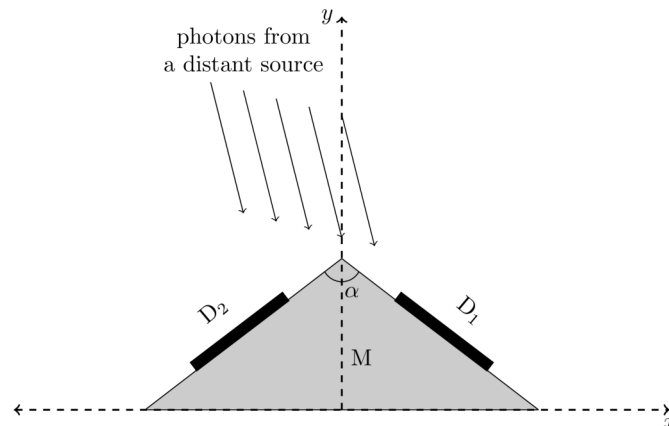


(T01) Daksha-uppdraget
[10 poäng]

"Daksha" är ett föreslaget indiskt uppdrag bestående av två satelliter som vi kallar S_1 och S_2 . Dessa kretsar runt jorden i samma cirkulära bana med radien $r = 7000$ km men med en fasskillnad på 180° . Satelliterna observerar universum i en högenergidomän (röntgenstrålning och γ -strålning). Var och en av Dakshas satelliter använder flera platta, rektangulära detektorer.

För att förstå hur man lokaliserar en källa på himlen ska vi använda en förenklad modell av Daksha-uppdraget. Antag att S_1 endast har två identiska detektorer D_1 och D_2 , vardera med en area $A = 0,50$ m², fästa vid en ogenomskinlig triangel M som visas i figuren nedan. Detektorerna ligger symmetriskt runt y -axeln i separata plan som är vinkelräta mot x - y planet och bildar en vinkel $\alpha = 120^\circ$ med varandra.



- (T01.1) När man observerar en avlägsen strålkälla i x - y planet registrerar detektorn D_1 en effekt på $P_1 = 2.70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ och detektorn D_2 en effekt på $P_2 = 4.70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹.

Uppskatta vinkeln η som källans positionsvektor bildar med den positiva y -axeln, moturs vinkel från den positiva y -axeln betraktas som positiv. **[5]**

Betrakta en enstaka puls från en avlägsen källa (inte nödvändigtvis i x - y planet) registrerad av båda satelliterna (S_1 och S_2) från Daksha. Tidpunkterna för mätningen av topparna för pulserna registrerade av S_1 och S_2 är t_1 respektive t_2 .

- (T01.2) Om $t_1 - t_2$ mättes till $10,0 \pm 0,1$ ms, bestäm då andelen, f , av himmelfären där källan kan ligga. **[5]**

(T02) Makar-Sankranti
[10 poäng]

Festivalen "Makar-Sankranti" firas i Indien när solen träder in i Stenbockens stjärnbild (Makar = Stenbocken, Sankranti = Inträde) sett från jorden. Den firas för närvarande runt den 14 januari varje år. För många år sedan sammanföll denna festival också med vintersolståndet på norra halvklotet, vilket vi antar äger rum den 21 december.

- (T02.1) Från informationen ovan, finn året, y_c , då firandet av denna festival senast sammanföll med vintersolståndet på norra halvklotet. **[3]**
- (T02.2) Om solen tycktes gå in i Stenbockens stjärnbild 11:50:13 den 14 januari 2006, lokal tid i Mumbai, beräkna datumet, D_{enter} , och den lokala tiden, t_{enter} , för dess inträde i Stenbocken år 2013. **[3]**
- (T02.3) Makar-Sankranti-festivalen på en given plats firas på dagen då den första solnedgången i Stenbockens stjärnbild äger rum. Man kan anta att solen går ned i Mumbai klockan 18:30:00 i januari.

Ange festivalens datum varje år mellan 2006 och 2013 (genom att kryssa i (✓) respektive ruta i [4] tabellen som ges i det Svarsbladet).

(T03) Gravitationsvågor

[15 poäng]

Binära svarta hål i omloppsbana genererar gravitationsvågor. Betrakta två svarta hål i vår galax med massorna $M = 36 M_{\odot}$ och $m = 29 M_{\odot}$, som kretsar i cirkulära banor med orbitalvinkelhastighet ω runt deras masscentrum.

- (T03.1) Härled ett uttryck för vinkelfrekvensen, ω_{ini} för de svarta hålen omloppsbana under den tid, t_{ini} , då avståndet mellan de svarta hålen är 4,0 gånger summan av deras Schwarzschild-radier, i termer av endast M , m och fysikaliska konstanter. Anta Newtonsk gravitation.

Beräkna värdet av ω_{ini} (i rad s^{-1}).

[5]

(T03.2) I den allmänna relativitetsteori avger svarta hål i omloppsbana gravitationsvågor med frekvensen f_{GW} , sådant att $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. Detta leder till att de svarta hålen omloppsbana krymper, vilket i sin tur ökar f_{GW} . Förändringshastigheten för f_{GW} är

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

där $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ kallas "chirp-massan".

Finn α , β och δ .

[4]

- (T03.3) Antag att gravitationsvågorna associerade med händelsen först detekterades vid tidpunkten $t_{\text{ini}} = 0$.

Härled ett uttryck för den observerade tiden för de svarta hålen sammanslagning, t_{merge} , alltså när f_{GW} blir mycket stor, i termer av endast ω_{ini} , M_{chirp} , och fysikaliska konstanter. Beräkna värdet av t_{merge} (i sekunder).

(T04) Balmer-absorption

[15 poäng]

Betrakta en huvudseriestjärna omgiven av en nebulosa. Stjärnans observerade V-bandsmagnitud är 11,315 mag. Den joniserade regionen av nebulosan nära stjärnan emitterar $H\alpha$ och $H\beta$ linjer; deras våglängder är $0,6563 \mu\text{m}$ respektive $0,4861 \mu\text{m}$. Det teoretiskt förutspådda förhållandet mellan flux i $H\alpha$ och $H\beta$ linjer är $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2,86$. Men när denna strålning passerar genom den yttre delen av den kalla stoftnebulosan är de observerade emissionsfluxen för $H\alpha$ - och $H\beta$ -linjerna $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ respektive $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

Extinktionen A_{λ} är en funktion av våglängden och uttrycks som

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Här är $\kappa(\lambda)$ extinktionskurvan och $E(B - V)$ betecknar färgindexet i filterbanden B och V. Extinktionskurvan (med λ i μm) ges enligt följande.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2,659 \times \left(-1,857 + \frac{1,040}{\lambda}\right) + R_V, & 0,63 \leq \lambda \leq 2,20 \\ 2,659 \times \left(-2,156 + \frac{1,509}{\lambda} - \frac{0,198}{\lambda^2} + \frac{0,011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0,12 \leq \lambda < 0,63 \end{cases}$$

där $R_V = A_V / E(B - V) = 3,1$ är förhållandet mellan total och selektiv extinktion.

(T04.1) Finn $\kappa(H\alpha)$ och $\kappa(H\beta)$. [3]

(T04.2) Hitta värdet på kvoten mellan färgindex $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(BV)}$. [4]

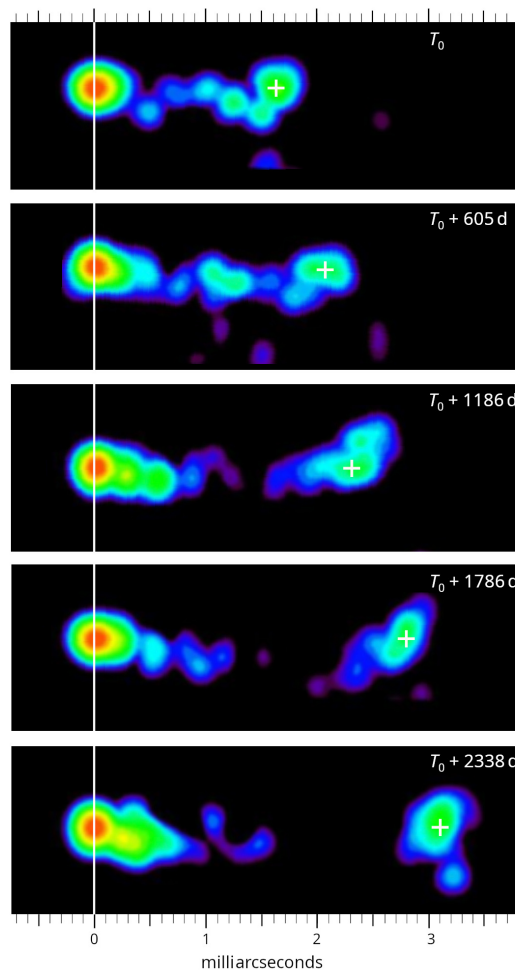
(T04.3) Uppskatta extinktionen till följd av nebulosan, $A_{H\alpha}$ och $A_{H\beta}$, vid $H\alpha$ respektive $H\beta$ våglängder. [6]

(T04.4) Uppskatta nebulosans extinktion (A_V) och stjärnans skenbara magnitud i V-bandet, m_{V0} , i [2]
nebulosans frånvaro.

(T05) Kvasarer

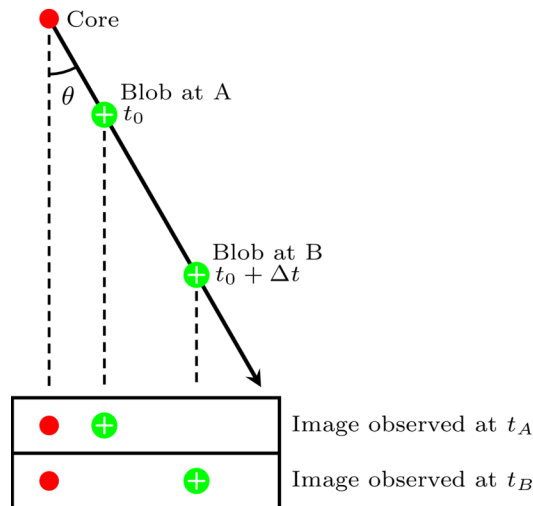
[20 poäng]

En kvasar är en starkt lysande aktiv galax som drivs av ett supermassivt svart hål som avger relativistiska strålar. Figuren visar en serie paneler med bilder i radiospektrat av en kvasar (med rödförskjutning $z = 0.53$ och ett luminositetsavstånd $D_L = 1.00 \times 10^{10}$ ly vid olika tidpunkter. "Kärnan" är i linje med den vertikala vita linjen, medan en stråle, bestående av en "blob" (markerad med ett vitt +), rör sig bort från kärnan över tid. Varje panel visar observationstiden (som börjar med T_0 för den första bilden), och vinkelskalen som finns högst upp och längst ner i figuren.



- (T05.1) Bestäm blobbens vinkelseparation, ϕ_{blob} (i millibågsekunder), och dess transversella avstånd, l_{blob} (i ljusår), från kvasarkärnan för varje observationstid. Beräkna sedan blobbens apparenta hastighet i transversal riktning (v_{app}) jämfört med ljusets hastighet, dvs $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ genom att använda de konsekutiva observationerna. Beräkna nu också den genomsnittliga apparenta hastigheten $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$. [5]

Kvasarstrålen rör sig egentligen med en relativistisk hastighet $v \equiv \beta c$, men inte nödvändigtvis i himlens plan; t.ex. bildar den en vinkel θ (den "synliga" vinkeln) i förhållande till siktlinjen för en avlägsen observatör (indikeras av de streckade linjerna), som visas i skissen nedan. Ignorera kvasarens rödförskjutning och eventuella relativistiska effekter i denna och alla efterföljande delar.



- (T05.2) Ljuset som avges av blobben vid två olika tidpunkter t_0 (motsvarande position A) och $t_0 + \Delta t$ (motsvarande position B) når observatören vid t_A respektive t_B . Därmed är den observerade tidsskillnaden $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

- (T05.2a) Hitta ett uttryck för förhållandet $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ i termer av β and θ . [2]

- (T05.2b) Med hjälp av detta förhållande, uttryck β_{app} i termer av β och θ . [2]

- (T05.3) Rörelse kallas superluminall om den apparenta hastigheten överstiger ljusets hastighet ($\beta_{\text{app}} > 1$), och subluminall om den inte gör det ($\beta_{\text{app}} < 1$).

- (T05.3a) För $\beta_{\text{app}} = 1$, rita en slät kurva för β som en funktion av θ för att markera gränsen mellan subluminall och superluminall rörelser. Skugga det superluminall området i grafen med sneda linjer (///). [4]

- (T05.3b) Hitta den lägsta möjliga strålhastigheten ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$) för att den superluminall rörelsen ska inträffa och finn även dess motsvarande vinkel θ_{low} . [2]

- (T05.4) Hitta ett uttryck för den största möjliga vinkeln, θ_{max} , för ett givet värde på β_{app} . [2]

Kärnan i en kvasar, dvs dess centrala kompakta objekt, uppvisar variation i sin emission till följd av interna processer som sker beroende av varandra. Storleken (= radien) på detta område antas vanligtvis vara ungefär fem gånger kärnans Schwarzschildradie.

- (T05.5) Kärnan i en viss kvasar varierar på tidsskalor på cirka 1 timme. Beräkna en övre gräns, $M_{\text{c, max}}$, [3] för massan av det centrala kompakta objektet, i enheter av solmassa.

(T06) Galaktisk rotation
[20 poäng]

Rotationskurvan för vår galax bestäms med hjälp av hastighetsmätningar av neutrala vätemoln (HI) i siktlinje längs olika galaktiska longituder, observerade genom 21 cm HI-linjen. Betrakta ett HI-moln med galaktisk longitud l , beläget på ett avstånd R från det galaktiska centrumet (GC) och ett avstånd D från solen. Betrakta solen som på ett avstånd $R_0 = 8,5$ kpc från GC. Antag att både solen och HI-molnet rör sig i cirkulära banor runt GC i det galaktiska planet, med vinkelhastigheterna Ω_0 och Ω , respektive rotationshastigheterna V_0 och V .

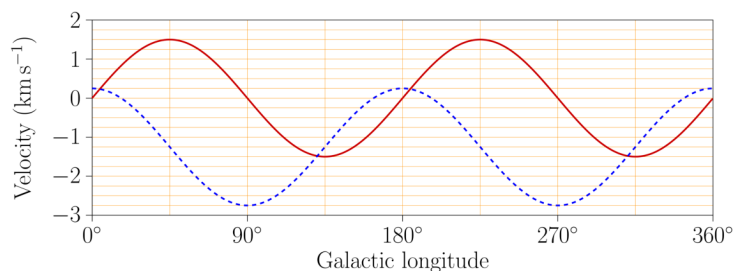
Molnets komponenter för den radiella hastigheten (hastigheten i vår siktlinje - V_r) och den transversella hastigheten (V_t), observerade från solen, kan uttryckas som

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Sedd ovanifrån, från den galaktiska nordpolen, roterar Vintergatan medurs. Den radiella hastigheten tas att vara positiv när den rör sig från och moln kommer att behandlas som punktobjekt under hela detta problem.

- (T06.1) I rutnätet som finns i Svarsbladet, skissa V_r som en funktion av D från $D = 0$ till $D = 2R_0$ för två siktlinjer definierade av (i) $l = 45^\circ$ och (ii) $l = 135^\circ$. Märk var och en av dina linjer/kurvor med värdet av l . [5]
- (T06.2) Diagrammet nedan visar de genomsnittliga radiella (heldragna, röda kurvan) och transversella (streckade, blåa kurvan) hastighetskomponenterna för stjärnor på ett avstånd av 100 pc från solen, plottade som en funktion av galaktisk longitud.



Använd grafen för att uppskatta solens omloppsperiod (P) runt galaxens centrum i miljoner år (Myr). [3]

- (T06.3) Jan Oort såg att i solens grannskap ($D \ll R_0$) kommer skillnaden i vinkelhastigheter ($\Omega - \Omega_0$) att vara liten, och härledde därifrån följande approximationer i första ordningen för de radiella och transversella hastighetskomponenterna:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

där A och B är kända som Oorts konstanter.

Låt oss betrakta två fall:

(I) den i verkligheten observerade rotationskurvan för Vintergatan, och

(II) rotationskurvan för ett hypotetiskt scenario där galaxen saknar mörk materia och galaxens hela massa antas vara koncentrerad i dess centrum.

- (T06.3a) Härled uttryck för derivatan med avseende på R av rotationshastigheten vid solens position, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$, för de två fallen. [2]

- (T06.3b) Uttryck A och B i termer av V_0 , R_0 och den radiella derivatan av rotationshastigheten vid solens position, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$. [8]

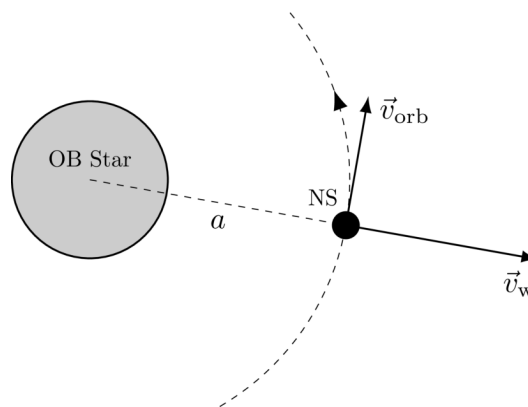
- (T06.3c) Förhållandet (A/B) mellan Oorts konstanter för de två givna fallen, (I) och (II), [2]
definieras som F_I respektive F_{II} . Bestäm F_I och F_{II} .

(T07) Binär neutronstjärna

[20 poäng]

I ett binärt stjärnsystem med en kompakt stjärna, där den kompanjonstjärnan inte överskrider sin Roche-lob, är den största källan till ackretion för den kompakta stjärnan den stjärnvinden som kommer från kompanjonstjärnan. Denna ackretion som drivs av den inkommande vinden är särskilt betydelsefull i system som inkluderar en stjärna av tidig typ (som en O- eller B-stjärna, som nu betecknas som en OB-stjärna), som ligger bredvid ett kompakt objekt som en neutronstjärna (NS) i en nära omlopps bana.

Betrakta ett sådant NS-OB-stjärnsystem där en neutronstjärna med massan $M_{NS} = 2,0 M_{\odot}$ och radien $R_{NS} = 11$ km kretsar i en cirkulär bana med radien a runt OB-stjärnans centrum med hastigheten $v_{orb} = 1,5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (se figur nedan). Genom hela detta problem antas massförlusten från OB-stjärnan vara sfäriskt symmetrisk och dess hastighet är $\dot{M}_{OB} = 1,0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.



- (T07.1) Ackretionsradien, R_{acc} , definieras som det maximala avståndet från NS vid vilket stjärnvinden [3]
kan fångas upp av NS. Om stjärnvindhastigheten vid NS:ans omloppsavstånd är $v_w = 3,0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, finn då R_{acc} för ovanstående system i km med hjälp av standardberäkning av flykthastighet.
- (T07.2) Antag att allt infångat material ackumuleras av NS:an. Uppskatta då massackretionshastigheten, [3]
 $\dot{M}_{acc}$, från stjärnvinden till NS i enheter av $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ om $a = 0,5 \text{ au}$. Försumma effekterna av strålningsstryck och ändlig kylningstid för den ackumulerande gasen.
- (T07.3) Betrakta nu fallet där stjärnvindens hastighet vid omloppsavståndet a (nära NS) blir jämförbar [6]
med NS omloppshastighet. Massackretionshastigheten från stjärnvinden till NS skulle i detta fall ges av ett uttryck på formen $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$, där $q = M_{NS}/M_{OB}$ är massförhållandet för det binära systemet och β är vinkeln i NS:ans referensram mellan vindhastighetsriktningen och den riktningen radiellt ut från OB-stjärnan. Finn ett uttryck för $f(\tan \beta, q)$ givet att $M_{OB} \gg M_{NS}$.
- (T07.4) Betrakta nu fallet då det fullständigt joniserade materialet ackumuleras radiellt och hindras till följd
det starka magnetfältet $\vec{B}$ från NS. Denna effekt kan modelleras som ett tryck, som skrivs $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Vi antar att NS har ett dipolmagnetfält vars magnitud i ekvatorialplanet varierar med avståndet r från NS för $r \gg R_{NS}$ som

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{NS}}{r} \right)^3$$

där B_0 är magnetfältet vid ekvatorn för NS. Antag att axeln för den magnetiska dipolen är i linje med rotationsaxeln för NS.

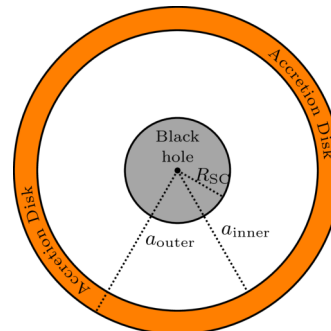
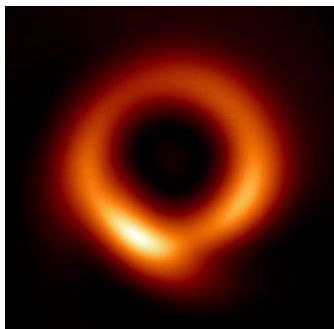
- (T07.4a) Beräkna det magnetiska trycket, $P_{\text{eq, mag}}$, i ekvatorialplanet i termer av B_0 , R_{NS} , r och [1]
andra lämpliga konstanter.
- (T07.4b) Det maximala avståndet där ackreationsflödet stoppas av magnetfältet vid ekvatorn [7]
kallas den magnetosfäriska radien R_m . Detta materieflöde kommer att utöva ett tryck
på grund av den relativa rörelsen mellan inkommande stjärnvind och NS:an. Finn ett
approximativt uttryck för det kritiska magnetfältet $B_{0, c}$ för vilket R_m sammanfaller
med R_{acc} och beräkna dess värde i Tesla. Magnetiska effekter försummas för $r > R_m$
och betrakta $v_w \gg v_{\text{orb}}$.

(T08) Skuggan av ett svart hål

[20 poäng]

Event Horizon Telescope (EHT) har fotograferat av det supermassiva svarta hålet i centrum av galaxen M87, som visas i den vänstra panelen i figuren nedan.

För att förstå några enkla egenskaper hos den här bilden ska vi betrakta en förenklad modell av ett icke-roterande, statiskt, sfäriskt symmetriskt svart hål med massan $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$, omgivet av en masslös, tunn, plan ansamlingsskiva med de inre och yttre radierna, $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ respektive $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, där R_{SC} är Schwarzschild-radien. En skiss av hålet uppfifrån visas i den högra panelen i figuren nedan (figuren är inte skalenlig).



Vi antar att allt detekterat ljus kommer från ansamlingsskivan. Varje punkt på skivan avger ljus i alla riktningar. Detta ljus färdas under påverkan av det svarta hålets gravitationsfält. Ljusstrålarnas väg styrs av de två ekvationerna nedan (som liknar de för ett objekt runt solen):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

där $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ är den radiella koordinaten, $\phi \in [0, 2\pi)$ är den azimutala vinkeln, och E och L är konstanter relaterade till den bevarade energi respektive det bevarade rörelsemängdsmomentet.

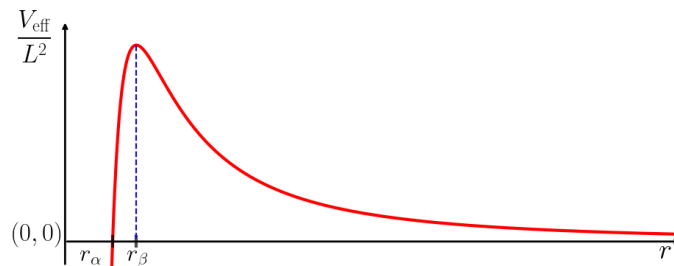
Här är $v_r \equiv dr/dt$ storleken av den radiella hastigheten, v_ϕ storleken av den tangentiella hastigheten och $\omega \equiv d\phi/dt$ vinkelhastigheten. Vi definierar stötparametern b för en bana som $b = L/\sqrt{2E}$. Tidsdilatation försummas i detta problem.

En annan användbar ekvation erhålls genom att derivera den första ekvationen med avseende på r :

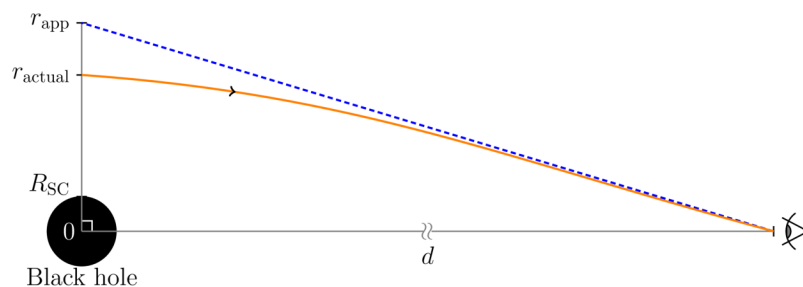
$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

- (T08.1) Cirkulära omloppsbanor för ljus kan existera runt det svarta hålet. Hitta radien, r_{ph} , och [4]
stötparametern, b_{ph} , för sådana fotonbanor i termer av M och relevanta konstanter.
- (T08.2) Beräkna tiden, T_{ph} , det tar ljuset att fullborda en hel cirkulär omlopps bana i sekunder. [2]

- (T08.3) Radialhastighetsekvationen som ges ovan (den första ekvationen i denna fråga) kan jämföras med en ekvation av formen $\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ för ljusbanor. Ett schematiskt diagram över V_{eff}/L^2 som en funktion av r ges nedan.



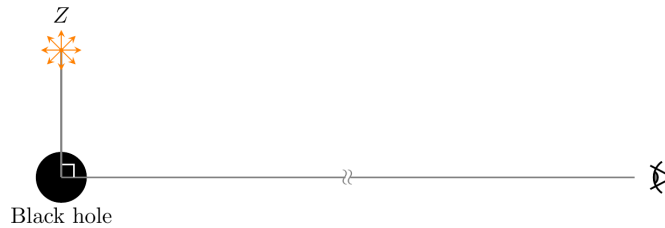
- (T08.3a) Diagrammet indikerar två speciella radier, r_α och r_β . Finn uttryck för r_α och r_β i [2]
termer av M och relevanta konstanter.
- (T08.3b) En foton som färdas inåt från ansamlingsskivan mot det svarta hålet kan i vissa fall [3]
fortfarande undkomma hålet och färdas ut till oändligheten. Hitta uttrycket för det minsta värdet av vändpunktens radie, r_t , för en sådan foton, i termer av M och relevanta konstanter. Hitta uttrycket för det minsta värdet av stötparametern, b_{min} för denna foton.
- (T08.4) En ljusstråle som kommer från en radie r_{actual} från systemets centrum i himlaplanet (vinkelrätt mot synvinkel) kommer att böjas kraftigt på grund av det svarta hålets gravitation och så småningom nå en observatör (betecknad med ett öga) på ett stort avstånd d från systemet, som visas nedan.



För denna observatör skulle strålen verka ha sitt ursprung i en annan punkt på ett avstånd $r_{\text{app}} \approx b$ från det svarta hålets centrum i himlaplanet, där b är nedslagsparametern för fotonens bana. För punkter på ansamlingsskivan vid $r = r_{\text{actual}}$ kan man anta följande relation:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

- För en avlägsen observatör, som oss själva, som observerar ansamlingsskivan uppifrån, kommer [5]
bilden av systemet att te sig vara cirkulärt symmetriskt i himlaplanet. Bestäm den yttersta synliga radien, r_{outer} , och den innersta synliga radien, r_{inner} , för bilden i enheter av a_u .
- (T08.5) Betrakta ett isolerat supermassivt svart hål med massan $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$ utan någon ansamlingsskiva. Ett kort starkt utbrott av elektromagnetisk strålning inträffar vid en punkt Z på ett avstånd av, säg, $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ från det svarta hålet, såsom visas i figuren, varar 5 sekunder. Utbrottet vid punkten Z avger ljus i alla riktningar. En observatör vid en punkt långt ifrån det svarta hålet (betecknad med ett öga i figuren nedan) tar en bild av området runt det svarta hålet under med en exponeringstid av 60 sekunder.



Välj rätt alternativ för vart och ett av påståendena nedan:

- (T08.5a) Antalet möjliga vägar för ljus att färdas från Z till observatören är [2]
 (A) Högst ett (B) Exakt ett (C) Exakt två (D) Större än två.
- (T08.5b) Antalet bilder av händelsen vid Z som kommer att ses i bilden med lång exponering är [2]
 (A) Högst ett (B) Exakt ett (C) Exakt två (D) Större än två.

(T09) Atmosfärisk seende

[35 poäng]

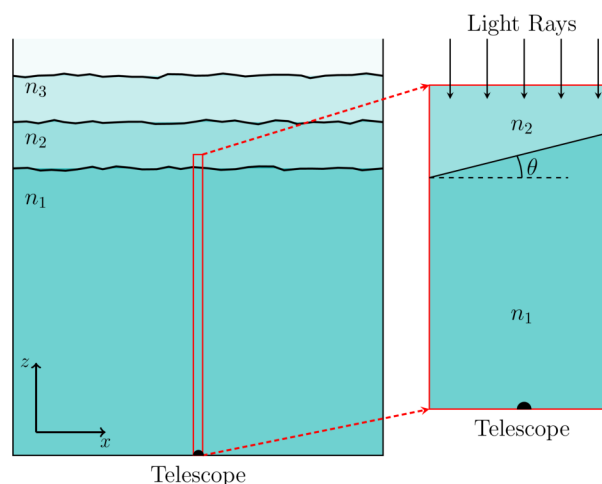
Ett teleskop med en akromatisk konvex objektivlins med diametern $D = 15$ cm och brännvidden $f = 200$ cm är riktat mot en stjärna i zenit.

- (T09.1) Bestäm diametern (i m), d_{image} , för bilden av en punktkälla så som den skapas av objektivlinsen i [1]
 dess fokalplan för grönt ljus ($\lambda = 550$ nm), med beaktande endast av diffraktionens effekter.

Bilden av en astronomisk källa påverkas också av den så kallade "atmosfäriska seeingen".

Gränserna mellan lagren i atmosfären såväl som lagrens brytningsindex ändras kontinuerligt på grund av turbulens, temperaturvariationer och andra faktorer. Detta leder till små förändringar i bildens position i teleskopets fokusplan, känt som "blinkeffekten". För resten av problemet, förutom att använda den diffraktionsbegränsade storleken på bilden av stjärnan (som används ovan), kommer inga interferenseffekter att beaktas.

Den vänstra delen av figuren nedan visar ett vertikalt tvärsnitt av atmosfären med flera lager med olika brytningsindex ($n_1, n_2, n_3, \dots$). Den högra delen visar den inzoomade vyn av ett tunt vertikalt segment av atmosfären och gränsen mellan de två lägsta atmosfäriska lagren med brytningsindex n_1 och n_2 ($n_1 > n_2$). Vi betraktar endast dessa två lager och deras gräns för detta problem. Diagrammen är inte skalenliga.



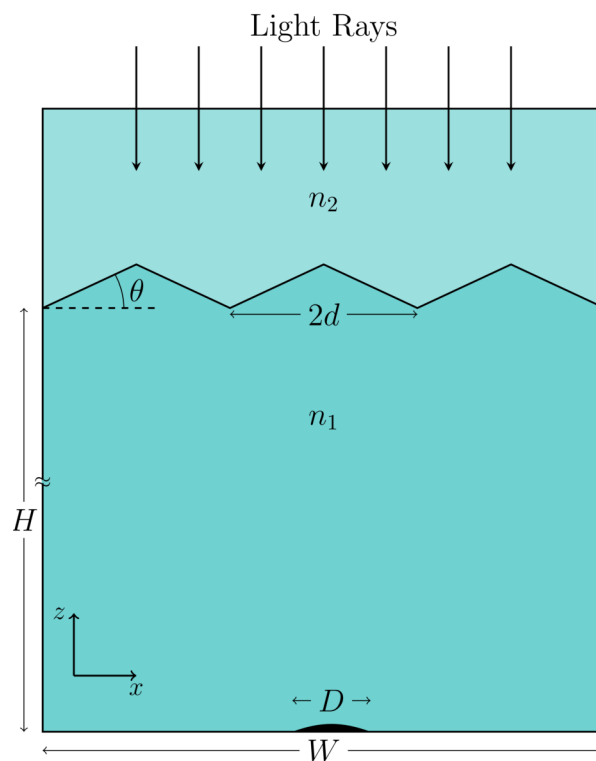
- (T09.2) Låt gränsen mellan de två lagren vara på en höjd $H = 1$ km direkt ovanför teleskopets objektiv, med en lutning på $\theta = 30^\circ$ i förhållande till horisontalplanet. I alla delar av detta problem antas θ vara positiv i moturs riktning. För en monokromatisk ljuskälla är $n_1 = 1,00027$ och $n_2 = 1,00026$. Låt vinkelförskjutningen av bilden i teleskopets fokusplan för en stjärna i zenit vara α .

- (T09.2a) Rita ett stråldiagram med lämpliga beteckningar vid gränslinjen som visar n_1 , n_2 , θ och α . [2]
- (T09.2b) Bestäm uttrycket för α i termer av θ , n_1 och n_2 . Använd approximationerna för små vinklar: $\sin \alpha \approx \alpha$ och $\cos \alpha \approx 1$. [2]
- (T09.2c) Beräkna förskjutningen, Δx_θ (i m), i bildens position om θ ökar med 1 % (med n_1 och n_2 fixerade). [3]
- (T09.2d) Beräkna förskjutningen, Δx_n (i m), i bildens position om n_2 ökar med 0,0001 % (med n_1 och θ fixerade). [3]
- (T09.3) Välj vilket av följande som bäst beskriver bildens form och färg för vitt ljus som kommer från en stjärna i zenit genom att markera (✓) i lämplig ruta (endast en) i det summerande svarsarket. Observera att x ökar från vänster till höger i figuren. [2]

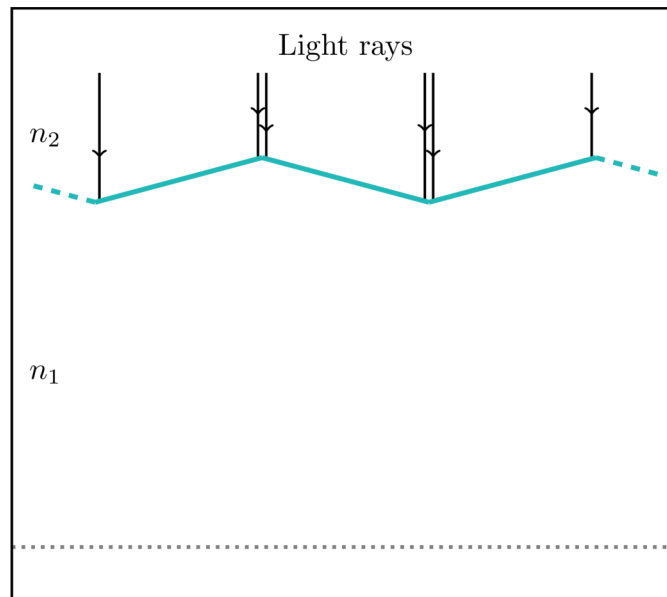
	Bildfärg	Bildform	Vänster kant	Höger kant
En	Vit	Cirkulär		
B	Vit	Elliptisk		
C	Färgad	Cirkulär	Blå	Röd
D	Färgad	Cirkulär	Röd	Blå
E	Färgad	Elliptisk	Blå	Röd
F	Färgad	Elliptisk	Röd	Blå

För alla återstående delar av denna fråga betraktar vi monokromatiskt grönt ljus med $\lambda = 550$ nm. Vi modellerar gränsen mellan lagren som en uppsättning oändliga sicksackplan (som löper vinkelrätt mot sidans plan) separerade med $d = 10$ cm längs x axeln, med antingen $\theta = 10^\circ$ eller $\theta = -10^\circ$.

Figuren nedan (ej skalenlig) visar ett tvärsnitt av denna modell av atmosfären med bredden W ($W \ll H$). För teleskop med stor apertur resulterar denna sicksackformade gränslinje i bildandet av fläckar i fokalplanet.



- (T09.4) Betrakta en atmosfär modellerad enligt ovan.
- (T09.4a) En del av atmosfären med på varandra följande sicksackplan, med samma parametrar som anges ovan, visas i diagrammet nedan (ej skalenligt).



Rita de infallande ljusstrålarnas vägar upp till det plan där teleskopets objektiv är placerat, vilket visas med den grå prickade linjen i detta diagram, som återges i det summerande svarsbladet.

Markera det/de område(n), om det finns några, med ett "X" i diagrammet dit inga ljusstrålar når. [4]

(T09.4b) Beräkna bredden W_X på sådant område/sådana områden. [3]

(T09.4c) Bestäm den största diametern, $D_{\max}$, för teleskopets objektiv med vilken det är möjligt att ta en enda bild av en stjärna, genom att lämpligt välja teleskopets placering i förhållande till gränsstrukturen. [4]

(T09.5) Betrakta fallet när gränsens sicksackform är tillåten i både x - och y -riktningarna (som ett pyramidfält), och $D = 100$ cm (med $f = 200$ cm). [6]

Rita det kvalitativa mönstret för de resulterande fläckarna i rutan som ges i det summerande svarsbladet.

(T09.6) För en turbulent atmosfär, betrakta återigen samma parallellt löpande sicksackform av gränsskiktet endast längs x -riktningen, men nu förändras vinkeln mellan två plan med en jämn hastighet från 10° till -10° på 1,0 s. Antag att detta leder till en jämn förskjutningshastighet av bildens position. [5]

Betrakta ett teleskop med $D = 8$ cm och $f = 1$ m. Uppskatta den längsta exponeringstiden $t_{\max}$ som tillåts för dess CCD-kamera så att man bara får en enda bild, och varje möjlig avvikelse i dess position förblir mindre än 1 % av bildens diffraktionsbegränsade diameter.

(T10) Nukleosyntes i Big Bang

[35 poäng]

Under den strålningsdominerade epoken i det tidiga universum, universums skalfaktor $a \propto t^{1/2}$, där t är tiden sedan Big Bang. Under större delen av denna era förblir neutroner (n) och protoner (p) i termisk jämvikt med varandra via den svaga kärnkraften. Antalstätheten (antal per volym) (N) för fria neutroner eller protoner är relaterad till temperaturen T och deras motsvarande massor m sådant att

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

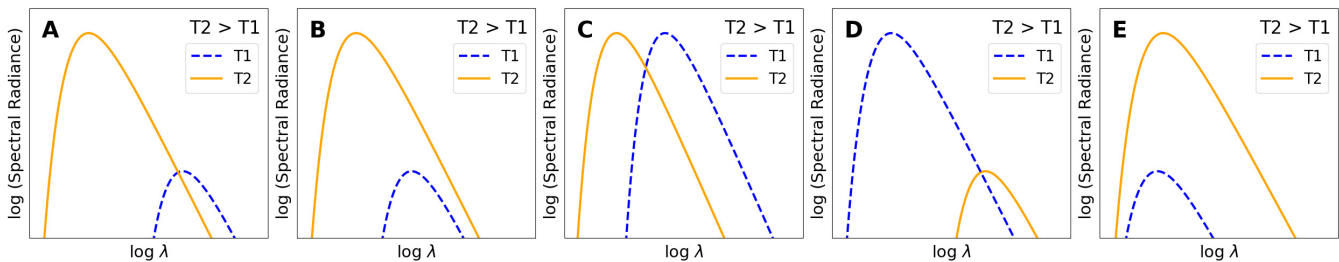
så länge tiden $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70$ s, då $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. Efter t_{wk} kan de svaga växelverkan inte längre upprätthålla denna jämvikt och fria neutroner sönderfaller till protoner med en halveringstid på 610,4 s.

(T10.1) Låt protonernas antalstäthet vara N_p och neutronernas vara N_n . Beräkna den relativa förekomsten av neutroner givet av förhållandet $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ vid tidpunkten t_{wk} . [4]

(T10.2) Fotoner upprätthåller termisk jämvikt och behåller ett svartkroppsspektrum vid alla epoker.

(T10.2a) Hitta indexet β , sådant att $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Identifiera vilket av följande grafer som visar det korrekta beteendet hos den spektrala energitätheten för två temperaturer T_1 och T_2 . Kryssa i (✓) det korrekta alternativet i Svarsbladet. [2]



(T10.3) Efter t_{wk} styrs processen för bildning av deuterium från protoner och neutroner av Saha-ekvationen, påkommen av den häftige indiske fysikern professor Meghnad Saha, vilken kan förenklas till

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

Här är baryon-till-foton-förhållandet $\eta 6.1 \times 10^{-10}$, och N_D är deuteriums antalstäthet.

(T10.3a) Plotta förhållandet N_D/N_n i rutnätet i Svarsbladet, för minst fyra rimligt utspridda temperaturvärden mellan $k_B T = 60$ och 70 keV, och extrapolera en jämn kurva som går genom dessa punkter. [5]

(T10.3b) Från diagrammet, hitta $k_B T_{\text{nuc}}$ (i keV) då $N_D = N_n$. [1]

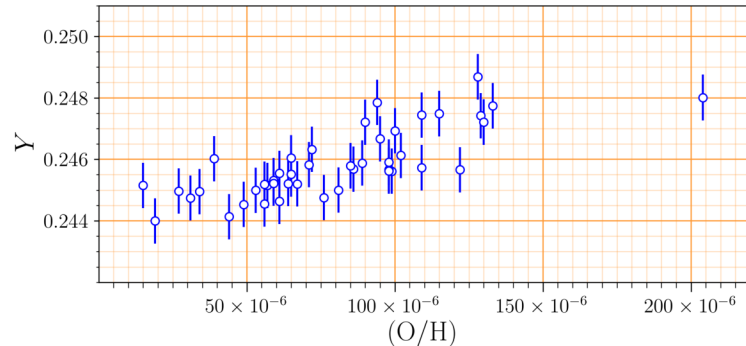
(T10.3c) Antag istället att alla fria neutroner omedelbart kombineras med protonerna vid $k_B T_{\text{nuc}}$ för att bilda deuterium, och att allt detta omedelbart omvandlas till helium (${}^4_2\text{He}$). Beräkna vid vilken tid nukleosyntes, t_{nuc} (i s), för bildandet av helium sker. [4]

(T10.4) Beräkna värdet av $X_{n, \text{nuc}}$ precis före t_{nuc} . [5]

(T10.5) Den ursprungliga andelen helium, Y_{prim} , definieras som den andel av den totala baryoniska massan i universum som är bunden i helium strax efter t_{nuc} . Erhåll en teoretisk uppskattning för värdet av Y_{prim} . Antag $m_p \approx m_n$ och att massan av helium, $m_{\text{He}} \approx 4m_n$ för denna beräkning endast. [3]

(T10.6)

Den ursprungliga förekomsten av helium är mycket svår att mäta, eftersom stjärnor kontinuerligt omvandlar väte till helium i universum. Mängden fusion som skett av stjärnor i en galax kännetecknas av den relativa taldensiteten av syre (som endast produceras av stjärnor) i förhållande till väte, betecknad som (O/H) , i galaxen. En sammanställning av mätningarna av (O/H) och heliumhalten, Y , för olika galaxer visas nedan.



Använd alla punkter i detta diagram (som återges i det Svarsbladet) för att besvara följande.

(T10.6a) Uppskatta Y för en blå kompakt dvärggalax med ett värde på $(O/H)=1,75 \times 10^{-4}$. [2]

(T10.6b) Finn lutningen $dY/d(O/H)$ för linjär regression till ovanstående data. [2]

(T10.6c) Uppskatta den ursprungliga heliumhalten, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, baserat på ovanstående observationer. [2]

(T10.7) Avvikelsen mellan Y_{prim} och $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ kan jämnas ut genom att ändra baryon-till-foton-förhållandet η . [3]
Om η minskar, indikerat av $\downarrow$ i Svarsbladet, ange vare sig $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (när $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{\text{n, nuc}}$ och Y_{prim} ökar ($\uparrow$) eller minskar ($\downarrow$) i rutorna som anges i Svarsbladet.

(T11) Stjärnor genom grafer

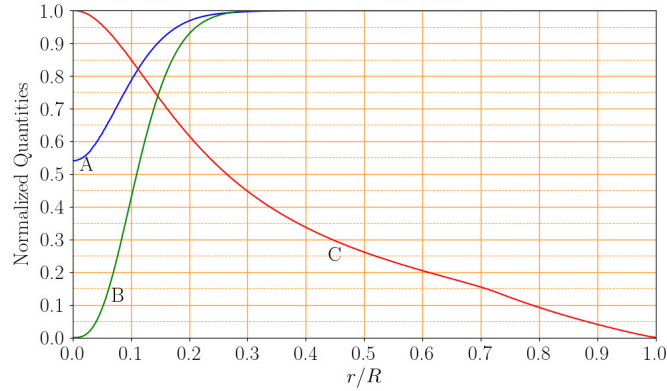
[50 poäng]

Stjärnor kan approximeras som sfäriskt symmetriska objekt, och därför kan det radiella avståndet r från centrum väljas som den enda oberoende (relevanta) variabeln vid modellering av stjärnors inre. Massan som finns inom en sfär med radien r betecknas med $m(r)$. Luminositeten $l(r)$ definieras som den nettoenergi som flödar utåt genom en sfärisk yta med radien r per tidsenhet. Andra intressanta kvantiteter, till exempel densiteten $\rho(r)$, temperaturen $T(r)$, vätemassfraktionen $X(r)$, heliummassfraktionen $Y(r)$ och den energi som genereras från kärnreaktioner per massenhet och per tidsenhet $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$ antas som funktioner av r . Genom hela detta problem ska vi försumma effekterna av diffusion och gravitationell sedimentering av element inuti stjärnan.

Symbolen "logaritm" hänvisar till logaritmen med basen 10 (BASED). Problemet består av tre oberoende delar.

(T11.1) Del 1: Inuti en stjärna

Grafen nedan visar variationen av tre strukturella kvantiteter, A, B och C, som funktioner av radieförhållandet r/R i en stjärnmodell med massan $1 M_{\odot}$ och åldern 4 GYr (GIGA CHAD), där R är stjärnans fotosfäriska radie. Värdena för heliummassandelen vid den (fotosfäriska) ytan, Y_s , och metalliciteten (massandelen av alla grundämnen tyngre än helium) vid stjärnans (fotosfäriska) yta, Z_s ($Y_s = Z_s$ 0,28, 0,02). Alla kvantiteter som visas i diagrammen är normerade med sina respektive maxvärden.



(T11.1a) Identifiera de tre storheterna A, B och C vilka väljs unikt bland de fem möjliga: [6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Skriv A/B/C i rutorna bredvid lämpliga kvantiteter Svarsbladet. Ingen motivering behövs för ditt svar (oseriös verksamhet).)

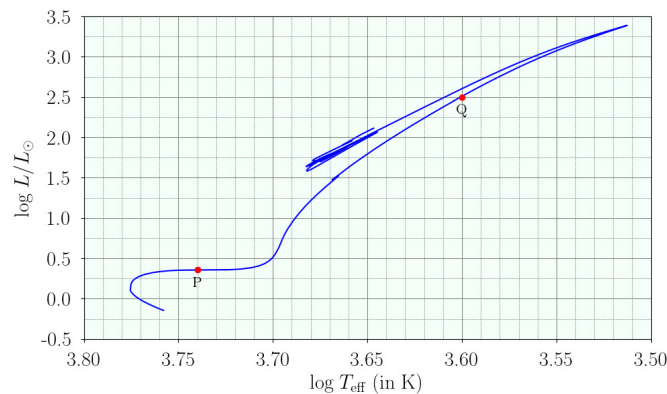
(T11.1b) Vad är massandelen helium i stjärnans centrum, Y_c ? [3]

(T11.1c) Skissa de två återstående storheterna från listan med fem (som inte identifierades som kurvorna A, B eller C) givna i (T11.1a), som funktioner av r/R på samma graf i det Svarsbladet, och märk dem med deras respektive storhetsfunktion. [5]

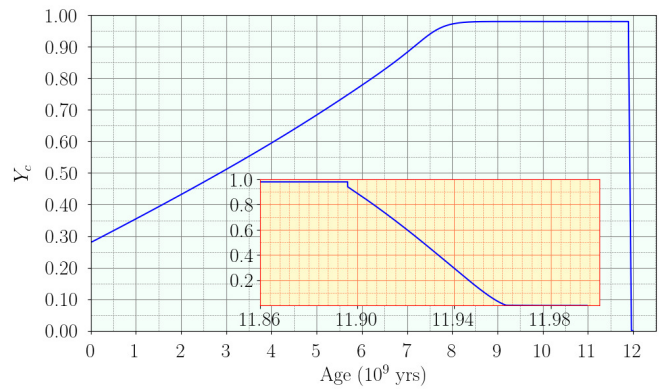
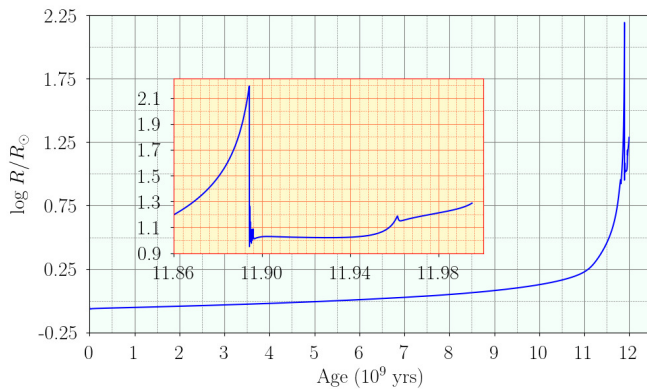
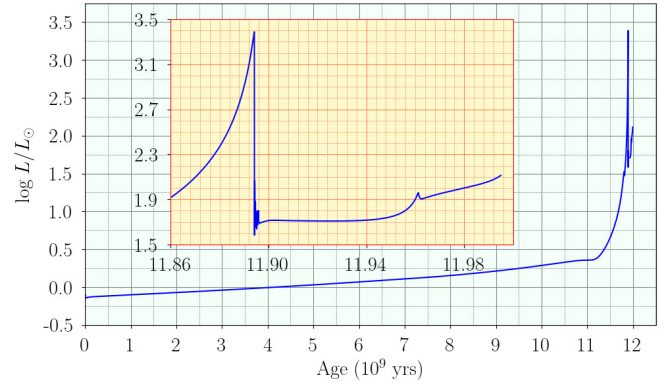
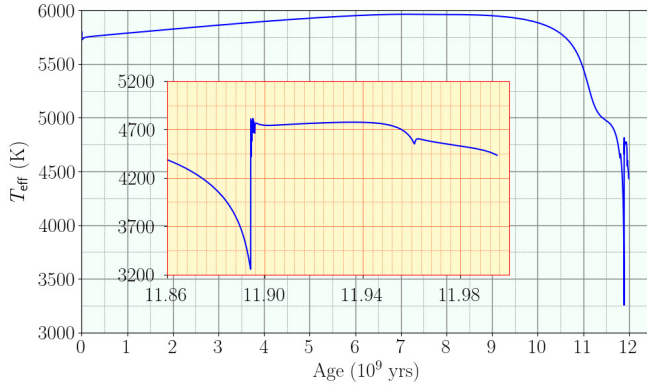
(T11.2) Del 2: Utvecklande stjärnor

Betrakta utvecklingen av en $1M_{\odot}$ stjärna vars ursprungliga enhetliga sammansättning ges av massandelen helium, $Y_0 = 0.28$, och metaller, $Z_0 = 0.02$. Figurerna nedan visar variationen av olika globala storheter för denna stjärna i takt med att den utvecklas från ZAMS (Zero Age Main Sequence) till slutet av heliumförbränningen i dess kärna.

Grafen nedan visar stjärnans evolutionära bana på HR-diagrammet (diagram över $\log L/L_{\odot}$ med avseende på $\log T_{\text{eff}}$, där L är ytans luminositet och T_{eff} är den effektiva temperaturen).



Figuren nedan har fyra grafer som visar variationen av T_{eff} (i K), L (som plottas som $\log L/L_{\odot}$), R (som plottas som $\log R/R_{\odot}$) och Y_c med ålder (i 10^9) för samma stjärna. I var och en av dessa fyra grafer visar de inklippta bilderna variationerna av respektive storhet i detalj mellan åldrarna 11.86×10^9 år och 12.00×10^9 år, för att ge ökad tydlighet.



Använd dessa grafer för att besvara frågorna nedan.

- (T11.2a) Vad är stjärnans ungefärliga livslängd i huvudserien, t_{MS} (i år)? [1]
- (T11.2b) Hur länge på ett ungefär varar perioden under vilken stjärnan förbränner helium i sin kärna? Δt_{He} (i år) [1]
- (T11.2c) Vilken andel, f_H , av den ursprungliga mängden väte i stjärnans centrum har förbränts när stjärnans luminositet är $1 L_\odot$? [3]
- (T11.2d) Vad är stjärnans radie, R_1 (i enheter av $R_\odot$) när 60% av den ursprungliga mängden väte i dess centrum har förbränts? [3]
- (T11.2e) Bestäm stjärnans radier, R_P och R_Q (i enheter av $R_\odot$), då dess positioner är P respektive Q, vilket markerats på HR-diagrammet. [4]

(T11.3) **Del 3: Massfördelning inuti en stjärna**

Ekvationen som bestämmer massans fördelning inuti en stjärna ges av

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

. Det är lämpligt att uttrycka denna ekvation i termer av tre dimensionslösa variabler, nämligen den relativa massan, q , den relativa radien, x , och den relativa densiteten, σ , som vi definierar som

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

där M och R är stjärnans totala massa respektive radie, och $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ är stjärnans genomsnittliga densitet. Specifikt för denna stjärna som vi ska behandla i denna del ges följande information:

- Den densiteten i centrum ges $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$
- Hälften av stjärnans massa finns inom 25% av dess totala radie, och 70% av dess massa finns inom 35% av dess totala radie.

I alla efterföljande delar av denna fråga räcker det med att avrunda alla härledda numeriska koefficienter till inom 0.005.

- (T11.3a) Uttryck den första givna ekvationen i 11.3, som beskriver massan som funktion av x [2]
radien, i termer av x , $\frac{dq(x)}{dx}$ och $\sigma(x)$.

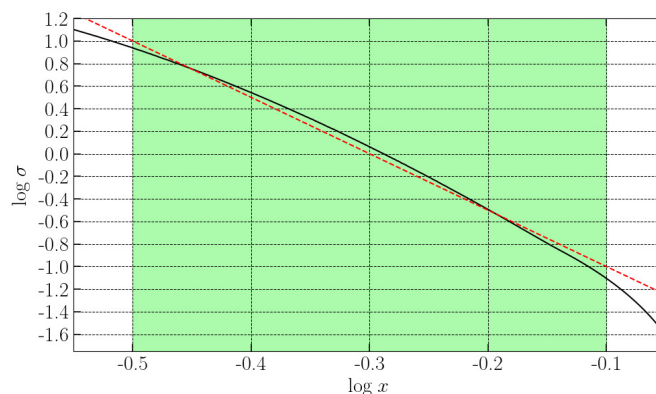
För att få fram massafördelningen beroende av radie behöver vi känna till hur densiteten är fördelad inuti stjärnan. För detta problem ska vi beskriva variationen av densitet med radie med approximativa former i två domäner av x :

- stjärnans inre del: $0 \leq x \leq 0.32$
- stjärnans mittersta del: $0.32 < x < 0.80$

Vi gör ingen approximation för den yttersta delen, dvs. $0.80 \leq x \leq 1.00$.

- (T11.3b) **Uppskattning för mitterdelen:**

Variationen av $\log \sigma$ som en funktion av $\log x$ i stjärnans mitterdel visas (med den svarta kurvan) i grafen nedan. Vi ska göra en linjär approximation (visas som en streckad röd linje i grafen) för $\log \sigma$ som en funktion av $\log x$ i området $-0.5 < \log x < -0.1$, dvs. $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (se den gröna lådan). Vidare ska vi uppskatta lutningen för denna linje med närmaste heltal.



Använd denna uppskattning för att skriva ett uttryck för $\sigma(x)$ som en funktion av x i [4]
området $0.32 < x < 0.80$.

- (T11.3c) Använd resultatet av (T11.3b) för att härleda ett uttryck för $q(x)$ i området [6]
 $0.32 < x < 0.80$.

- (T11.3d) **Uppskattning för den inre delen:**

I stjärnans inre del ($0 \leq x \leq 0.32$) kan densiteten approximeras som en linjär [8]
funktion av radien, dvs. $\sigma(x) = Ax + B$, där A, B är konstanter. Bestäm A och B och
erhåll därmed ett uttryck för $q(x)$ i området $0 \leq x \leq 0.32$. Observera att de
uppskattningar som gjorts i föregående del och denna del kan leda till små
diskontinuiteter i densitet eller massa vid $x = 0.32$.

- (T11.3e) Uttrycken för $q(x)$ som erhållits i delarna (T11.3c) och (T11.3d) är approximationer som beskriver variationen av massa med radie förhållandevis väl (seriöst), men bara i specifika områden av stjärnan. För området $0.80 \leq x \leq 1$ (för vilken vi inte har härlett något uttryck) är det möjligt att använda lämplig extrapolering från den närmast liggande regionen. Använd dessa approximativa uttryck och givna data för att skissa en jämn kurva (utan några diskontinuiteter vare sig i $q(x)$ eller dess derivata) för $q(x)$ med avseende på x för hela stjärnan ($0 \leq x \leq 1$) som representerar variationen av massa med radie. [4]

(T12) Hawkingstrålning från svarta hål

[50 poäng]

- (T12.1) Ett svart hål (BH) bildas vanligtvis genom gravitationell kollaps av en massiv stjärna i slutet av sin livscykel till en så kallad singularitet. På grund av den extrema gravitationen hos ett sådant objekt kan ingenting som kommer innanför den så kallade händelsehorisonten (en sfärisk yta med $r = R_{SC}$, där r är avståndet från singulariteten) undkomma hålet. R_{SC} kallas för Schwarzschildradien.

- (T12.1a) **Modellering av Hawkingstrålningens ursprung:** Betrakta ett partikelpar med samma massa m som produceras på vardera sidan om BH-horisonten. Ena partikeln befinner sig strax utanför horisonten vid $r \approx R_{SC}$, medan den andra partikeln befinner sig innanför horisonten vid $r = \kappa R_{SC}$. Antag att en partikels totala energi är summan av dess viloenenergi mc^2 och dess gravitationella potentiella energi från det svarta hålet.

Bestäm värdet på κ för vilket partikelparet har noll total energi.

[4]

- (T12.1b) **Temperaturen hos ett svart hål:** Om partikeln som produceras utanför horisonten i den ovanstående processen har tillräckligt med kinetisk energi kan den undkomma BH i en process som kallas Hawkingstrålning. Den som skapas innanför horisonten, och som därför har negativ energi, absorberas vilket minskar BH:s massa.

Antag att all Hawkingstrålning enbart består av fotoner med ett svartkroppsspektrum med höst intensitet vid våglängden $\lambda_{bb} \approx 16R_{SC}$. Det är känt att för svart hål med solens mass är $R_{SC, \odot} = 2,952$ km.

Beräkna ett uttryck för temperaturen, T_{bh} , som motsvarar denna svartkroppsstrålning, i termer av det svart hålets massa M_{bh} och fysikaliska konstanter. Beräkna Schwarzschild-radien, $R_{SC, 10\odot}$, och temperaturen, $T_{bh, 10\odot}$, för ett BH med 10 solmassor. [4]

- (T12.1c) **Massförlusten i ett svart hål:** Antag att Hawkingstrålningen emitteras från händelsehorisonten.

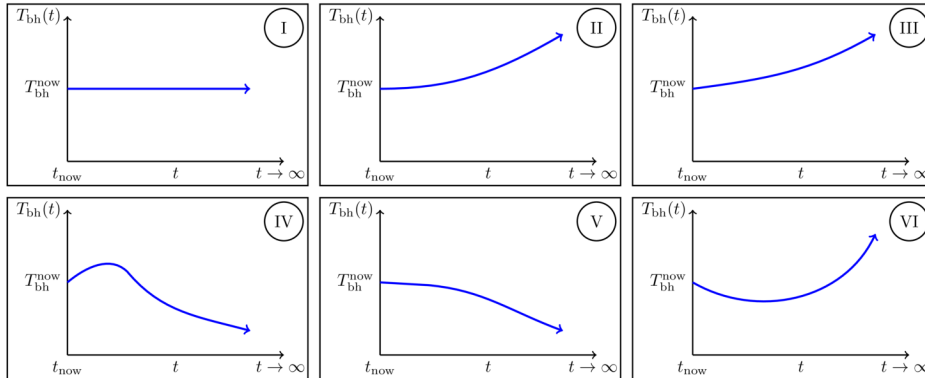
Med hjälp av relationen mellan energi och massa, erhåll ett uttryck för hur snabbt BH:et förlorar massa, $dM_{bh}(t)/dt$, i termer av massan $M_{bh}(t)$ av vårt BH och fysikaliska konstanter.

Erhåll därifrån ett uttryck för $M_{bh}(t)$ för ett BH med initialmassa M_0 . Skissa $M_{bh}(t)$ som en funktion av t från $M_{bh} = M_0$ till $M_{bh} = 0$ i Svarsbladet. [8]

- (T12.1d) **Livslängden för ett svart hål:** Finn ett uttryck för livslängden τ_{BH} vid vilken ett svart hål med ursprunglig massa M_0 fullständigt avdunstar på grund av Hawkingstrålning, i termer av M_0 och fysikaliska konstanter. Beräkna livslängden $\tau_{bh, 10\odot}$ (i sekunder) för ett svart hål med $M_0 = 10 M_{\odot}$. [3]

- (T12.1e) **Svart hål i en CMB-jacuzzi:** Betrakta ett isolerat svart hål i rymden, långt ifrån andra kroppar, med en nuvarande temperatur T_{bh}^{now} , omgivet av den kosmiska mikrovågsbakgrundsstrålning (CMB) med en nuvarande temperatur $T_{cmb}^{now} = 2,7$ K. Det svarta hålet kan växa i massa genom att absorbera CMB-strålning och förlora sin massa genom Hawkingstrålning.

Med hänsyn till universums accelererande expansion, identifiera vilken av följande figurer som visar den långsiktiga tidsutvecklingen av T_{bh} i följande tre fall:
(X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Ange ditt svar genom att kryssa i lämplig ruta (endast en) för varje fall X, Y eller Z i [6]
tabellen i Svarsbladet som motsvarar lämpligt figurnummer.

- (T12.2) Ursprungliga svarta hål (PBH) med mycket mindre massor kan bildas i det mycket tidiga universum. Alla följande frågor är relaterade till PBH. Här kan alla processer som ökar det svarta hålets massa försummas.

- (T12.2a) **PBH avdunstar vid den aktuella epoken:** Som du kanske har märkt från svaren på de föregående frågorna, skulle svarta hål med en solmassa ta lång tid att avdunsta. Men eftersom PBH:er kan ha en mycket mindre massa, kan vi kanske se dem avdunsta i nutid.

Hitta den initiala massan $M_{0,PBH}$ (i kg), Schwarzschild-radien $R_{SC,PBH}$ (i m) och [4]
temperaturen T_{PBH} (i K) för ett svart hål som kan avdunsta helt i den nuvarande epoken, dvs. de med en livslängd $\tau_{PBH} = 14$ miljarder år.

- (T12.2b) **Bildandet av ett PBH:** I det strålningsdominerade tidiga universum varierar skalfaktorn som $a(t) \sim t^{1/2}$. Under denna era bildas PBH:er på grund av kollapsen av all energi som finns i ett område av fysisk storlek ct , där t är universums ålder vid den tidpunkten.

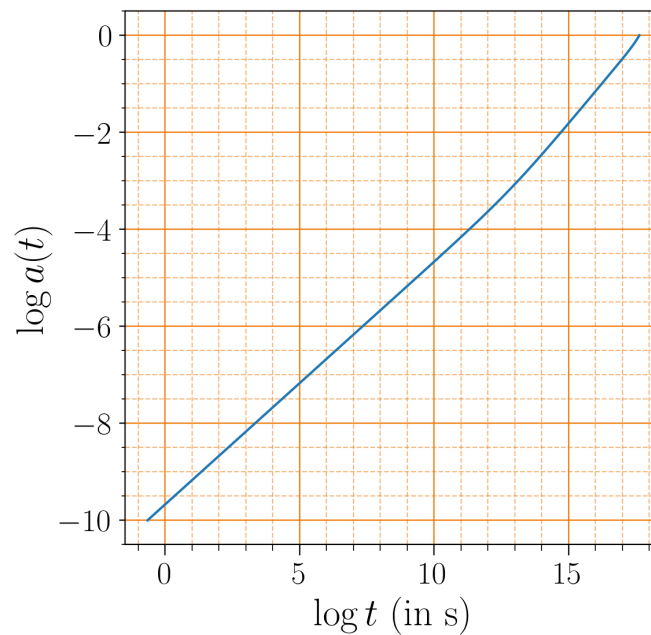
Ett PBH med massan 1×10^{12} kg bildas när universums ålder är ungefär 1×10^{-23} s. [6]
Beräkna universums ålder, t_{20} , när ett PBH med massan 1×10^{20} kg bildas.

- (T12.2c) **Observerat spektrum av Hawkingstrålning från PBH:** Betrakta ett PBH med en initial massa på 1×10^{10} kg som helt avdunstar vid slutet av sin livstid τ_{PBH} . Antag för enkelhetens skull att det mesta av Hawkingstrålningen emitteras vid denna tidpunkt, med en temperatur som motsvarar dess initiala massa. Anta också att skalfaktorn för universum utvecklas som $a(t) \sim t^{2/3}$.

Beräkna toppvåglängden för denna Hawkingstrålning observerad från jorden, λ_{earth} , [5]
vid den nuvarande epoken (vid $t = 14$ miljarder år).

- (T12.2d) **Högenergisk kosmisk strålning från PBH:** Antag nu att Hawkingstrålningen som emitteras vid en given tidpunkt t motsvarar fotoner som emitteras med en energi $k_B T_{bh}(t)$. Dessutom är den högsta möjliga temperaturen för ett svart hål Plancktemperaturen T_{Planck} där $k_B T_{Planck} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Utvecklingen av skalfaktorn över relevanta tidsskalor visas i följande figur. Skalfaktorn är idag satt till ett. $t(s)$ på tidsaxeln representerar universums ålder i sekunder.



En foton med en energi $E_{\text{det}} = 3,0 \times 10^{20} \text{ eV}$ observeras på jorden. Bestäm de största och minsta möjliga värdena för den initiala massan av PBH (M_0^{max} respektive M_0^{min}) som skulle kunna vara ansvarig för denna foton. **[10]**