราคม เวลาที่ดวงอาทิตย์ตกจะตรงกับเวลาท้องถิ่น 18:30:00 น.

จงระบุวันที่มีการทดลองเทศกาลนี้ในระหว่างปี 2006 ถึง 2013 โดยทำเครื่องหมายถูก ✓ ในช่องที่ตรง กับวันดังกล่าว ลงในตารางที่ให้ไว้ในกระดาษสรุปคำตอบ [4]

(T03) คลื่นความโน้มถ่วง (Gravitational Waves)

[15 คะแนน]

หลุมดำคู่ที่โคจรรอบกันจะสร้างคลื่นความโน้มถ่วง พิจารณาหลุมดำสองดวงในกาแล็กซีของเรา ซึ่งมีมวล $M = 36 M_{\odot}$ และ $m = 29 M_{\odot}$ และโคจรในวงโคจรที่เป็นวงกลมด้วยความถี่เชิงมุม ω รอบจุดศูนย์กลางมวลของระบบ

(T03.1) โดยสมมติความโน้มถ่วงของนิวตัน จงหาความถี่เชิงมุม ω_{ini} ของวงโคจรของหลุมดำ ณ เวลา t_{ini} เมื่อระยะห่างระหว่างหลุมดำเท่ากับ 4.0 เท่าของผลรวมของรัศมีชวาร์ตชิลด์ของหลุมดำทั้งสอง โดยเขียนคำตอบในรูปของ M , m , และค่าคงตัวทางฟิสิกส์เท่านั้น

จงคำนวณค่าของ ω_{ini} (ในหน่วย rad s^{-1})

[5]

(T03.2) ในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป หลุมดำที่โคจรรอบกันจะปล่อยคลื่นความโน้มถ่วงที่มีความถี่ f_{GW} โดยที่ $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$ กระบวนการนี้ทำให้วงโคจรของหลุมดำหดตัว ซึ่งส่งผลให้ f_{GW} เพิ่มขึ้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f_{GW} คือ

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3}$$

เมื่อ $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ เรียกว่า “มวลเชิร์ป (chirp mass)”

จงหาค่าของ α , β , และ δ

[4]

(T03.3) สมมติว่าคลื่นความโน้มถ่วงที่เกี่ยวข้องกับเหตุการณ์นี้ถูกตรวจพบครั้งแรกที่เวลา $t_{\text{ini}} = 0$

[6]

จงหาเวลาที่สังเกตเห็นการรวมตัวของหลุมดำ t_{merge} เมื่อ f_{GW} มีค่ามาก ๆ โดยเขียนคำตอบในรูปของ ω_{ini} , M_{chirp} , และค่าคงตัวทางฟิสิกส์
จงคำนวณค่าของ t_{merge} (ในหน่วยวินาที)

(T04) การลดความสว่างของอนุกรมบัลเมอร์ (Balmer Decrement)

[15 คะแนน]

พิจารณาดาวฤกษ์ในแถบลำดับหลักที่มีเนบิวลาล้อมรอบ ดาวฤกษ์มีโชติมาตรปรากฏในแถบ V เท่ากับ 11.315 แมกนิจูด บริเวณที่มีการแตกตัวเป็นไอออน (ionized region) ของเนบิวลาใกล้กับดาวฤกษ์เปล่งแสงในเส้นสเปกตรัม $H\alpha$ และ $H\beta$ ซึ่งมีความยาวคลื่น 0.6563 μm และ 0.4861 μm ตามลำดับ อัตราส่วนของฟลักซ์ระหว่าง $H\alpha$ ต่อ $H\beta$ ที่ทำนายตามทฤษฎีคือ $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2.86$ อย่างไรก็ตาม เมื่อแสงนี้ผ่านส่วนนอกของเนบิวลาที่เย็นและมีฝุ่น ฟลักซ์

การเปล่งแสง (emission flux) ที่สังเกตได้ของเส้นสเปกตรัม $H\alpha$ และ $H\beta$ คือ $6.80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ และ $1.06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ ตามลำดับ

ค่าการดูดกลืนแสง (extinction) A_λ เป็นฟังก์ชันของความยาวคลื่นและแสดงในรูปแบบ

$$A_\lambda = \kappa(\lambda)E(B - V)$$

ในที่นี้ $\kappa(\lambda)$ คือเส้นโค้งการดูดกลืนแสง (extinction curve) และ $E(B - V)$ แสดงถึงค่าส่วนเกินของสี (color excess) ในแถบตัวกรอง B และ V สมการเส้นโค้งการดูดกลืนแสง (โดยที่ λ มีหน่วยเป็น μm) มีดังนี้

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V & \text{ถ้า } 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V & \text{ถ้า } 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

เมื่อ $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ คืออัตราส่วนของการดูดกลืนแสงรวมต่อการดูดกลืนแสงในช่วงที่เลือกไว้ (ratio of total-to-selective extinction)

(T04.1) จงหาค่าของ $\kappa(H\alpha)$ และ $\kappa(H\beta)$ [3]

(T04.2) จงหาค่าของอัตราส่วนของค่าส่วนเกินของสี $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$ [4]

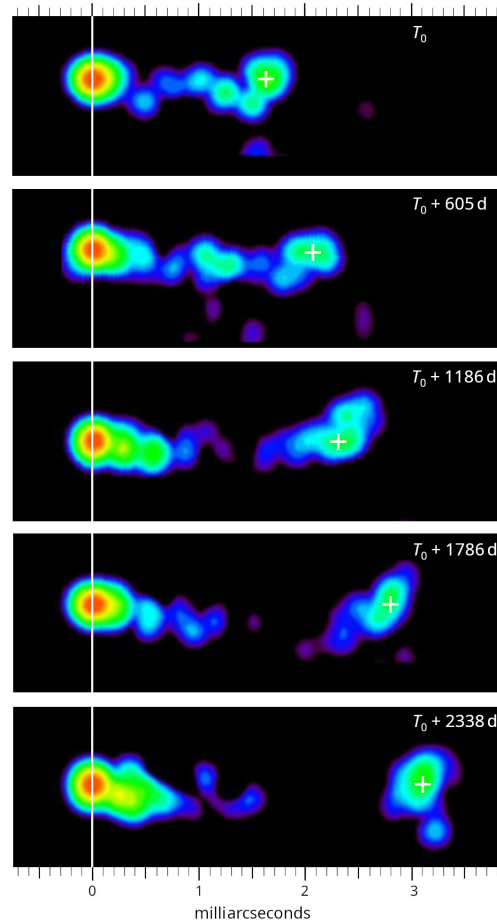
(T04.3) จงประมาณค่าการดูดกลืนแสงเนื่องจากเนบิวลา $A_{H\alpha}$ และ $A_{H\beta}$ ที่ความยาวคลื่น $H\alpha$ และ $H\beta$ ตามลำดับ [6]

(T04.4) จงประมาณค่าการดูดกลืนแสงของเนบิวลา (A_V) และโชติมาตรปรากฏ m_{V0} ของดาวฤกษ์ในแถบ V ในกรณีที่ไม่มีเนบิวลา [2]

(T05) เควซาร์ (Quasars)

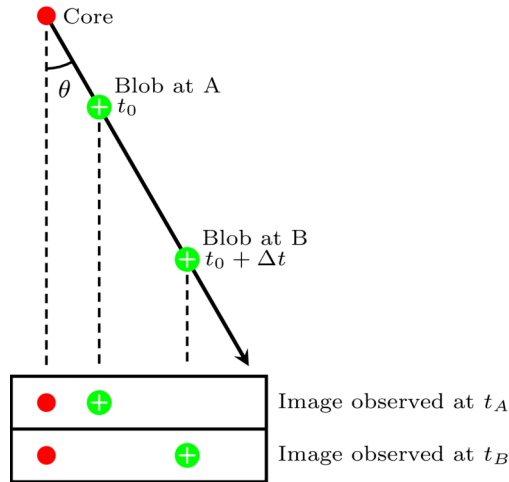
[20 คะแนน]

เควซาร์เป็นกาแล็กซีที่มีความสว่างสูงมากซึ่งขับเคลื่อนโดยหลุมดำที่มีมวลเยอะมาก โดยเควซาร์จะปล่อยกระแสเจ็ต (jet) ที่เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วใกล้เคียงแสง แผงรูปภาพด้านล่างแสดงภาพในช่วงความยาวคลื่นวิทยุของเควซาร์ ที่มีการเลื่อนทางแดง (redshift) เป็น $z = 0.53$ ณ เวลาต่าง ๆ โดยมีระยะทางแบบวัดจากแสง (luminosity distance) เป็น $D_L = 1.00 \times 10^{10} \text{ ly}$ “แกนกลาง (core)” ของเควซาร์อยู่ในแนวเดียวกับเส้นสีขาวแนวตั้ง ในขณะที่กระแสเจ็ตซึ่งประกอบด้วย “ก้อนมวล (blob)” (ซึ่งทำเครื่องหมายด้วยเครื่องหมายบวก + สีขาว) เคลื่อนออกจากแกนกลางเมื่อเวลาผ่านไป ภาพของเควซาร์แต่ละภาพแสดงเวลาสังเกตการณ์ (ซึ่งเริ่มต้น ณ เวลา T_0 ในภาพแรก) และมาตราส่วนเชิงมุม (angular scale) ซึ่งกำกับไว้ที่ด้านบนและด้านล่างของแผงรูปภาพนี้



- (T05.1) สำหรับการสังเกตแต่ละครั้ง จงหาขนาดของระยะทางเชิงมุม ϕ_{blob} ระหว่างก้อนมวลและแกนกลางของควอซาร์ในหน่วยฟิลิปดา (milliarcsecond) และระยะทางในแนวตั้งฉากกับแนวเล็ง (transverse distance, l_{blob}) ระหว่างก้อนมวลและแกนกลางของควอซาร์ในหน่วยปีแสง (light-year) หลังจากนั้น ให้คำนวณความเร็วปรากฏของก้อนมวลในทิศทางตั้งฉากกับแนวเล็ง (v_{app}) โดยตอบเป็นเศษส่วนของอัตราเร็วแสง $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ จากการใช้ข้อมูลที่ได้รับการสังเกตการณ์ถัดจากกัน หลังจากนั้น ให้คำนวณความเร็วปรากฏ $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ ที่เป็นค่าเฉลี่ยจากการสังเกตการณ์ทั้งหมด [5]

กระแสเจ็ทจากควอซาร์เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วใกล้อัตราเร็วของแสง $v \equiv \beta c$ แต่ไม่จำเป็นต้องอยู่ในระนาบของท้องฟ้า (plane of the sky) เช่น กระแสเจ็ททำมุม ("มุมเบน") เท่ากับ θ กับแนวเล็งของผู้สังเกตการณ์ที่อยู่ไกล ดังที่แสดงในภาพร่างด้านล่าง
สำหรับข้อย่อยนี้ของโจทย์และข้อย่อยอื่น ๆ ที่ตามมา ให้ละเว้นการใช้การเลื่อนทางแดง (redshift) ของควอซาร์ และละเว้นการคำนึงถึงผลจากทฤษฎีสัมพัทธภาพ (relativistic effect)



(T05.2) แสงที่ถูกปล่อยออกมาจากก้อนมวลในสองเวลาที่ต่างกัน t_0 (ซึ่งสอดคล้องกับตำแหน่ง A) และ $t_0 + \Delta t$ (ซึ่งสอดคล้องกับตำแหน่ง B) มาถึงผู้สังเกตการณ์ที่ t_A และ t_B ตามลำดับ ดังนั้น ช่วงเวลาระหว่างการสังเกตการณ์คือ $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

(T05.2a) จงเขียนอัตราส่วน $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ ในรูปของ β และ θ [2]

(T05.2b) โดยใช้อัตราส่วนข้างต้น จงเขียน β_{app} ในรูปของ β และ θ [2]

(T05.3) การเคลื่อนที่จะเรียกว่าเป็นแบบเสมือนเร็วกว่าแสง (superluminal) หากอัตราเร็วปรากฏมีค่าเกินกว่าอัตราเร็วของแสง ($\beta_{\text{app}} > 1$) และจะเรียกว่าเป็นแบบเสมือนช้ากว่าแสง (subluminal) หากอัตราเร็วปรากฏมีค่าต่ำกว่าอัตราเร็วของแสง ($\beta_{\text{app}} < 1$)

(T05.3a) สำหรับ $\beta_{\text{app}} = 1$ จงวาดกราฟเส้นโค้งของ β เมื่อพิจารณาให้เป็นฟังก์ชันของ θ เพื่อกำหนดขอบเขตระหว่างเคลื่อนที่แบบ subluminal และแบบ superluminal ให้ระบายสีอาณาบริเวณในกราฟที่สอดคล้องกับการเคลื่อนที่แบบ superluminal โดยใช้เส้นเฉียง (///) [4]

(T05.3b) จงหาอัตราเร็วต่ำสุดของกระแสเจ็ท ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$) ที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่แบบ superluminal พร้อมทั้งหามุมเบน θ_{low} ที่กระแสเจ็ททำกับแนวเล็ง (orientation angle) ที่สอดคล้องกับอัตราเร็วนี้ [2]

(T05.4) จงเขียนนิพจน์ (expression) สำหรับค่ามากที่สุดของมุมเบน θ_{max} ซึ่งทำให้แต่ละค่า β_{app} ใด ๆ ที่กำหนดให้เป็นไปได้ [2]

แกนกลางของควาร์ก ซึ่งเป็นวัตถุที่มีความหนาแน่นสูง (compact object) สามารถแปรเปลี่ยนความสว่างเนื่องจากกระบวนการภายในที่เกิดขึ้นภายในบริเวณที่เชื่อมโยงกันเชิงเหตุผล (causally connected region) ขนาด (= รัศมี) ของบริเวณนี้มักจะถือว่ามีความประมาณเป็น 5 เท่าของรัศมีชวาร์ตสชิลด์ (Schwarzschild radius) ของแกนกลางของควาร์ก

(T05.5) แกนกลางของควาร์กหนึ่งถูกพบว่ามีความสว่างที่แปรปรวนในช่วงเวลาประมาณ 1 ชั่วโมง จงหาขีดจำกัดบน (upper limit) $M_{c, \text{max}}$ ของมวลของแกนกลางของควาร์กในหน่วยของมวลดวงอาทิตย์ (solar mass) [3]

(T06) การหมุนของกาแล็กซี (Galactic Rotation)

[20 คะแนน]

เราสามารถหาเส้นโค้งการหมุน (rotation curve) ของกาแล็กซีของเราได้โดยใช้การวัดความเร็วในแนวเส้นของเมฆไฮโดรเจนเป็นกลาง (HI) ณ กาแล็กติกลองจิจูด (galactic longitude) ต่าง ๆ โดยใช้การสังเกตเส้น HI 21 cm พิจารณาเมฆ HI ที่มีกาแล็กติกลองจิจูด l ซึ่งอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางกาแล็กซี (Galactic Centre, GC) เป็นระยะทาง R และอยู่ห่างจากดวงอาทิตย์เป็นระยะทาง D ให้พิจารณาว่า ดวงอาทิตย์อยู่ห่างจาก GC เป็นระยะทาง $R_0 = 8.5$ kpc สมมติว่า ทั้งดวงอาทิตย์และเมฆ HI อยู่ในวงโคจรเป็นวงกลมรอบ GC ในระนาบกลางกาแล็กซี (galactic plane) โดยดวงอาทิตย์และเมฆมีความเร็วเชิงมุมเป็น Ω_0 และ Ω ตามลำดับ, และดวงอาทิตย์และเมฆความเร็วการหมุนเป็น V_0 และ V ตามลำดับ

ความเร็วตามแนวเส้น (line-of-sight velocity, V_r) และความเร็วในแนวสัมผัส (transverse velocity, V_t) ของเมฆที่สังเกตจากดวงอาทิตย์ สามารถเขียนได้ในรูป

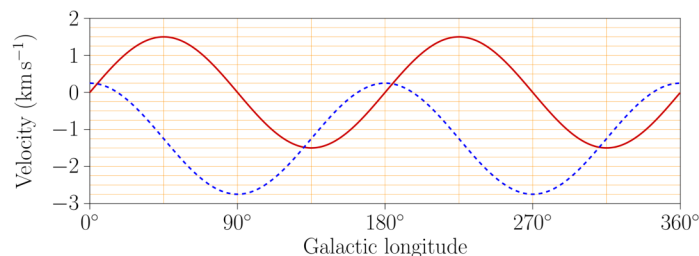
$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

เมื่อมองจากขั้วกาแล็กซีเหนือ (North Galactic Pole) การหมุนของกาแล็กซีจะวนในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ตลอดปัญหา เราจะถือว่า ความเร็วตามแนวเส้นของวัตถุมีค่าเป็นบวกเมื่อวัตถุกำลังถอยออกจากผู้สังเกต และเมฆจะถูกพิจารณาเป็นวัตถุจุด (point object)

(T06.1) จากกราฟที่ให้มาในกระดาษสรุปคำตอบ จงวาดเส้นกราฟ V_r โดยเป็นฟังก์ชันของ D จาก $D = 0$ ถึง $D = 2R_0$ สำหรับ (i) $l = 45^\circ$ และ (ii) $l = 135^\circ$ กำกับแต่ละเส้นกราฟด้วยค่าของ l [5]

(T06.2) กราฟด้านล่างแสดงค่าเฉลี่ยของความเร็วในแนวเส้น (เส้นโค้งทึบสีแดง) และค่าเฉลี่ยของความเร็วในแนวสัมผัส (เส้นโค้งประสีน้ำเงิน) ของดาวฤกษ์ที่ระยะทาง 100 pc จากดวงอาทิตย์ ซึ่งถูกพล็อตเป็นฟังก์ชันของกาแล็กติกลองจิจูด



จงใช้กราฟนี้เพื่อประมาณคาบการโคจร (P) ของดวงอาทิตย์รอบ GC ในหน่วยล้านปี (Myr) [3]

(T06.3) ยาน ออร์ต (Jan Oort) สังเกตว่า ในบริเวณใกล้ดวงอาทิตย์ ($D \ll R_0$) ผลต่างของความเร็วเชิงมุม ($\Omega - \Omega_0$) จะมีค่าน้อย โดยใช้การประมาณค่าอันดับที่หนึ่ง (first-order approximation) เขาพบว่าความเร็วตามแนวเส้นและความเร็วในแนวสัมผัสสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

โดยที่ A และ B เป็นที่รู้จักในนามค่าคงที่ของออร์ต (Oort's constants)

พิจารณาสองกรณี:

(I) เส้นโค้งการหมุนของกาแล็กซีจากการสังเกตการณ์

(II) เส้นโค้งการหมุนในสถานการณ์สมมติที่กาแล็กซีไม่มีสสารมืด และมวลทั้งหมดของกาแล็กซีถือว่ากระจุกอยู่ที่จุดศูนย์กลาง

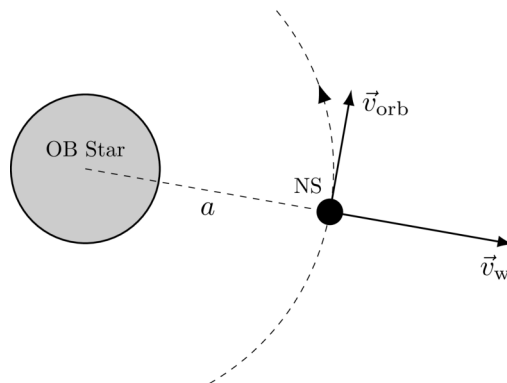
- (T06.3a) จงเขียนความชันตามทิศของแนวเส้น $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ ของความเร็วการหมุน (radial gradient of the rotational velocity) ณ ตำแหน่งของดวงอาทิตย์สำหรับทั้งสองกรณีข้างต้น [2]
- (T06.3b) จงเขียน A และ B ในรูปของ V_0 , R_0 , และความชันในแนวเส้นของความเร็วการหมุนที่ตำแหน่งของดวงอาทิตย์ $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ [8]
- (T06.3c) กำหนดให้ F_I และ F_{II} แทนอัตราส่วน (A/B) ของค่าคงที่ของ Oort สำหรับกรณีที่ (I) และ (II) ตามลำดับ จงหาค่าของ F_I และ F_{II} [2]

(T07) ระบบดาวคู่นิวตรอน (Neutron-Star Binary)

[20 คะแนน]

ในระบบดาวคู่ซึ่งประกอบด้วยดาวมวลแน่น (compact star) และดาวฤกษ์อีกดวง โดยดาวฤกษ์มีขอบเขตไม่ล้ำเกินเปลือกของโรช (Roche lobe) ของดาวมวลแน่น แหล่งกำเนิดของการพอกพูนมวล (accretion) ลงบนดาวมวลแน่นคือลมดาวฤกษ์ (stellar wind) ที่พัดมู่ออกจากดาวฤกษ์ การพอกพูนมวลจากลมดาวฤกษ์นี้มีความสำคัญอย่างยิ่งในระบบดาวฤกษ์อายุน้อย (เช่น ดาวฤกษ์ประเภท O หรือ B ซึ่งต่อไปนี้จะเรียกว่าดาวฤกษ์ OB) และดาวมวลแน่น เช่น ดาวนิวตรอน (NS) ที่โคจรใกล้กัน

พิจารณาระบบดาวคู่ NS-OB ที่ดาวนิวตรอนมวล $M_{NS} = 2.0 M_\odot$ และ รัศมี $R_{NS} = 11 \text{ km}$ โดยวงโคจรเป็นวงกลม รัศมี a รอบจุดศูนย์กลางของดาว OB ด้วยความเร็ว $v_{orb} = 1.5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (ดูภาพด้านล่าง) ตลอดโจทย์ข้อนี้ กำหนดให้ดาว OB มีการสูญเสียมวลอย่างสมมาตรเชิงทรงกลม (spherically symmetric) ด้วยอัตรา $\dot{M}_{OB} = 1.0 \times 10^{-4} M_\odot \text{ yr}^{-1}$



- (T07.1) รัศมีของการพอกพูนมวล (accretion radius) R_{acc} คือระยะห่างมากที่สุดจากศูนย์กลางของดาวนิวตรอนที่ลมดาวฤกษ์ยังสามารถถูกจับไว้ได้โดยดาวนิวตรอน ถ้าอัตราเร็วของลมดาวฤกษ์ที่ระยะวงโคจรของดาวนิวตรอนคือ $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ แล้ว จงหาค่า R_{acc} ในหน่วยกิโลเมตร โดยใช้การคำนวณมาตรฐานที่ใช้หาความเร็วหลุดพ้น [3]
- (T07.2) สมมติว่ามวลทั้งหมดที่ถูกจับจะพอกพูนขึ้นที่ดาวนิวตรอน ให้ประมาณอัตราการพอกพูนมวล (mass accretion rate) $\dot{M}_{acc}$ จากลมจากดาวฤกษ์ที่เข้าสู่ดาวนิวตรอนในหน่วยของ $M_\odot \text{ yr}^{-1}$ ถ้า $a = 0.5 \text{ au}$ ไม่ต้องคำนึงถึงผลจากความดันการแผ่รังสี (radiation pressure) และเวลาในการเย็นตัวของแก๊สที่กำลังพอกพูนขึ้น [3]

- (T07.3) เมื่อพิจารณาสถานการณ์ที่อัตราเร็วของลมดาวฤกษ์ที่ระยะใกล้วงโคจรของ NS a ใกล้เคียงกับ [6]
อัตราเร็วการโคจรของ NS จะพบว่าอัตราการพอกพูนมวลจากลมดาวที่มายัง NS จะถูกกำหนดโดย
สมการในรูปแบบ $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} f(\tan \beta, q)$ โดยที่ $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$ คืออัตราส่วนมวลของ
ระบบดาวคู่ และ β คือมุมในกรอบอ้างอิงของ NS ระหว่างทิศทางของความเร็วลมดาวฤกษ์และ
ทิศทางแนวรัศมีที่ชี้ออกจากดาว OB จงหาสมการสำหรับ $f(\tan \beta, q)$ โดยสมมติว่า
 $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$
- (T07.4) ให้พิจารณาว่าสสารของลมดาวฤกษ์ได้แตกตัวเป็นไอออนอย่างสมบูรณ์ (fully ionized) ทำให้การ
พอกพูนมวลในแนวรัศมีถูกยับยั้งโดยสนามแม่เหล็กที่รุนแรง $\vec{B}$ ของ NS ปรากฏการณ์นี้สามารถ
พิจารณาได้ว่าเกิดจากความดันแม่เหล็กซึ่งมีขนาดเท่ากับ $\frac{B^2}{2\mu_0}$ ถ้าสมมติว่าสนามแม่เหล็กของ NS มี
ลักษณะเดียวกันกับไดโพล (dipole) คือมีขนาดในระนาบศูนย์สูตรแปรผันตามระยะทาง r จาก NS
สำหรับ $r \gg R_{\text{NS}}$ ดังสมการ

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

โดยที่ B_0 คือสนามแม่เหล็กที่ศูนย์สูตรของ NS ให้สมมติว่า แกนของไดโพลแม่เหล็กเป็นแกนเดียวกับ
แกนหมุนรอบตัวเองของ NS

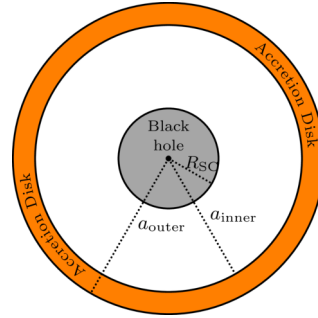
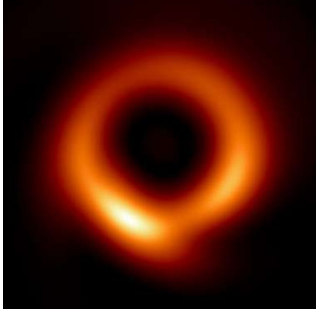
- (T07.4a) จงหาความดันแม่เหล็ก (magnetic pressure) $P_{\text{eq, mag}}$ ในระนาบศูนย์สูตร [1]
โดยเขียนในรูปของ B_0, R_{NS}, r และค่าคงตัวอื่น ๆ ที่เหมาะสม
- (T07.4b) ระยะห่างสูงสุดที่การไหลของมวลพอกพูน (accretion flow) ที่ถูกยับยั้งด้วยสนามแม่เหล็กที่
รัศมีแมกนีโตสเฟียร์ (magnetospheric radius) R_m
การไหลของสสารนี้จะทำให้เกิดความดันเนื่องจากการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างลม
ดาวฤกษ์ที่เคลื่อนเข้าหาดาวนิวตรอนและ NS จงหาสมการเพื่อประมาณค่าสนามแม่เหล็กวิกฤต $B_{0, c}$
ซึ่งทำให้ R_m เท่ากับกับ R_{acc} และคำนวณค่าสนามแม่เหล็กวิกฤตใน
หน่วยเทสลาโดยไม่ต้องสนใจผลจากแม่เหล็กสำหรับ $r > R_m$ และพิจารณาเฉพาะกรณี
 $v_w \gg v_{\text{orb}}$ [7]

(T08) เงาของหลุมดำ (Shadow of a Black Hole)

[20 คะแนน]

กล้องโทรทรรศน์ Event Horizon Telescope (EHT) ได้เผยแพร่ภาพหลุมดำมวลยวดยิ่ง (supermassive black hole)
ที่ใจกลางกาแล็กซี M87 ตามที่แสดงในรูปล่างซ้าย

การทำความเข้าใจลักษณะพื้นฐานบางประการของภาพนี้ เราจะพิจารณาแบบจำลองอย่างง่ายของหลุมดำสถิตย์แบบ
ไม่หมุนที่มีความสมมาตรเชิงทรงกลม (non-rotation, static, spherically symmetric black hole) โดยหลุมดำมีมวล
 $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$, และถูกล้อมรอบด้วยจานพอกพูนมวลบางที่ไม่มีมวล (massless thin accretion disk) ซึ่งมี
รัศมีด้านในและด้านนอกเป็น $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ และ $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$ ตามลำดับ โดยที่ R_{SC} คือรัศมีชวาร์ตชิลด์
(Schwarzschild radius) ภาพมุมมองด้านหน้า (face-on view) แสดงอยู่ในรูปด้านล่างขวา (โดยภาพไม่ได้ปรับตาม
มาตราส่วน)



เราถือว่าจานพอกพูนมวล (accretion disk) เป็นแหล่งกำเนิดแสงเพียงแหล่งเดียวที่ต้องพิจารณา ทุกจุดบนจานเปล่งแสงไปในทุกทิศทาง แสงนี้เดินทางภายใต้อิทธิพลของสนามโน้มถ่วงของหลุมดำ วิธีการเดินทางของรังสีแสงถูกควบคุมโดยสมการสองสมการด้านล่าง (ซึ่งคล้ายกับสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุรอบดวงอาทิตย์) :

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad \text{เมื่อ } v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

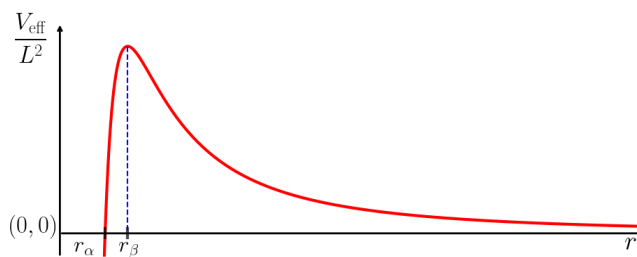
โดยที่ $r \in (R_{SC}, \infty)$ คือพิกัดความยาวแนวรัศมี (radial coordinate), $\phi \in [0, 2\pi)$ คือมุมแอซิมัท (azimuthal angle), และ E และ L คือค่าคงที่ที่เกี่ยวข้องกับพลังงานและโมเมนตัมเชิงมุม ตามลำดับ ซึ่งปริมาณทั้งสองมีการอนุรักษ์

ในที่นี้ $v_r \equiv dr/dt$ คือขนาดของความเร็วในแนวรัศมี (radial velocity), v_ϕ คือขนาดของความเร็วในแนวเส้นสัมผัส (tangential velocity), และ $\omega \equiv d\phi/dt$ คือความเร็วเชิงมุม เรานิยามพารามิเตอร์การกระทบ (impact parameter) b สำหรับวิถีโคจรเป็น $b = L/\sqrt{2E}$ ไม่ต้องคำนึงถึงการขยายของเวลา (time dialation) ในปัญหานี้

สมการที่มีประโยชน์อีกสมการหนึ่งได้มาจากการหาอนุพันธ์ (differentiation) จากสมการแรก :

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

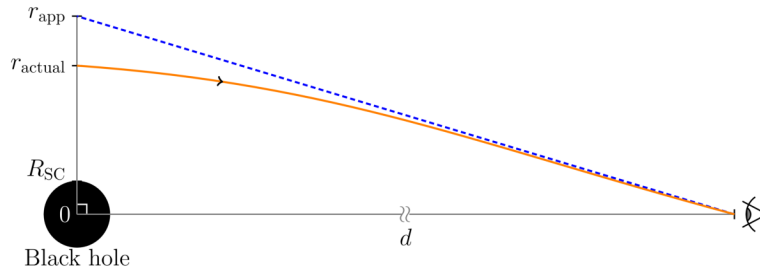
- (T08.1) รอบหลุมดำสามารถมีวิธีการเดินทางของแสงที่เป็นวงกลม (circular light trajectory) ได้ จงหา [4]
รัศมี r_{ph} และพารามิเตอร์การกระทบ (impact parameter) b_{ph} สำหรับวิธีการเดินทางของโฟตอน (photon trajectory) ดังกล่าวในรูปของ M และค่าคงที่ที่เกี่ยวข้อง
- (T08.2) จงคำนวณหาเวลา T_{ph} ที่ใช้ในการโคจรครบหนึ่งรอบของวิถีแสงเชิงวงกลม (circular light [2]
trajectory) ในหน่วยวินาที
- (T08.3) สมการความเร็วเชิงรัศมี (radial velocity equation) ที่ให้ไว้ข้างต้น (สมการแรกในคำถามนี้) สามารถนำมาเปรียบเทียบกับสมการในรูปแบบ $\frac{v^2}{2} + V_{eff}(r) = E$ สำหรับวิถีแสง (light trajectory) เมื่อกราฟแสดง V_{eff}/L^2 ในรูปฟังก์ชันของ r ถูกแสดงไว้ด้านล่าง



- (T08.3a) กราฟข้างต้นแสดงรัศมีพิเศษ (special radius) สองรัศมี คือ r_α และ r_β จงแสดงค่าของ [2]
 r_α และ r_β ในรูปของ M และค่าคงที่ที่เกี่ยวข้อง

(T08.3b) ในบางกรณี โฟตอนที่เดินทางเข้าด้านในจากจานพอกพูนมวล (accretion disk) ไปยัง [3]
หลุมดำยังคงสามารถหลุดออกไปได้โดยหลุดถึงระยะอนันต์ จงหาสมการสำหรับค่าที่
น้อยที่สุดของรัศมีจุดเปลี่ยน (turning point radius) r_t สำหรับโฟตอนดังกล่าว ในรูป
ของ M และค่าคงที่ที่เกี่ยวข้อง ให้เขียนนิพจน์ (expression) สำหรับค่าต่ำสุดของ
พารามิเตอร์การกระแทก $b_{\min}$ สำหรับโฟตอนนี้

(T08.4) รังสีของแสงที่มาจากรัศมี r_{actual} จากจุดศูนย์กลางของระบบ โดยแสงนี้มีจุดเริ่มต้นบนระนาบที่ตั้งฉาก
กับแนวเล็ง (plane of the sky) จะเกิดการหักเหอย่างรุนแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของหลุมดำ และใน
ที่สุดจะไปถึงผู้สังเกต (แสดงด้วยรูปตา) ที่ระยะ d ที่ไกลมาก ๆ ดังแสดงด้านล่าง

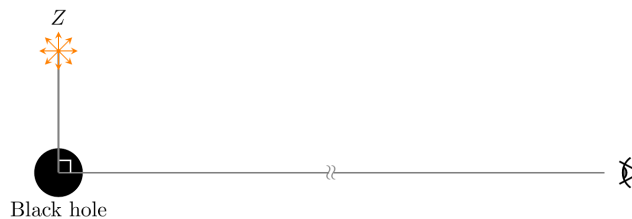


สำหรับผู้สังเกต รังสีแสงนี้ดูเหมือนว่า มีต้นกำเนิดมาจากจุดอื่นบน plane of the sky โดยจุดต้นกำเนิดที่
มีระยะห่าง $r_{\text{app}} \approx b$ จากจุดศูนย์กลางของหลุมดำ เมื่อ b คือพารามิเตอร์การกระแทกของวิถีโฟตอน
นั้น สำหรับจุดบนจานพอกพูนมวล (accretion disk) ที่ $r = r_{\text{actual}}$ เราอาจสมมติความสัมพันธ์ต่อ
ไปนี้:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

สำหรับผู้สังเกตการณ์ที่อยู่ไกลมาก ๆ เช่น พวกเรา ถ้าระนาบของจานพอกพูนมวลตั้งฉากกับแนวเล็ง [5]
แล้วภาพของระบบจะปรากฏเป็นว่ามีความสมมาตรเชิงวงกลม (circularly symmetric) ใน plane of
the sky จงหารัศมีปรากฏด้านนอกสุด r_{outer} และรัศมีปรากฏด้านในสุด r_{inner} ของภาพดังกล่าวใน
หน่วย au

(T08.5) พิจารณาหลุมดำมวลยวดยิ่งที่อยู่โดดเดี่ยว (isolated supermassive black hole) โดยหลุมดำมีมวล
 $M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$ และไม่มีจานพอกพูนมวล (accretion disk) การระเบิดคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า
รุนแรงในช่วงเวลาสั้น ๆ (brief strong burst of electromagnetic radiation) เกิดขึ้นเป็นเวลา 5
วินาที ที่จุด Z ณ ระยะ $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ จากหลุมดำ ดังแสดงในรูป การระเบิดที่จุด Z ดังกล่าวปลดปล่อย
แสงออกไปทุกทิศทาง ผู้สังเกต ณ จุดที่อยู่ห่างจากหลุมดำ (ซึ่งแสดงด้วยรูปตาในภาพด้านล่าง) ถ่าย
ภาพบริเวณรอบหลุมดำด้วยการเปิดรับแสงนานเป็นเวลา 60 วินาที



เลือกตัวเลือกที่ถูกต้องสำหรับแต่ละข้อความด้านล่าง :

- (T08.5a) จำนวนวิธีการเดินทาง (path) ที่เป็นไปได้สำหรับแสงที่จะเดินทางจาก Z ไปยังผู้สังเกต **[2]**
คือ
(A) ไม่เกินหนึ่งวิธี (B) หนึ่งวิธีพอดี (C) สองวิธีพอดี (D) มากกว่าสองวิธี
- (T08.5b) จำนวนภาพของการระเบิดคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า EM ที่ Z ซึ่งจะมองเห็นได้ในภาพที่มีการ **[2]**
เปิดรับแสงนาน (long-exposure image) คือ
(ก) ไม่เกินหนึ่งภาพ (ข) หนึ่งภาพพอดี (ค) สองภาพพอดี (ง) มากกว่าสองภาพ

(T09) ทัศนวิสัยเนื่องจากชั้นบรรยากาศ (Atmospheric Seeing)

[35 คะแนน]

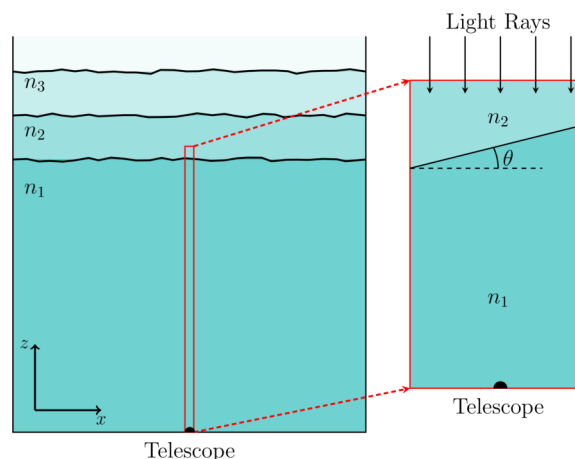
กล้องโทรทรรศน์กล้องหนึ่งมีเลนส์ใกล้วัตถุเป็นเลนส์นูนชนิดอโครมติก (achromatic) โดยมีเส้นผ่านศูนย์กลางเป็น $D = 15 \text{ cm}$ และมีความยาวโฟกัสเป็น $f = 200 \text{ cm}$ กล้องโทรทรรศน์ถูกตั้งให้ชี้ไปยังดาวที่ปรากฏ ณ จุดจอมฟ้า (zenith)

- (T09.1) จงหาเส้นผ่านศูนย์กลางของภาพ d_{image} (ในหน่วยเมตร) ที่ปรากฏ ณ ระนาบโฟกัส (focal plane) **[1]**
ของเลนส์ใกล้วัตถุซึ่งเกิดจากแหล่งกำเนิดที่เป็นจุดแสงสีเขียว ($\lambda = 550 \text{ nm}$) โดยพิจารณาเฉพาะผล
ที่เกิดจากการเลี้ยวเบน (diffraction) เท่านั้น

นอกจากการเลี้ยวเบนแล้ว ภาพจากแหล่งกำเนิดนอกโลกยังได้รับผลกระทบจากสิ่งที่เรียกว่า "ทัศนวิสัยเนื่องจากชั้นบรรยากาศ (atmospheric seeing)"

ขอบเขตระหว่างชั้นบรรยากาศรวมถึงชั้นนี้หักเหของชั้นต่าง ๆ มีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องที่เกิดจากความปั่นป่วน (turbulence), การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ, และปัจจัยอื่น ๆ สิ่งเหล่านี้นำไปสู่การเปลี่ยนตำแหน่งของภาพที่ปรากฏ ณ ระนาบโฟกัสของกล้องโทรทรรศน์ไปเล็กน้อย ที่รู้จักกันในชื่อว่า "ปรากฏการณ์การกะพริบ (twinkling effect)" สำหรับส่วนที่เหลือของโจทย์ นอกเหนือจากการใช้ขนาดของภาพดาวฤกษ์ที่เกิดจากขีดจำกัดเนื่องจากการเลี้ยวเบน (ตามที่ได้ใช้ไปแล้ว) เราจะไม่พิจารณาผลจากการแทรกสอด (interference) อื่น ๆ

ภาพด้านซ้ายในรูปด้านล่างแสดงภาคตัดขวางตามแนวตั้ง (vertical cross section) ของชั้นบรรยากาศหลายชั้น โดยแต่ละชั้นมีดัชนีหักเหแตกต่างกัน ($n_1, n_2, n_3, \dots$) ภาพด้านขวาแสดงภาพขยายของรอยต่อที่เป็นเพียงบรรยากาศชั้นบาง ๆ โดยกำหนดให้ดัชนีหักเหของบรรยากาศชั้นล่างสุดสองชั้นมีดัชนีหักเหเป็น n_1 และ n_2 โดยที่ $n_1 > n_2$ ต่อไปนี้ เราจะพิจารณาเฉพาะผลจากบรรยากาศและรอยต่อของสองชั้นนี้เท่านั้น แผนภาพในโจทย์ข้อนี้ไม่ได้วาดให้ตรงตามมาตราส่วน



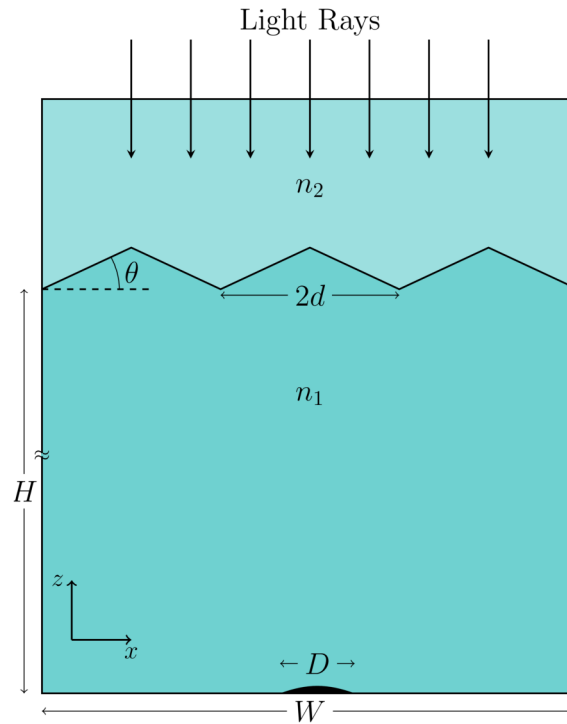
- (T09.2) กำหนดให้รอยต่อระหว่างชั้นทั้งสองอยู่ที่ความสูง $H = 1 \text{ km}$ เหนือเลนส์วัตถุของกล้องโทรทรรศน์ โดยทำมุม $\theta = 30^\circ$ กับแนวราบ กำหนดให้ในทุกส่วนของโจทย์ข้อนี้ มุม θ มีค่าเป็นบวกหากมีทิศทวนเข็มนาฬิกา สำหรับแหล่งกำเนิดแสงเอกรงค์ (monochromatic light source) $n_1 = 1.00027$ และ $n_2 = 1.00026$ และกำหนดให้การเลื่อนเชิงมุม (angular shift) ของภาพดาวฤกษ์ที่อยู่ ณ จุดจอมฟ้าบนระนาบโฟกัสของกล้องโทรทรรศน์เป็น α

- (T09.2a) จงวาดแผนภาพแสดงทางเดินของแสงที่รอยต่อของชั้นบรรยากาศ โดยระบุ n_1 , n_2 , θ และ α ณ ตำแหน่งที่เหมาะสมลงในแผนภาพด้วย [2]
- (T09.2b) จงหาสมการของ α ในรูปของ θ , n_1 และ n_2 โดยใช้เงื่อนไขการประมาณสำหรับมุมเล็ก ๆ กล่าวคือ $\sin \alpha \approx \alpha$ และ $\cos \alpha \approx 1$ [2]
- (T09.2c) จงคำนวณค่าของขนาดการเลื่อนตำแหน่งของภาพ Δx_θ (ในหน่วยเมตร) เนื่องจาก θ เพิ่มขึ้น 1% (โดยที่ n_1 และ n_2 คงที่) [3]
- (T09.2d) จงคำนวณค่าของขนาดการเลื่อนตำแหน่งของภาพ Δx_n (ในหน่วยเมตร) เนื่องจาก n_2 เพิ่มขึ้น 0.0001% (โดยที่ n_1 และ θ คงที่) [3]
- (T09.3) สำหรับแสงสีขาวที่มาจากดาวที่อยู่ ณ จุดจอมฟ้า ข้อใดต่อไปนี้ที่อธิบายรูปร่างและสีของภาพได้ใกล้เคียงที่สุด ให้ทำเครื่องหมายถูก (✓) ในช่องที่เหมาะสมเพียงช่องเดียวเท่านั้นลงในกระดาษสรุปคำตอบ ในที่นี้ ตำแหน่งบนแกน x ในรูปมีค่าเพิ่มขึ้นจากซ้ายไปขวา [2]

	สีของภาพ	รูปร่างของภาพ	ขอบด้านซ้าย	ขอบด้านขวา
A	สีขาว	วงกลม		
B	สีขาว	วงรี		
C	มีหลายสี	วงกลม	สีน้ำเงิน	สีแดง
D	มีหลายสี	วงกลม	สีแดง	สีน้ำเงิน
E	มีหลายสี	วงรี	สีน้ำเงิน	สีแดง
F	มีหลายสี	วงรี	สีแดง	สีน้ำเงิน

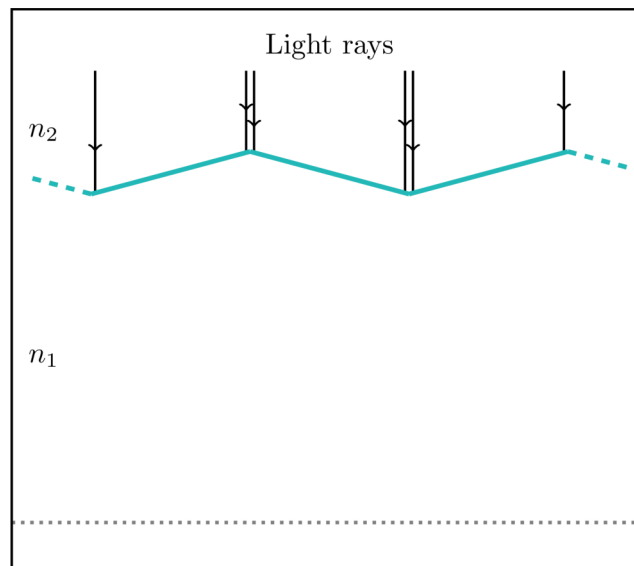
สำหรับส่วนที่เหลือทั้งหมดของคำถามนี้ เราจะพิจารณาเฉพาะแสงเอกรงค์สีเขียวที่มี $\lambda = 550$ nm และจำลองรอยต่อระหว่างชั้นให้เป็นชุดของระนาบซิกแซกที่ยาวไม่สิ้นสุดตลอดแนวตั้งฉากกับระนาบหน้ากระดาษ กำหนดให้ให้ระยะห่าง $d = 10$ cm ตามแกน x โดยที่ $\theta = 10^\circ$ หรือ $\theta = -10^\circ$ ดังแสดงในรูป

ภาพด้านล่าง (ไม่ได้มาตราส่วน) แสดงภาคตัดขวางของแบบจำลองชั้นบรรยากาศที่มีความกว้าง W ($W \ll H$) สำหรับกล้องโทรทรรศน์ที่มีช่องรับแสง (aperture) ขนาดใหญ่ รอยต่อซิกแซกนี้จะส่งผลต่อการก่อตัวของภาพจุดดาว (speckle) ที่ระนาบโฟกัส



(T09.4) จงพิจารณาชั้นบรรยากาศจำลองดังกล่าวนี้

(T09.4a) ส่วนของรอยต่อของชั้นบรรยากาศมีระนาบซิกแซกต่อเนื่องกัน โดยมีพารามิเตอร์เหมือนกับที่ระบุไว้ข้างต้น ดังแสดงในแผนภาพด้านล่าง (ไม่ได้มาตราส่วน)



แผนภาพนี้ก็อยู่ในกระดาษสรุปคำตอบ จงวาดทางเดินของแสงที่ตกกระทบระนาบของเลนส์ใกล้วัตถุของกล้องโทรทรรศน์ซึ่งแสดงด้วยเส้นประสีเทา

ถ้าหากมีบริเวณที่รังสีของแสงไปไม่ถึงแล้ว ให้ทำเครื่องหมาย "X" ในบริเวณนั้นด้วย [4]

(T09.4b) จงคำนวณความกว้าง W_X ของบริเวณดังกล่าว [3]

(T09.4c) จงหาเส้นผ่านศูนย์กลางที่ใหญ่ที่สุด $D_{\max}$ ของเลนส์ใกล้วัตถุของกล้องโทรทรรศน์ที่ทำให้ภาพดาวปรากฏในกล้องมีเพียงภาพเดียวเมื่อเลือกตำแหน่งวางกล้องโทรทรรศน์ให้เหมาะสมกับโครงสร้างของรอยต่อ [4]

(T09.5) พิจารณากรณีที่รูปร่างซิกแซกที่รอยต่อมีทั้งในทิศทาง x และ y (เหมือนกับทุ่งพืระมิต) และ $D = 100 \text{ cm}$ (โดยที่ $f = 200 \text{ cm}$) [6]

จงวาดรูปแสดงตำแหน่งของจุดดาวที่เกิดขึ้นอย่างคร่าว ๆ ลงในกล่องที่ให้ไว้ในกระดาษสรุปคำตอบ

(T09.6) สำหรับกรณีที่ชั้นบรรยากาศมีความปั่นป่วน (turbulence) เรากลับมาพิจารณาชุดของระนาบรอยต่อซิกแซกที่วิ่งในทิศทาง x และขนานกันตามแนวตั้งฉากกับกระดาษอีกครั้ง โดยในตอนนี้ มุมระหว่างระนาบทั้งสองเปลี่ยนแปลงในอัตราที่สม่ำเสมอจาก 10° เป็น -10° ในเวลา 1.0 วินาที สมมติว่าสิ่งนี้นำไปสู่อัตราการเปลี่ยนตำแหน่งของภาพที่สม่ำเสมอ [5]

พิจารณากล้องโทรทรรศน์ที่มี $D = 8 \text{ cm}$ และ $f = 1 \text{ m}$ จงประมาณเวลารับแสง (exposure time) ที่นานที่สุด $t_{\max}$ ซึ่งทำให้ภาพที่ปรากฏบน CCD มีเพียงภาพเดียวเท่านั้น เมื่อยอมให้ตำแหน่งภาพเลื่อนไปน้อยกว่า 1% ของเส้นผ่านศูนย์กลางของภาพที่เกิดจากผลของการเลี้ยวเบนเท่านั้น

(T10) การสังเคราะห์นิวเคลียสจากบิกแบง (Big Bang Nucleosynthesis)

[35 คะแนน]

ในยุคที่มีการแผ่รังสีเป็นหลักของเอกภพยุคแรกเริ่ม สเกลแฟคเตอร์ (scale factor) ของเอกภพคือ $a \propto t^{1/2}$ โดยที่ t คือเวลาที่นับจากบิกแบง โดยส่วนใหญ่ของยุคนี้ นิวตรอน (n) และโปรตอน (p) ยังคงอยู่ในสมดุลความร้อนซึ่งกันและกันผ่านอันตรกิริยาแบบอ่อน (weak interaction) ความหนาแน่นเชิงจำนวน (number density, N) ของอนุภาคนิวตรอนอิสระหรืออนุภาคโปรตอนมีความสัมพันธ์กับอุณหภูมิ T และมวลของอนุภาค m ดังนี้ :

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right)$$

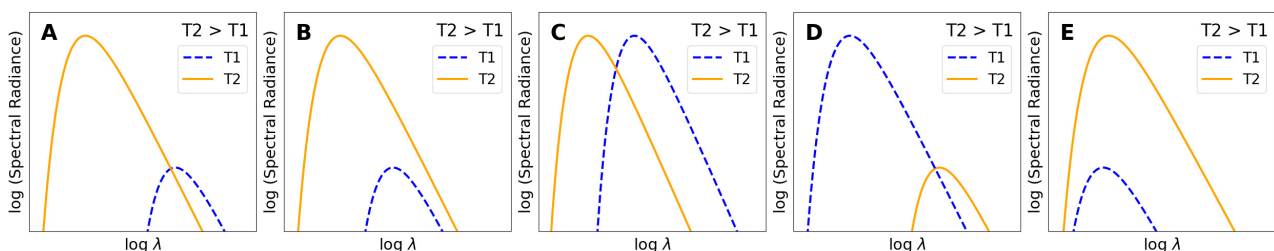
ตราบใดที่เวลา $t \leq t_{\text{wk}} = 1.70$ วินาที เมื่อ $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800 \text{ keV}$ หลังจาก t_{wk} , weak interaction ไม่สามารถรักษาสสมดุลดังกล่าวได้อีกต่อไป และนิวตรอนอิสระจะสลายตัวเป็นโปรตอนด้วยเวลาครึ่งชีวิต (half-life time) เท่ากับ 610.4 วินาที

(T10.1) ให้ความหนาแน่นเชิงจำนวนของโปรตอนเป็น N_p และความหนาแน่นเชิงจำนวนของนิวตรอนเป็น N_n จงคำนวณปริมาณสัมพัทธ์ (relative abundance) ของนิวตรอน $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ ณ เวลา t_{wk} [4]

(T10.2) โฟตอนอยู่ในสมดุลความร้อน และมีสเปกตรัมเป็นแบบวัตถุดำในทุกยุคสมัย

(T10.2a) จงหาค่าของดัชนี β ซึ่ง $T(a) \propto a^\beta$ [2]

(T10.2b) จงระบุว่ากราฟใดต่อไปนี้แสดงพฤติกรรมในแง่ของสเปกตรัมที่ถูกต้องของความหนาแน่นพลังงานสำหรับอุณหภูมิสองค่า T_1 และ T_2 ให้ทำเครื่องหมายถูก (✓) ที่ตัวเลือกที่ถูกต้องในกระดาษสรุปคำตอบ [2]

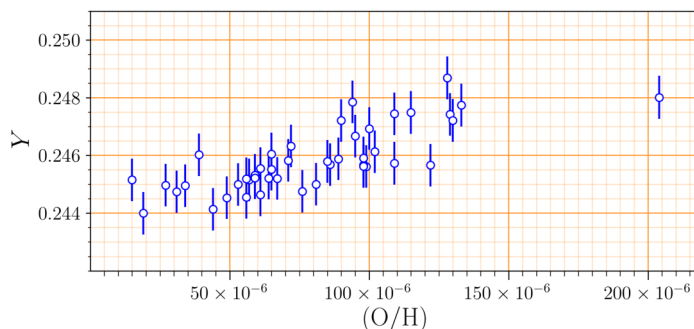


- (T10.3) หลังจากเวลา t_{wk} กระบวนการก่อตัวของดาวที่เริ่มจากโปรตอนและนิวตรอนถูกควบคุมโดยสมการของซาฮา (Saha equation) ซึ่งเสนอโดยนักฟิสิกส์ชาวอินเดีย ชื่อ ศาสตราจารย์เมฆนาท ซาฮา (Prof. Meghnad Saha) สมการของซาฮาสามารถสรุปได้เป็น

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n) c^2}{k_B T} \right)$$

ในที่นี้ อัตราส่วนแบรีออนต่อโฟตอน (baryon-to-photon ratio) η มีค่าเป็น 6.1×10^{-10} และ N_D คือความหนาแน่นเชิงจำนวนของดาวที่เริ่ม

- (T10.3a) จงวาดกราฟของอัตราส่วน N_D/N_n บนกริดในกระดาษสรุปคำตอบ สำหรับค่าอุณหภูมิ อย่างน้อย 4 ค่า ในช่วง $k_B T = [60, 70]$ keV โดยมีระยะห่างระหว่างอุณหภูมิที่เหมาะสม ให้วาดเส้นโค้งต่อเนื่องเรียบ (smooth curve) ผ่านจุดเหล่านี้ [5]
- (T10.3b) จากกราฟนี้ จงหาค่า $k_B T_{nuc}$ (ในหน่วย keV) ที่ซึ่ง $N_D = N_n$ [1]
- (T10.3c) เฉพาะในข้อย่อยนี้ให้สมมติว่า นิวตรอนอิสระทั้งหมดรวมตัวกับโปรตอนทันทีที่ $k_B T_{nuc}$ เพื่อสร้างดาวที่เริ่ม และดาวที่เริ่มทั้งหมดถูกเปลี่ยนเป็นฮีเลียม (${}^4\text{He}$) ในทันที จงคำนวณอายุของยุคของการสังเคราะห์นิวเคลียส t_{nuc} (ในหน่วยวินาที) ที่สอดคล้องกับการเริ่มก่อตัวของฮีเลียม [4]
- (T10.4) จงคำนวณค่าของ $X_{n, nuc}$ ที่เวลาก่อน t_{nuc} ทันที [5]
- (T10.5) ปริมาณฮีเลียมดั้งเดิม (primordial helium abundance) Y_{prim} ถูกนิยามให้เป็นสัดส่วนของมวล ทั้งหมดในเอกภพที่อยู่ในรูปฮีเลียมหลังจาก t_{nuc} ทันที จงประมาณค่าในเชิงทฤษฎีสำหรับค่าของ Y_{prim} สำหรับการคำนวณในข้อย่อยนี้เท่านั้น ให้สมมติว่า $m_p \approx m_n$ และมวลของฮีเลียมคือ $m_{He} \approx 4m_n$ [3]
- (T10.6) ปริมาณฮีเลียมดั้งเดิมนั้นวัดได้ยากมาก เนื่องจากดาวฤกษ์ต่าง ๆ ในเอกภพเปลี่ยนไฮโดรเจนเป็นฮีเลียมอย่างต่อเนื่อง ปริมาณการใช้ฮีเลียมโดยดาวฤกษ์ในกาแล็กซีต่าง ๆ สามารถหาได้จากความหนาแน่นเชิงมวลสัมพัทธ์ (relative number density) ของออกซิเจนต่อไฮโดรเจนในกาแล็กซีนั้น ๆ (โดยออกซิเจนจะถูกผลิตโดยดาวฤกษ์เท่านั้น) ซึ่งจะแทนด้วย (O/H) การวัดค่า (O/H) และปริมาณฮีเลียม Y สำหรับกาแล็กซีต่าง ๆ หลาย ๆ กาแล็กซีถูกแสดงในกราฟด้านล่าง



ให้ใช้จุดทั้งหมดในกราฟนี้ (ซึ่งก็อยู่ในกระดาษสรุปคำตอบ) เพื่อตอบคำถามต่อไปนี้

- (T10.6a) จงประมาณค่า Y สำหรับกาแล็กซีแคระกะทัดรัดสีน้ำเงิน (blue compact dwarf galaxy) ที่มีค่า $(O/H) = 1.75 \times 10^{-4}$ [2]
- (T10.6b) จงหาค่าความชัน $dY/d(O/H)$ ของเส้นตรงถดถอย (straight line fit) ของข้อมูลข้างต้น [2]

(T10.6c) จงประมาณค่าปริมาณฮีเลียมดั้งเดิม $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ จากการสังเกตการณ์ดังกล่าว

[2]

(T10.7) ความแตกต่างระหว่าง Y_{prim} และ $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ นั้นสามารถอธิบายได้โดยการปรับเปลี่ยนค่าของอัตราส่วน [3]
 แบรียนต่อโฟตอน η เมื่อ η ลดลง ซึ่งจะระบุด้วยเครื่องหมายลูกศร $\downarrow$ ในกระดาษรคำตอบ จง
 ระบุในช่องที่กำหนดไว้ว่า ปริมาณต่อไปนี้มีการเพิ่มขึ้น ($\uparrow$) หรือมีการลดลง ($\downarrow$) : $N_D/N_n(T)$,
 T_{nuc} (เมื่อ $N_D = N_n$), t_{nuc} , X_n , ϵ_{nuc} , และ Y_{prim}

(T11) ดาวฤกษ์ผ่านกราฟ (Stars through Graphs)

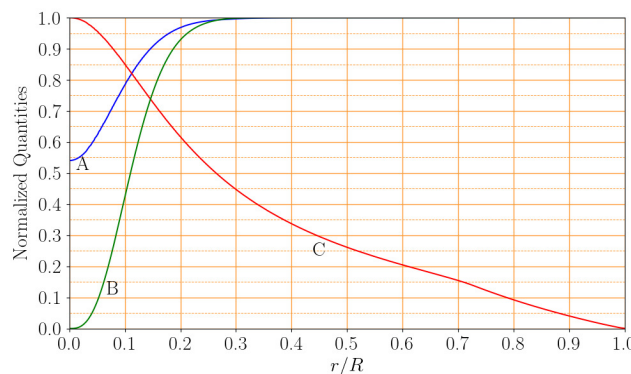
[50 คะแนน]

ดาวฤกษ์สามารถประมาณได้ว่าเป็นวัตถุที่มีความสมมาตรเชิงทรงกลม (spherically symmetric) ดังนั้น ระยะทาง
 รัศมี r จากจุดศูนย์กลางสามารถเลือกเป็นตัวแปรอิสระ (independent variable) เพียงตัวเดียวในการสร้างแบบ
 จำลองภายในของดาวฤกษ์ มวลที่อยู่ภายในทรงกลมที่มีรัศมี r แทนด้วย $m(r)$ กำลังส่องสว่าง (luminosity) $l(r)$
 นิยามโดยพลังงานสุทธิที่ไหลออกผ่านพื้นผิวทรงกลมที่มีรัศมี r ต่อหนึ่งหน่วยเวลา ปริมาณอื่น ๆ ที่น่าสนใจ เช่น
 ความหนาแน่น $\rho(r)$, อุณหภูมิ $T(r)$, สัดส่วนมวลไฮโดรเจน $X(r)$, สัดส่วนมวลฮีเลียม $Y(r)$, และพลังงานนิวเคลียร์ที่
 เกิดขึ้นต่อหน่วยมวลต่อหนึ่งหน่วยเวลา $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$ ถูกพิจารณาเป็นฟังก์ชันของ r ตลอดปัญหานี้ เราจะละเว้นการ
 พิจารณาผลกระทบของการแพร่และการตกตะกอนเนื่องมาจากความโน้มถ่วงของธาตุภายในดาวฤกษ์

สัญลักษณ์ "log" หมายถึงลอการิทึมฐาน 10 ปัญหานี้ประกอบด้วยสามส่วนที่เป็นอิสระจากกัน

(T11.1) ส่วนที่ 1: ภายในดาวฤกษ์

กราฟด้านล่างแสดงการเปลี่ยนแปลงของปริมาณโครงสร้างสามอย่างคือ A, B, และ C ซึ่งเป็นฟังก์ชัน
 ของอัตราส่วนรัศมี r/R ในแบบจำลองดาวฤกษ์ที่มีมวล $1 M_{\odot}$ และอายุ 4 Gyr โดยที่ R คือรัศมีโฟโต
 สเฟียร์ของดาวฤกษ์ ค่าสัดส่วนมวลของฮีเลียม (helium mass fraction) ที่พื้นผิว (ชั้นโฟโตสเฟียร์),
 Y_s , และสัดส่วนโลหะหนัก (metallicity) Z_s ซึ่งก็คือสัดส่วนมวล (mass fraction) ของธาตุที่หนักกว่า
 ฮีเลียม ที่พื้นผิว (ชั้นโฟโตสเฟียร์) ของดาวฤกษ์ถูกกำหนดโดย $(Y_s, Z_s) = (0.28, 0.02)$ ปริมาณ
 ทั้งหมดที่แสดงในกราฟถูกนอร์มัลไลซ์ (normalise) เทียบกับค่าสูงสุดของแต่ละปริมาณ



(T11.1a) จงระบุว่าปริมาณสามตัว A, B, และ C ว่าแต่ละปริมาณคือปริมาณใดจากห้าความเป็นไป [6]
 ได้:

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r)$$

(เขียนตัวอักษร A/B/C ในช่องข้างปริมาณที่เหมาะสมในกระดาษรคำตอบ ไม่จำเป็นต้องให้เหตุผลสำหรับการตอบ)

(T11.1b) จงหาเศษส่วนมวล Y_c ของฮีเลียมที่แกนกลางของดาวฤกษ์

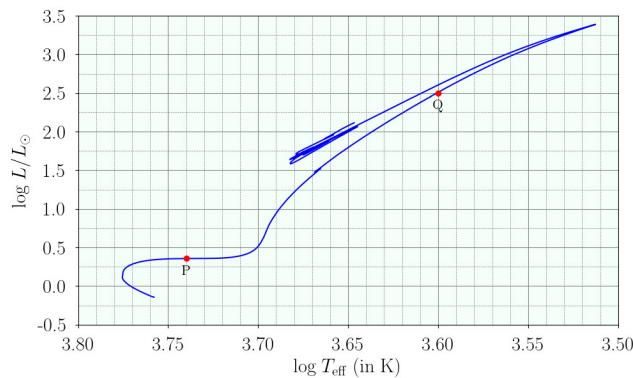
[3]

(T11.1c) จงวาดเส้นกราฟแสดงแนวโน้มของปริมาณสองตัวที่เหลือจากรายชื่อหาปริมาณข้างต้น [5]
(ซึ่งไม่ถูกระบุว่าเป็นเส้นโค้ง A, B, หรือ C) จากข้อย่อย (T11.1a) ในรูปฟังก์ชันของ r/R
บนกราฟเดียวกันในกระดาษสรุปคำตอบ ให้เขียนกำกับเส้นกราฟว่าเป็นเส้นกราฟของ
ปริมาณใด

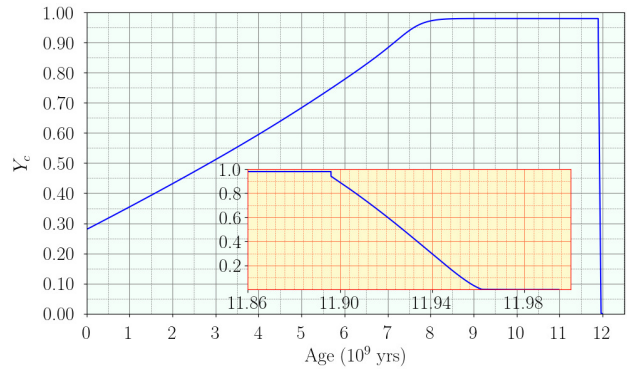
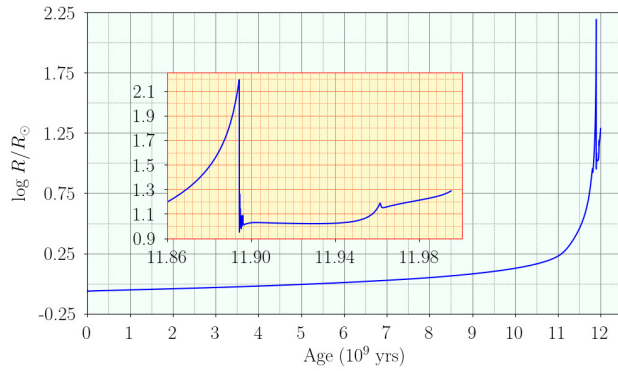
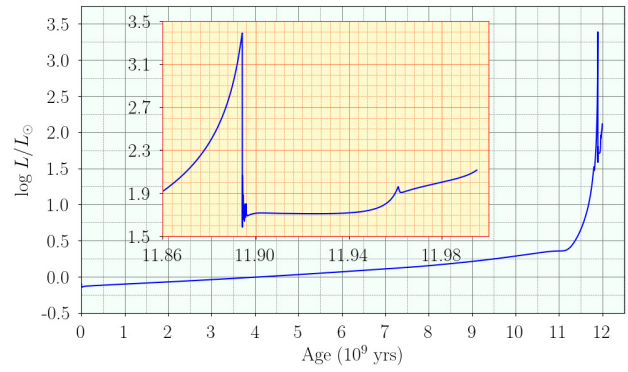
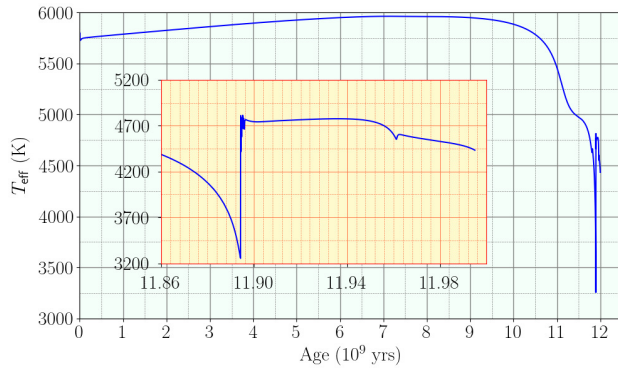
(T11.2) ส่วนที่ 2: ดาวฤกษ์ที่กำลังวิวัฒนาการ

พิจารณาวิวัฒนาการของดาวฤกษ์ที่มีมวล $1M_{\odot}$ ซึ่งมีองค์ประกอบเริ่มต้นแบบสม่ำเสมอ โดยมีเศษส่วน
มวลของฮีเลียมเป็น $Y_0 = 0.28$ และสัดส่วนโลหะเป็น $Z_0 = 0.02$ รูปภาพด้านล่างแสดงการ
เปลี่ยนแปลงของปริมาณรวมต่าง ๆ ของดาวฤกษ์นี้ เมื่อมันมีวิวัฒนาการจากตำแหน่งเริ่มแรกในแถบ
ลำดับหลัก (zero-age main sequence, ZAMS) จนถึงตำแหน่งสิ้นสุดการเผาไหม้ฮีเลียมในแกนกลาง

กราฟด้านล่างแสดงเส้นทางวิวัฒนาการของดาวฤกษ์บนแผนภาพ HR (กราฟของ $\log L/L_{\odot}$ เทียบกับ
 $\log T_{\text{eff}}$ โดยที่ L คือกำลังส่องสว่างที่ผิวดาวและ T_{eff} คืออุณหภูมิยังผล (effective temperature))



รูปภาพด้านล่างมีกราฟสี่กราฟที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของ T_{eff} (ในหน่วย K), L (พล็อตในรูป
 $\log L/L_{\odot}$), R (พล็อตในรูป $\log R/R_{\odot}$) และ Y_c เทียบกับอายุ (ในหน่วย 10^9 ปี) ของดาวฤกษ์
เดียวกัน ในกราฟทั้งสี่นี้ มีกราฟย่อยที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่เกี่ยวข้องในช่วงอายุ
ระหว่าง $11.86 \times 10^9 \text{ yr}$ ถึง $12.00 \times 10^9 \text{ yr}$ เพื่อความชัดเจนมากขึ้น



ให้ใช้กราฟเหล่านี้เพื่อตอบคำถามด้านล่าง

- (T11.2a) จงประมาณความยาวช่วงชีวิต (lifetime) t_{MS} (ในหน่วยปี) ซึ่งดาวฤกษ์อยู่ในลำดับหลัก [1]
(main sequence)
- (T11.2b) จงประมาณระยะเวลา Δt_{He} (ในหน่วยปี) ที่ดาวฤกษ์เผาไหม้ฮีเลียมในแกนกลาง [1]
- (T11.2c) จงหาค่าของสัดส่วน f_{H} ของปริมาณเริ่มต้นไฮโดรเจน ณ แกนกลางดาวฤกษ์ที่ได้ถูกเผาไหม้จนถึงเวลาที่กำลังส่องสว่างของดาวฤกษ์เป็น $1 L_{\odot}$ [3]
- (T11.2d) จงหารัศมีของดาวฤกษ์ R_1 (ในหน่วยของ R) เมื่อ 60% ของปริมาณเริ่มต้นของไฮโดรเจนที่แกนกลางได้ถูกเผาไหม้ [3]
- (T11.2e) จงหารัศมีของดาวฤกษ์ R_P และ R_Q (ในหน่วยของ $R_{\odot}$), ที่สอดคล้องกับตำแหน่ง P และ Q ตามที่ระบุในแผนภาพ HR [4]

(T11.3) ส่วนที่ 3: การกระจายมวลภายในดาวฤกษ์

สมการที่อธิบายการกระจายของมวลภายในดาวฤกษ์คือ

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

เพื่อความสะดวก เราอาจเขียนสมการนี้ในรูปของตัวแปรที่ไม่มีหน่วย (dimensionless variable) ได้แก่ สัดส่วนมวล q , สัดส่วนรัศมี x , และความหนาแน่นสัมพัทธ์ σ ซึ่งเรากำหนดเป็น

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

โดยที่ M และ R คือมวลทั้งหมดและรัศมีของดาวฤกษ์ตามลำดับ และ $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ คือความหนาแน่นเฉลี่ยของดาวฤกษ์ สำหรับดาวฤกษ์ที่เราจะพิจารณาในส่วนนี้ ให้ใช้ข้อมูลต่อไปนี้:

- ความหนาแน่นที่จุดศูนย์กลาง $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$
- ครึ่งหนึ่งของมวลดาวฤกษ์อยู่ภายใน 25% ของรัศมีดาว และ 70% ของมวลดาวอยู่ภายใน 35% ของรัศมีดาว

ในทุกคำถามย่อยต่อไปของคำถามนี้ อนุญาตให้ปัดเศษสัมประสิทธิ์ของตัวเลขที่ได้มาให้มีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.005

(T11.3a) จงแปลงสมการข้างต้นเพื่ออธิบายการเปลี่ยนแปลงของมวลต่อรัศมี $\frac{dq(x)}{dx}$ ให้อยู่ในรูป [2] ของ x และ $\sigma(x)$

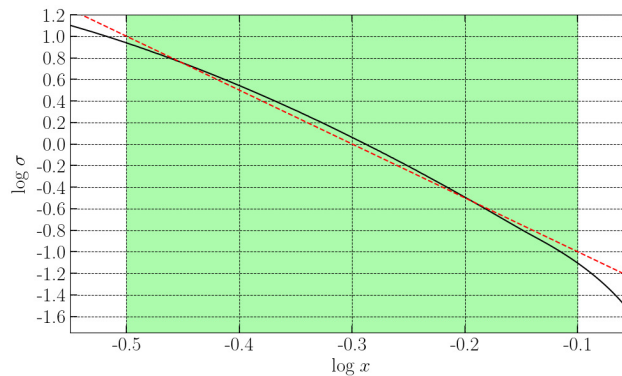
เพื่อให้ได้การกระจายของมวลตามรัศมี เราจำเป็นต้องทราบโปรไฟล์ความหนาแน่น (density profile) ภายในดาวฤกษ์ สำหรับโจทย์ส่วนนี้ เราจะอธิบายการเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นตามรัศมีโดยรูปแบบประมาณในสองช่วงของตัวแปร x :

- ส่วนใน (inner part) ของดาว: $0 \leq x \leq 0.32$
- ส่วนกลาง (middle part) ของดาว: $0.32 < x < 0.80$

เรายังไม่ทำการประมาณใด ๆ สำหรับส่วนที่ติดผิว (outermost) ของดาว นั่นคือ $0.80 \leq x \leq 1.00$

(T11.3b) การประมาณสำหรับส่วนกลาง:

การเปลี่ยนแปลงของ $\log \sigma$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ $\log x$ ในส่วนกลางของดาวจะแสดง (โดยเส้นโค้งสีดำ) ในกราฟด้านล่าง เราจะทำการประมาณเชิงเส้น (linear approximation) ซึ่งแสดงเป็นเส้นประสีแดงในกราฟ สำหรับ $\log \sigma$ ให้เป็นฟังก์ชันของ $\log x$ ในช่วง $-0.5 < \log x < -0.1$ ซึ่งหมายถึง $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (ช่วงนี้กำกับโดยการแรเงาสีเขียวในกราฟ) นอกจากนี้เราจะประมาณความชันของเส้นนี้ให้เป็นจำนวนเต็มที่ใกล้ที่สุด



ใช้การประมาณนี้เพื่อเขียนนิพจน์ (expression) สำหรับ $\sigma(x)$ ให้เป็นฟังก์ชันของ x ใน ช่วง $0.32 < x < 0.80$ [4]

(T11.3c) ใช้ผลลัพธ์ของ (T11.3b) เพื่อหานิพจน์สำหรับ $q(x)$ ในช่วง $0.32 < x < 0.80$ [6]

(T11.3d) การประมาณสำหรับส่วนใน :

ในส่วนในของดาว ($0 \leq x \leq 0.32$) ความหนาแน่นอาจประมาณเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ รัศมี นั่นคือ $\sigma(x) = Ax + B$ โดยที่ A และ B เป็นค่าคงที่ จงหา A และ B , และหา นิพจน์ (expression) สำหรับ $q(x)$ ในช่วง $0 \leq x \leq 0.32$ สังเกตว่า การประมาณที่ใช้ ในส่วนก่อนหน้าและส่วนนี้อาจนำไปสู่ความไม่ต่อเนื่องเล็กน้อยในความหนาแน่นหรือ มวลที่ตำแหน่ง $x = 0.32$ [8]

(T11.3e) รูปฟังก์ชัน $q(x)$ ที่ได้ในข้อ (T11.3c) และ (T11.3d) เป็นการประมาณที่อธิบายการ เปลี่ยนแปลงของมวลตามรัศมีได้ดีในบางบริเวณของดาวเท่านั้น สำหรับช่วง $0.80 \leq x \leq 1$ (ซึ่งเรายังไม่ได้ทำการประมาณใด ๆ) เป็นไปได้ที่จะทำการประมาณค่า โดยวิธีดูแนวโน้ม (extrapolation) ที่เหมาะสมจากบริเวณรอบข้าง ใช้การประมาณข้าง ต้นและข้อมูลที่ให้มาเพื่อร่างเส้นโค้งต่อเนื่อง (โดยไม่มีควมไม่ต่อเนื่องทั้งใน $q(x)$ หรือ ในอนุพันธ์ของมัน) สำหรับ $q(x)$ เทียบกับ x สำหรับทั้งดาว ($0 \leq x \leq 1$) ที่แสดงการ เปลี่ยนแปลงของมวลตามรัศมี [4]

(T12) การแผ่รังสีฮอว์คิงจากหลุมดำ (Hawking Radiation from Black Holes) [50 คะแนน]

(T12.1) โดยทั่วไป หลุมดำ (BH) เกิดจากการยุบตัวเนื่องจากความโน้มถ่วงของดาวฤกษ์มวลขนาดใหญ่ (massive star) ในช่วงท้ายของวัฏจักรชีวิต (life cycle) จนถึงจุดที่เรียกว่าจุดเอกฐาน (singularity) เนื่องจากแรงโน้มถ่วงที่รุนแรงของวัตถุเช่นนี้ เมื่อสิ่งใดก็ตามเข้าภายในส่วนที่เรียกว่าขอบฟ้าเหตุการณ์ (event horizon) (ซึ่งเป็นพื้นผิวทรงกลมที่มี $r = R_{SC}$ โดยที่ r คือระยะทางจากจุดเอกฐาน) สิ่งนั้น จะไม่สามารถหลุดพ้นจากขอบฟ้าเหตุการณ์ได้ ในที่นี้ R_{SC} เรียกว่า รัศมีชวาร์ตสชิลด์ (Schwarzschild radius)

(T12.1a) การจำลองของต้นกำเนิดของรังสีฮอว์คิง : พิจารณาอนุภาคคู่หนึ่ง โดยแต่ละอนุภาคมี มวล m ที่ก่อกำเนิดในทั้งสองฝั่งของขอบฟ้าเหตุการณ์ของ BH (BH horizon) อนุภาค ตัวหนึ่งอยู่นอกขอบฟ้าเล็กน้อยที่ $r \approx R_{SC}$ ในขณะที่อนุภาคอีกตัวหนึ่งอยู่ภายในขอบฟ้า ที่ $r = \kappa R_{SC}$ สมมติว่าพลังงานรวมของอนุภาคคือผลรวมของพลังงานมวลนิ่ง (rest mass) mc^2 และพลังงานศักย์โน้มถ่วงอันเนื่องมาจาก BH

จงหาค่าของ κ ที่ทำให้อุณหภูมิของหลุมดำมีพลังงานรวมเป็นศูนย์

[4]

- (T12.1b) **อุณหภูมิของหลุมดำ :** หากอนุภาคที่เกิดขึ้นนอกขอบฟ้าในกระบวนการข้างต้นมีพลังงานจลน์เพียงพอ อนุภาคนั้นอาจหลุดออกจากหลุมดำ (BH) ในกระบวนการที่เรียกว่าการแผ่รังสีฮอว์คิง (Hawking radiation) อนุภาคที่อยู่ภายในขอบฟ้าซึ่งมีพลังงานติดลบ (negative energy) จะถูกดูดกลืน (absorb) และทำให้มวลของหลุมดำลดลง

สมมติว่า รังสีฮอว์คิงทั้งหมดเกิดจากโฟตอนที่มียุสเปกตรัมแบบวัตถุดำ (black body spectrum) ซึ่งมีค่าสูงสุดที่ความยาวคลื่น $\lambda_{bb} \approx 16R_{SC}$ เป็นที่ทราบกันว่าสำหรับ BH มวลเท่ากับมวลดวงอาทิตย์ (solar mass BH) $R_{SC,\odot} = 2.952 \text{ km}$

จงเขียนอุณหภูมิ T_{bh} ของ BH ที่สอดคล้องกับการแผ่รังสีของวัตถุดำนี้ในรูปของมวล M_{bh} [4] และค่าคงตัวทางฟิสิกส์อื่น ๆ รวมถึงค่ามวลรัศมีชวาร์ซชิลด์ $R_{SC,10\odot}$ และอุณหภูมิ $T_{bh,10\odot}$ สำหรับ BH ที่มีมวล $10 M_{\odot}$

- (T12.1c) **การสูญเสียมวลของหลุมดำ :** สมมติว่ารังสีฮอว์คิงถูกปล่อยออกมาจากขอบฟ้าเหตุการณ์

ใช้ความสัมพันธ์ของมวล-พลังงาน (mass-energy equivalence) จงเขียนอัตราการสูญเสียมวล (rate of mass loss) $dM_{bh}(t)/dt$ ในรูปของมวล $M_{bh}(t)$ ของ BH และค่าคงตัวทางฟิสิกส์อื่น ๆ

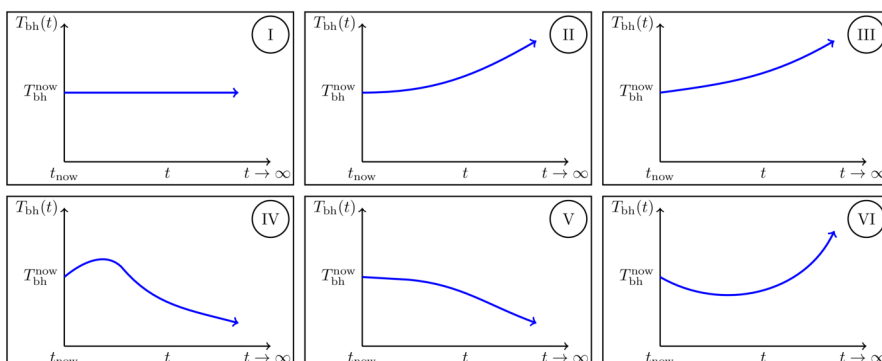
จากนั้นให้เขียนค่าของ $M_{bh}(t)$ สำหรับ BH ที่มีมวลเริ่มต้น M_0 ให้วาดกราฟ $M_{bh}(t)$ ที่ [8] เป็นฟังก์ชันของ t จาก $M_{bh} = M_0$ ถึง $M_{bh} = 0$

- (T12.1d) **อายุขัยของหลุมดำ (lifetime of a black hole) :** จงหาอายุขัย τ_{BH} ซึ่งหลุมดำที่มี [3] มวลเริ่มต้น M_0 จะระเหิดจนหมด (completely evaporate) โดยผ่านการแผ่รังสีฮอว์คิง ในรูปของ M_0 และค่าคงตัวทางฟิสิกส์อื่น ๆ รวมถึงค่ามวลอายุขัย $\tau_{bh,10\odot}$ (ในหน่วยวินาที) สำหรับหลุมดำที่มี $M_0 = 10 M_{\odot}$

- (T12.1e) **หลุมดำที่อาบรังสีจาก CMB (Black hole in a CMB radiation bath) :** พิจารณาหลุมดำโดดเดี่ยว (isolated black hole) ในอวกาศ ที่อยู่ไกลจากวัตถุอื่น และมีอุณหภูมิ ณ ปัจจุบัน (current temperature) เป็น T_{bh}^{now} หลุมดำนี้ถูกล้อมรอบด้วยรังสีไมโครเวฟพื้นหลังของจักรวาล (CMB) ซึ่งมีอุณหภูมิปัจจุบันเป็น $T_{cmb}^{now} = 2.7 \text{ K}$ หลุมดำสามารถมีมวลเพิ่มขึ้นจากการดูดซับรังสี CMB และสูญเสียมวลโดยการแผ่รังสีฮอว์คิง

โดยคำนึงถึงการขยายตัวที่เร่งขึ้น (accelerating expansion) ของเอกภพ ให้ระบุว่ารูปใดต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นวิวัฒนาการในระยะยาวของ T_{bh} ในสามกรณีต่อไปนี้ :

(X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$



ให้ระบุคำตอบโดยทำเครื่องหมายในช่องที่เหมาะสม (เพียงหนึ่งช่อง) ในตารางที่กำหนด [6]
ไว้ในกระดาษสรุปคำตอบ ให้เลือกว่าแต่ละกรณี X, Y หรือ Z นั้นตรงกับกราฟใด

(T12.2) หลุมดำปฐมภูมิ (PBH) (primordial black hole) ที่มีมวลน้อย ๆ สามารถก่อตัวขึ้นได้ในยุคแรกของเอกภพ คำถามต่อไปนี้ทั้งหมดเกี่ยวข้องกับ PBH ในกรณีนี้ ไม่ต้องพิจารณากระบวนการใดก็ตามที่เพิ่มมวลให้กับหลุมดำ

(T12.2a) **การระเหยของ PBH ในยุคปัจจุบัน (PBH evaporating at the current epoch) :**
นักเรียนอาจสังเกตจากคำตอบของคำถามก่อนหน้านี้ว่า หลุมดำที่มีมวลเท่ากับมวลดวงอาทิตย์จะใช้เวลานานในการระเหยหมด อย่างไรก็ตาม เนื่องจาก PBH อาจมีมวลน้อยกว่ามาก เราจึงอาจได้สังเกตการณ์การระเหยของหลุมดำปฐมภูมิในยุคปัจจุบัน

จงหาค่าของมวลเริ่มต้น M_0, PBH (ในหน่วยกิโลกรัม), รัศมีชวาร์ตชิลด์ $R_{\text{SC}, \text{PBH}}$ (ในหน่วยเมตร), และอุณหภูมิ T_{PBH} (ในหน่วยเคลวิน) ของหลุมดำที่อาจระเหยไปหมดสิ้นในยุคปัจจุบัน กล่าวคือ หลุมดำที่มีอายุขัย $\tau_{\text{PBH}} = 14$ พันล้านปี [4]

(T12.2b) **การก่อตัวของ PBH (formation of a PBH) :** ในเอกภพยุคแรกที่มืงค์ประกอบหลักเป็นการแผ่รังสี (radiation-dominated) สเกลแฟคเตอร์ (scale factor) จะแปรเปลี่ยนดังความสัมพันธ์ $a(t) \sim t^{1/2}$ ในยุคนี้ PBH เกิดขึ้นเนื่องจากการยุบตัวของพลังงานทั้งหมดที่มีอยู่ในบริเวณที่มีขนาดทางกายภาพ (physical size) ct โดยที่ t คืออายุของเอกภพในขณะนั้น

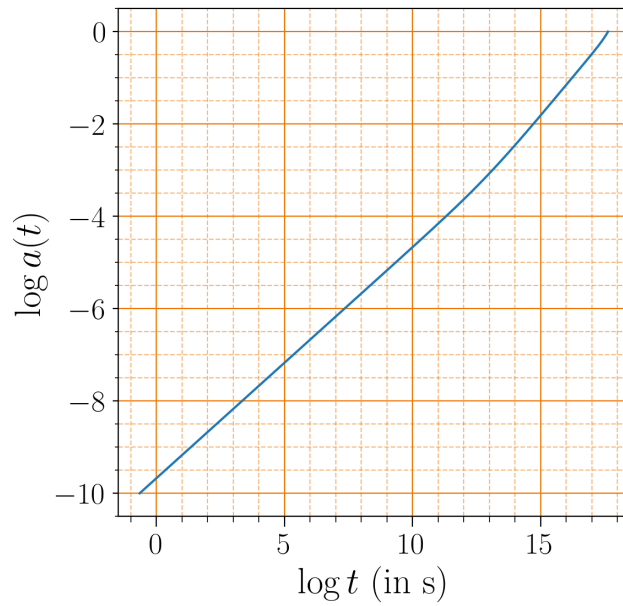
PBH ที่มีมวล $1 \times 10^{12} \text{ kg}$ ก่อตัวขึ้นเมื่ออายุของเอกภพอยู่ที่ประมาณ $1 \times 10^{-23} \text{ s}$ จงคำนวณอายุของเอกภพ t_{20} เมื่อ PBH ที่มีมวล $1 \times 10^{20} \text{ kg}$ ก่อตัวขึ้น [6]

(T12.2c) **สเปกตรัมที่อาจสังเกตได้ของรังสีฮอว์คิงจาก PBH :** พิจารณา PBH ที่มีมวลเริ่มต้น $1 \times 10^{10} \text{ kg}$ ซึ่งระเหยหมดสิ้นเมื่อสิ้นสุดอายุขัยซึ่งเท่ากับ τ_{PBH} สำหรับข้อย่อยนี้ ให้สมมติเพื่อความสะดวกว่ารังสีฮอว์คิงส่วนใหญ่ถูกปล่อยออกมา ณ เวลาอายุขัยนี้ โดยมีอุณหภูมิสอดคล้องกับมวลเริ่มต้น นอกจากนี้ ให้พิจารณาว่า scale factor ของเอกภพสอดคล้องกับความสัมพันธ์ $a(t) \sim t^{2/3}$

จงคำนวณความยาวคลื่น ณ จุดสูงสุด (peak wavelength) ของรังสีฮอว์คิงที่สังเกตได้บนโลก λ_{earth} ในยุคปัจจุบัน (ที่ $t = 14$ พันล้านปี) [5]

(T12.2d) **รังสีคอสมิกพลังงานสูงจาก PBH :** สมมติว่ารังสีฮอว์คิงที่ปล่อยออกมา ณ เวลา t ที่กำหนดให้ สอดคล้องกับโฟตอนที่ถูกปลดปล่อยออกมาด้วยพลังงาน $k_B T_{\text{bh}}(t)$ นอกจากนี้ อุณหภูมิสูงสุดที่เป็นไปได้สำหรับหลุมดำคืออุณหภูมิของพลังค์ T_{Planck} โดยที่ $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19} \text{ GeV}$

วิวัฒนาการ (evolution) ของ scale factor ในช่วงเวลาที่เกี่ยวข้องได้แสดงไว้ในรูปต่อไปนี้ scale factor ในปัจจุบันถูกกำหนดให้เป็น 1 ค่า $t(s)$ บนแกนเวลาแสดงถึงอายุของเอกภพในหน่วยวินาที



หากผู้สังเกตการณ์บนโลกตรวจพบโฟตอนที่มีพลังงาน $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$ eV จงหา **[10]**
ค่าที่มากที่สุดและน้อยที่สุดที่เป็นไปได้ของมวลเริ่มต้นของ PBH (M_0^{max} และ M_0^{min}
ตามลำดับ) ที่เป็นสามารถเป็นแหล่งกำเนิดของโฟตอนนี้