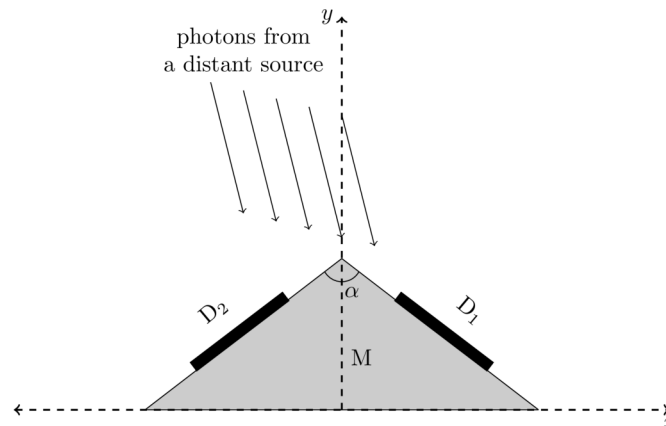


(T01) Misia Daksha
[10 bodov]

„Daksha“ je navrhovaná indická misia pozostávajúca z dvoch satelitov S_1 a S_2 obiehajúcich okolo Zeme po tej istej kruhovej obežnej dráhe s polomerom $r = 7000$ km, ale fázoovo posunutých o 180° . Tieto satelity budú pozorovať vesmír vo vysokoenergetickej oblasti (röntgenové a γ -žiarenie). Každý zo satelitov Daksha používa niekoľko plochých, obdĺžnikových detektorov.

Aby sme pochopili, ako lokalizovať zdroj na oblohe, použijeme zjednodušený model misie Daksha. Predpokladajme, že S_1 má len dva identické detektory D_1 a D_2 , každý s plochou $A = 0,50$ m², pripevnené na nepriehľadný držiak M , ako je znázornené na obrázku nižšie. Detektory ležia symetricky okolo osi y v rovinách kolmých na rovinu $x-y$ a zvierajú medzi sebou uhol $\alpha = 120^\circ$.



- (T01.1) Pri pozorovaní vzdialeného zdroja umiestneného v rovine $x-y$, detektor D_1 zaznamenáva výkon $P_1 = 2,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ a detektor D_2 zaznamenáva výkon $P_2 = 4,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹.

Vypočítajte uhol η , ktorý zvierá polohový vektor zdroja s kladnou osou y , pričom sa za kladný [5]
považuje uhol meraný od kladnej osi y proti smeru hodinových ručičiek.

Uvažujte jeden impulz zo vzdialeného zdroja (nie nevyhnutne v rovine $x-y$), ktorý bol zaznamenaný oboma satelitmi (S_1 a S_2) Daksha. Časy maxima impulzu zaznamenané satelitmi S_1 a S_2 sú t_1 a t_2 .

- (T01.2) Ak rozdiel $t_1 - t_2$ bol nameraný ako $10,0 \pm 0,1$ ms, určte aká veľká je časť (zlomok) f nebeskej [5]
sféry (viď angl. verziu), kde by sa mohol zdroj impulzu nachádzať.

(T02) Makar-Sankranti
[10 bodov]

Festival "Makar-Sankranti" sa oslavuje v Indii, keď Slnko pri pohľade zo Zeme vstupuje do zvieratníkového súhvezdia Kozorožec (Makar = Kozorožec, Sankranti = Vstup). V súčasnosti sa oslavuje každý rok okolo 14. januára. Pred mnohými rokmi však tento festival pripadal na zimný slnovrat na severnej pologuli, o ktorom predpokladajme, že nastáva 21. decembra.

- (T02.1) Na základe vyššie uvedených informácií zistite rok y_c , kedy sa oslava tohto festivalu naposledy [3]
zhodovala na severnej pologuli so zimným slnovratom.

- (T02.2) Ak Slnko vstúpilo pre pozorovateľa v Mumbaji 14. januára 2006 o 11:50:13 hod do zvieratníkového [3]
súhvezdia Kozorožec, vypočítajte dátum D_{enter} a miestny čas t_{enter} jeho vstupu do Kozorožca v roku 2013.

- (T02.3) Festival Makar-Sankranti sa oslavuje na danom mieste v deň, keď sa Slnko pri svojom západe [3]
prvýkrát nachádza už v súhvezdí Kozorožec. Predpokladajte, že miestny čas západu Slnka pre Mumbaj je v januári 18:30:00 hod.

Označte dátum oslavy festivalu každý rok medzi rokmi 2006 a 2013 (symbolom ✓ v príslušných bunkách v tabuľke uvedenej v súhrnnom odpoved'ovom hárku (Summary Answersheet)). [4]

(T03) Gravitačné vlny

[15 bodov]

Binárne čierne diery generujú gravitačné vlny. Uvažujte dve čierne diery v Galaxii s hmotnosťami $M = 36 M_{\odot}$ a $m = 29 M_{\odot}$, ktoré sa pohybujú okolo ich spoločného ťažiska po kruhových dráhach s orbitálnou uhlovou frekvenciou ω .

(T03.1) Predpokladajúc newtonovskú gravitáciu, odvod'te výraz pre uhlovú frekvenciu ω_{ini} obežných dráh čiernych dier v čase t_{ini} , keď vzdialenosť medzi čiernymi dierami bola 4,0-násobkom súčtu ich jednotlivých Schwarzschildových polomerov, len s využitím M , m a fyzikálnych konštánt.

Vypočítajte hodnotu ω_{ini} (v rad s^{-1}).

[5]

(T03.2) Podľa všeobecnej teórie relativity čierne diery na obežnej dráhe vyžarujú gravitačné vlny s frekvenciou f_{GW} takou, že $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. To znižuje obežné dráhy čiernych dier, čo následne zvyšuje f_{GW} . Rýchlosť zmeny f_{GW} je

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

kde $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ sa nazýva „chirp mass“.

Nájdite hodnoty α , β a δ .

[4]

(T03.3) Predpokladajme, že gravitačné vlny spojené s udalosťou boli prvýkrát detekované v čase $t_{\text{ini}} = 0$. [6]

V závislosti iba od ω_{ini} , M_{chirp} a fyzikálnych konštánt odvod'te výraz pre čas t_{merge} , počas ktorého pozorujeme zlučovanie čiernych dier, keď sa f_{GW} stane veľmi veľkou.

Vypočítajte hodnotu t_{merge} (v sekundách).

(T04) Balmerov skok

[15 bodov]

Uvažujte hviezdu hlavnej postupnosti obklopenú hmlovinou. Jej pozorovaná magnitúda vo V-pásme je 11,315 mag. Ionizovaná oblasť hmloviny blízko hviezdy emituje čiary $H\alpha$ a $H\beta$; ich vlnové dĺžky sú $0,6563 \mu\text{m}$ a $0,4861 \mu\text{m}$. Teoreticky predpovedaný pomer svetelných tokov v čiarach $H\alpha$ a $H\beta$ je $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2,86$. Avšak, keď toto žiarenie prechádza vonkajšou časťou studenej prachovej hmloviny, pozorovaný emisný tok v čiare $H\alpha$ je $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ a v čiare $H\beta$ je $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

Extinkcia A_{λ} je funkciou vlnovej dĺžky a je vyjadrená ako

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

V tomto vzťahu je $\kappa(\lambda)$ miera/krivka extinkcie a $E(B - V)$ označuje farebný prebytok (farebný exces) pri pozorovaní cez filtre B a V. Miera/krivka extinkcie (s λ vyjadrenou v μm) je daná nasledovne

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2,659 \times \left(-1,857 + \frac{1,040}{\lambda}\right) + R_V, & 0,63 \leq \lambda \leq 2,20 \\ 2,659 \times \left(-2,156 + \frac{1,509}{\lambda} - \frac{0,198}{\lambda^2} + \frac{0,011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0,12 \leq \lambda < 0,63 \end{cases}$$

kde $R_V = A_V/E(B - V) = 3,1$ je pomer celkovej extinkcie k selektívnej extinkcii.

(T04.1) Vypočítajte hodnoty $\kappa(H\alpha)$ a $\kappa(H\beta)$. [3]

(T04.2) Vypočítajte hodnotu pomeru farebného prebytku (farebného excesu) $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$. [4]

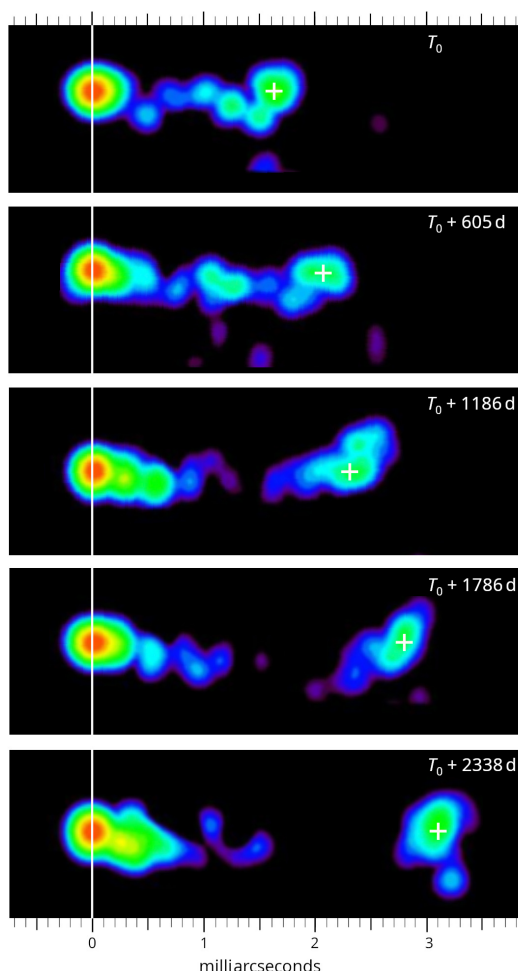
(T04.3) Určte extinkciu spôsobenú hmlovinou $A_{H\alpha}$ a $A_{H\beta}$, pre vlnové dĺžky $H\alpha$ a $H\beta$. [6]

(T04.4) Vypočítajte extinkciu spôsobenú hmlovinou (A_V) a zdanlivú magnitúdu hviezdy v pásme V m_{V0} [2]
v prípade, že by sa okolo nej nenachádzala hmlovina.

(T05) Kvazary

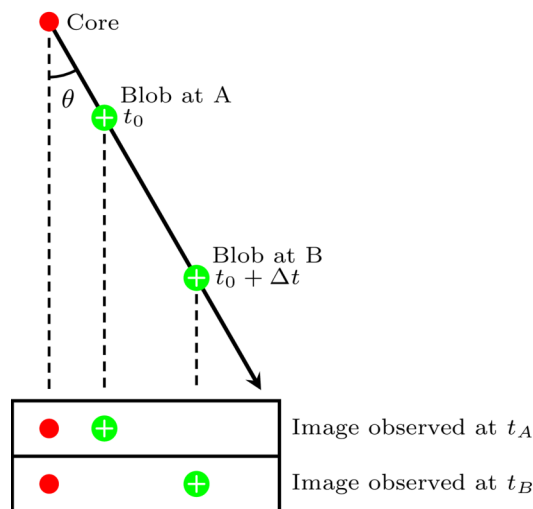
[20 bodov]

Kvazar je extrémne žiarivá aktívna galaxia obsahujúca supermasívnu čiernu dieru, ktorá emituje relativistické výtrysky častíc. Na obrázku je zobrazená séria rádiových snímok kvazaru (s červeným posunom $z = 0,53$ a svietivostnou vzdialenosťou (luminosity distance) $D_L = 1,00 \times 10^{10}$ ly v rôznych časoch. „Jadro“ leží na zvislej bielej čiare, zatiaľ čo prúd častíc pozostávajúci z „bublín“ (označenej bielym symbolom +) sa od neho postupne vzdďaľuje. Na každej snímke je zobrazený čas pozorovania (začínajúc s T_0 pre prvý obrázok) a uhlová škála je uvedená na vrchu a spodku série snímok.



- (T05.1) Pre každú snímku určte uhlovú vzdialenosť bubliny ϕ_{blob} (v oblúkových milisekundách) a jej [5]
priechu vzdialenosť l_{blob} (v svetelných rokoch) od jadra kvazaru. Potom vypočítajte zdanlivú
rýchlosť bubliny v priečnom smere (v_{app}) v násobkoch rýchlosti svetla $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ pomocou
po sebe idúcich pozorovaní. Taktiež vypočítajte priemernú zdanlivú rýchlosť $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ za celú dobu
pozorovania.

Výtrysk častíc z kvazaru sa v skutočnosti pohybuje relativistickou rýchlosťou $v \equiv \beta c$, ale nie nevyhnutne v rovine oblohy; napríklad vytvára uhol θ (tzv. „pozorovací uhol“) voči zornému lúču vzdialeného pozorovateľa (označené prerušovanými čiarami), ako je znázornené na náčrte nižšie.
Pre túto a všetky nasledujúce časti ignorujte červený posun kvazaru a akékoľvek relativistické efekty.



- (T05.2) Svetlo vyžarované bublinou v dvoch rôznych časoch t_0 (zodpovedá pozícii A) a $t_0 + \Delta t$ (zodpovedá pozícii B) dosiahne pozorovateľa v čase t_A a t_B . Pozorovaný časový rozdiel je teda $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

- (T05.2a) Vyjadrite výraz pre pomer $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ využívajúc uhly β a θ . [2]

- (T05.2b) Pomocou tohto pomeru vyjadrite β_{app} v závislosti od β a θ . [2]

- (T05.3) Pohyb sa nazýva nadsvetelný (superluminálny), ak zdanlivá rýchlosť presahuje rýchlosť svetla ($\beta_{\text{app}} > 1$), a podsvetelný (subluminálny), ak nie ($\beta_{\text{app}} < 1$).

- (T05.3a) Pre $\beta_{\text{app}} = 1$, nakreslite hladkú krivku β ako funkciu uhla θ označujúcu hranicu medzi [4]
subluminálnymi a superluminálnymi pohybmi. Oblasť superluminálneho pohybu v
grafe vyšrafujte (///).

- (T05.3b) Nájdite najnižšiu skutočnú rýchlosť výtrysku vyjadrenú ako časť rýchlosti svetla ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$) pre výskyt nadsvetelného (superluminálneho) pohybu a tiež [2]
zodpovedajúci uhol jeho orientácie θ_{low} .

- (T05.4) Nájdite výraz pre maximálny pozorovací uhol θ_{max} , pre ktorý bude možná daná hodnota β_{app} . [2]

Jadro kvazaru, jeho centrálné kompaktné teleso, vykazuje variabilitu emisií v dôsledku vnútorných procesov prebiehajúcich v kauzálne prepojenej oblasti. Za veľkosť (= polomer) tejto oblasti sa zvyčajne považuje približne päťnásobok Schwarzschildovho polomeru jadra.

- (T05.5) Pre jadro istého kvazaru sa zistilo, že sa mení na časových škálach približne 1 h. V hmotnostiach [3]
Slnka určte hornú hranicu $M_{c, \text{max}}$, hmotnosti centrálného kompaktného telesa.

(T06) Rotácia Galaxie

[20 bodov]

Krivka rotácie našej Galaxie je určená pomocou meraní rýchlostí pohybu oblakov neutrálneho vodíka (HI) pozdĺž zorného lúča na rôznych galaktických dĺžkach určených z pozorovaní v spektrálnej čiare HI na vlnovej dĺžke 21 cm. Uvažujte oblak HI s galaktickou dĺžkou l , nachádzajúci sa vo vzdialenosti R od galaktického stredu (Galactic Centre; skr. GC) a vo vzdialenosti D od Slnka. Predpokladajte, že Slnko je vo vzdialenosti $R_0 = 8,5$ kpc od GC. Predpokladajte tiež, že Slnko aj HI oblak sa pohybujú okolo GC po kruhových dráhach s uhlovými rýchlosťami Ω_0 a Ω a rotačnými rýchlosťami V_0 a V .

Zložky rýchlosti pohybu pozdĺž zorného lúča (V_r) a priečnej rýchlosti (V_t) oblaku môžu byť pri pozorovaní zo Slnka vyjadrené ako

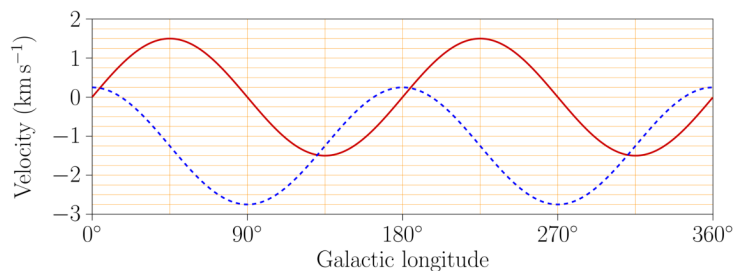
$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Pri pohľade zo severného galaktického pólu prebieha galaktická rotácia v smere hodinových ručičiek. Počas celého tohto problému budeme považovať rýchlosť pozdĺž zorného lúča za kladnú, keď sa oblak vzdďaľuje, a zároveň oblaky budú považované za bodové objekty.

- (T06.1) Do grafu uvedenom na sumárnom odpoved'ovom hárku načrtnite V_r ako funkciu D , [5]
(D) od $D = 0$ po $D = 2R_0$, pre dva zorné lúče dané/definované (i) $l = 45^\circ$ a (ii) $l = 135^\circ$.
Označte každú z vašich čiar/kriviek príslušnou hodnotou l .

- (T06.2) Graf nižšie zobrazuje priemerné radiálne (plná červená krivka) a priečne (čiarkovaná modrá krivka) zložky rýchlosti hviezd vo vzdialenosti 100 pc od Slnka, zobrazené ako funkcia galaktickej dĺžky.



Pomocou grafu odhadnite obežnú dobu Slnka (P) okolo stredu Galaxie a vyjadrite ju v miliónoch [3]
rokov (Myr).

- (T06.3) Jan Oort poznamenal, že v slnečnom okolí ($D \ll R_0$) bude rozdiel v uhlových rýchlostiach ($\Omega - \Omega_0$) malý, a teda odvodil nasledujúce aproximácie prvého rádu, pre zložky rýchlosti v smere zorného lúča a priečnej rýchlosti:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

, kde A a B sú známe ako Oortove konštanty.

Uvažujte dva prípady:

(I) skutočná pozorovaná rotačná krivka Galaxie, a

(II) rotačná krivka pre hypotetický scenár, kde Galaxia je bez tmavej hmoty a predpokladáme celú hmotnosť Galaxie sústredenú v jej strede.

- (T06.3a) Odvodte pre obidva uvažované prípady výrazy pre radiálny gradient rotačnej rýchlosti [2]

$$\text{v polohe Slnka } \left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}.$$

(T06.3b) Vyjadrite A a B v závislosti od V_0 , R_0 a radiálneho gradientu rotačnej rýchlosti v polohe Slnka $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$. [8]

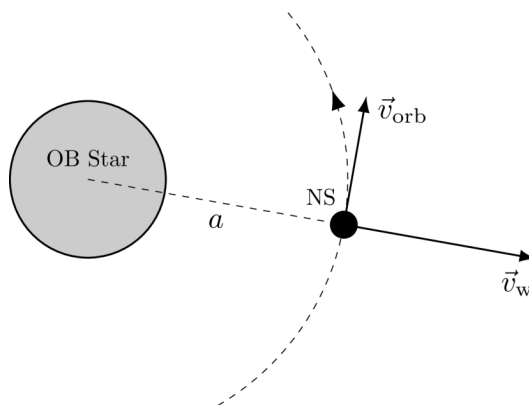
(T06.3c) Pomer (A/B) Oortových konštánt pre dva dané prípady (I) a (II) je definovaný ako F_I a F_{II} . Určte F_I a F_{II} . [2]

(T07) Dvojhviezda s neutrónovou hviezdou

[20 bodov]

V dvojhviezdnom systéme s kompaktnou hviezdou, kde sprievodná hviezda nepresahuje svoju Rocheovu medzu, je hlavným zdrojom akrecie kompaktnej hviezdy práve hviezdny vietor sprievodnej hviezdy. Táto hviezdny vietor poháňaná akrecia je obzvlášť významná v systémoch, ktoré zahŕňajú hviezdu skorého typu (ako je hviezda O alebo B, ďalej označovaná ako OB hviezda), spolu s kompaktným objektom, ako je neutrónová hviezda (neutron star; skr. NS) na tesnej obežnej dráhe.

Uvažujte taký NS-OB dvojhviezdny systém, kde neutrónová hviezda s hmotnosťou $M_{NS} = 2,0 M_{\odot}$ a polomerom $R_{NS} = 11 \text{ km}$ obieha po kruhovej dráhe s polomerom a okolo stredu OB hviezdy rýchlosťou $v_{orb} = 1,5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (viď obrázok nižšie). Počas celého tohto problému sa predpokladá, že úbytok hmoty z OB hviezdy je sféricky symetrický a jeho rýchlosť je $\dot{M}_{OB} = 1,0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.



(T07.1) Akrečný polomer R_{acc} je definovaný ako maximálna vzdialenosť od NS, v ktorej môže byť hviezdny vietor zachytený NS. Ak je rýchlosť hviezdneho vetra vo vzdialenosti obežnej dráhy NS $v_w = 3,0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, určte R_{acc} pre vyššie uvedený systém v km pomocou štandardného vzorca pre výpočet únikovej rýchlosti. [3]

(T07.2) Predpokladajúc, že všetok zachytený materiál je akretovaný NS, odhadnite rýchlosť akrecie hmoty $\dot{M}_{acc}$ z hviezdneho vetra na NS v jednotkách $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, pre $a = 0,5 \text{ au}$. Zanedbajte účinky tlaku žiarenia a konečného času vychladnutia akretujúceho plynu. [3]

(T07.3) Teraz uvažujte situáciu, kde sa rýchlosť hviezdneho vetra vo vzdialenosti obežnej dráhy a (blízko NS) stáva porovnateľnou s obežnou rýchlosťou NS. Miera akrecie hmoty z hviezdneho vetra na NS by v tomto prípade bola daná výrazom vo forme $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$, kde $q = M_{NS}/M_{OB}$ je pomer hmotností binárneho systému a β je uhol v sústave NS medzi smerom rýchlosti vetra a radiálnym smerom od OB hviezdy. Získajte výraz pre $f(\tan \beta, q)$ za predpokladu $\dot{M}_{OB} \gg \dot{M}_{NS}$. [6]

- (T07.4) Uvažujme, že plne ionizovaný materiál akretuje radiálne a je brzdený silným magnetickým poľom $\vec{B}$ neutrónovej hviezdy. Tento efekt môže byť modelovaný ako tlak daný $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Predpokladajme, že NS má dipólové magnetické pole, ktorého veľkosť v rovníkovej rovine sa mení so vzdialenosťou r od NS pre $r \gg R_{\text{NS}}$ ako

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

, kde B_0 je magnetické pole na rovníku NS. Predpokladajme, že os magnetického dipólu je totožná s rotačnou osou NS.

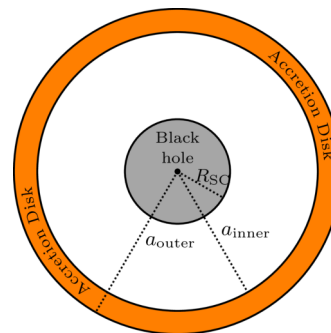
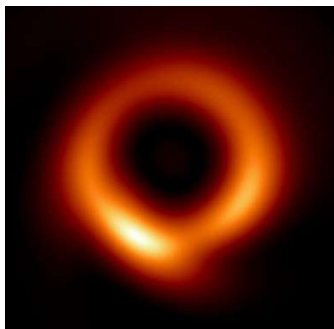
- (T07.4a) Získajte magnetický tlak $P_{\text{eq, mag}}$ v rovníkovej rovine v závislosti od B_0 , R_{NS} , r a [1]
ďalších vhodných konštánt.
- (T07.4b) Maximálna vzdialenosť, kde je akrečný tok zastavený magnetickým poľom na rovníku, sa nazýva magnetosférický polomer R_m . Tento tok hmoty bude vyvíjať tlak v dôsledku relatívneho pohybu medzi prichádzajúcim hviezdny vetrom a NS. Získajte približný výraz pre kritické magnetické pole $B_{0, c}$, pre ktoré sa R_m zhoduje s R_{acc} a vypočítajte jeho hodnotu v teslách. Magnetické efekty sú zanedbateľné pre $r > R_m$ a uvažujte $v_w \gg v_{\text{orb}}$. [7]

(T08) Tieň čiernej diery

[20 bodov]

Prístroj Event Horizon Telescope (EHT) zaznamenal snímku supermasívnej čiernej diery v strede galaxie M 87, ktorá je na ľavom obrázku nižšie.

Aby sme pochopili niektoré jednoduché črty tohto obrázka, budeme uvažovať zjednodušený model nerotujúcej, statickej, sférickej symetrickej čiernej diery s hmotnosťou $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$, obklopenej nehmotným, tenkým, rovinným akrečným diskom s vnútorným polomerom $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ a vonkajším polomerom $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, kde R_{SC} je Schwarzschildov polomer. Náčrt pohľadu zhora je zobrazený na pravom obrázku nižšie (obrázok nie je v mierke).



Predpokladáme, že akrečný disk je jediným zdrojom svetla, ktorý treba uvažovať. Každý bod na disku vyžaruje svetlo vo všetkých smeroch. Toto svetlo sa pohybuje pod vplyvom gravitačného poľa čiernej diery. Dráha svetelných lúčov je riadená dvoma rovnicami uvedenými nižšie (ktoré sú podobné tým pre objekt okolo Slnka):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

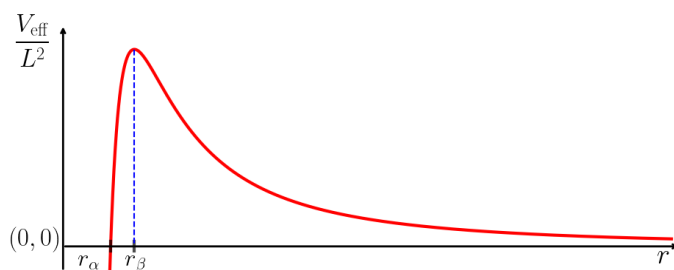
kde $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ je radiálna súradnica, $\phi \in [0, 2\pi)$ je azimutálny uhol a E a L sú konštanty súvisiace so zachovanou energiou a zachovaným momentom hybnosti (v poradí).

V tomto prípade je $v_r \equiv dr/dt$ veľkosť radiálnej rýchlosti, v_ϕ je veľkosť tangenciálnej rýchlosti a $\omega \equiv d\phi/dt$ je uhlová rýchlosť. Parameter dopadu b pre trajektóriu definujeme ako $b = L/\sqrt{2E}$. Časová dilatácia je pri tomto probléme zanedbaná.

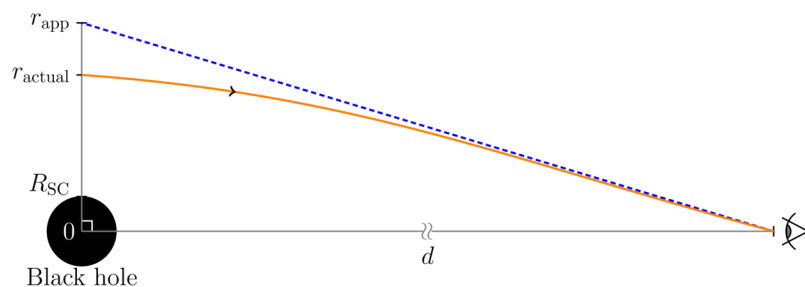
Ďalšiu užitočnú rovnicu získame deriváciou prvej rovnice:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

- (T08.1) Okolo čiernej diery môžu existovať kruhové dráhy svetla. Nájdite pre takéto dráhy fotónov [4]
polomer r_{ph} a impaktný parameter b_{ph} v závislosti od M a relevantných konštánt.
- (T08.2) Vypočítajte čas T_{ph} vyjadrený v sekundách potrebný na dokončenie jedného úplného obehu [2]
fotónu po kruhovej dráhe.
- (T08.3) Rovnica radiálnej rýchlosti uvedená vyššie (prvá rovnica v tejto úlohe) môže byť porovnaná s
rovniciou pre trajektórie fotónov v tvare $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$. Schematický graf V_{eff}/L^2 ako funkcia r
je uvedený nižšie.



- (T08.3a) Graf zobrazuje dva špeciálne polomery r_α a r_β . Získajte výrazy pre r_α a r_β v závislosti [2]
od M a relevantných konštánt.
- (T08.3b) Fotón putujúci z akrečného disku dovnútra smerom k čiernej diere môže v niektorých [3]
prípadoch ešte uniknúť do nekonečna. Nájdite výraz pre najmenšiu hodnotu polomeru
bodu obratu r_t pre takýto fotón v závislosti od M a relevantných konštánt. Nájdite výraz
pre minimálnu hodnotu impaktného parametra b_{min} pre tento fotón.
- (T08.4) Lúč svetla prichádzajúci z polomeru r_{actual} od stredu systému v rovine oblohy bude podliehať
silnému ohybu v dôsledku gravitácie čiernej diery a nakoniec dosiahne pozorovateľa (označeného
okom) vo veľkej vzdialenosti d od systému, ako je znázornené nižšie.



Pre tohto pozorovateľa by sa lúč javil v rovine oblohy, akoby pochádzal z iného bodu vo vzdialenosti $r_{app} \approx b$ od stredu čiernej diery, kde b je impaktný parameter pre túto trajektóriu fotónu. Pre body na akrečnom disku pri $r = r_{actual}$ možno predpokladať nasledujúci vzťah:

$$b(r_{actual}) \approx r_{actual} (1 + R_{SC}/r_{actual})^{1/2}$$

Pre vzdialeného pozorovateľa, ako sme my, sa obraz systému pri pohľade na akrečný disk zhora [5]
bude javiť ako kruhovo symetrický v rovine oblohy. Určte najvzdialenejší zdanlivý polomer r_{outer} a
najbližší zdanlivý polomer r_{inner} obrazu v astronomických jednotkách (au).

- (T08.5) Uvažujte izolovanú supermasívnu čiernu dieru bez akrečného disku s hmotnosťou $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$. Počas doby 5 s nastane v bode Z vo vzdialenosti, povedzme, $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ od čiernej diery, ako je znázornené na obrázku, krátke silné vzplanutie elektromagnetického žiarenia. Vzplanutie v bode Z vyžaruje svetlo vo všetkých smeroch. Pozorovateľ v bode ďaleko od čiernej diery (označenom okom na obrázku nižšie) urobí 60 s dlhú expozíciu oblasti okolo čiernej diery.



Vyberte správnu možnosť z nasledujúcich tvrdení:

- (T08.5a) Počet možných trajektórií, ktorými môže svetlo putovať z bodu Z k pozorovateľovi, je [2]
(A) najviac jedna (B) presne jedna (C) presne dve (D) viac ako dve.
- (T08.5b) Počet obrazov vzplanutia elektromagnetického žiarenia z bodu Z, ktoré budú viditeľné v [2]
dlhej expozícii, je (A) najviac jeden (B) presne jeden (C) presne dva (D) viac ako dva.

(T09) Atmosférický seeing

[35 bodov]

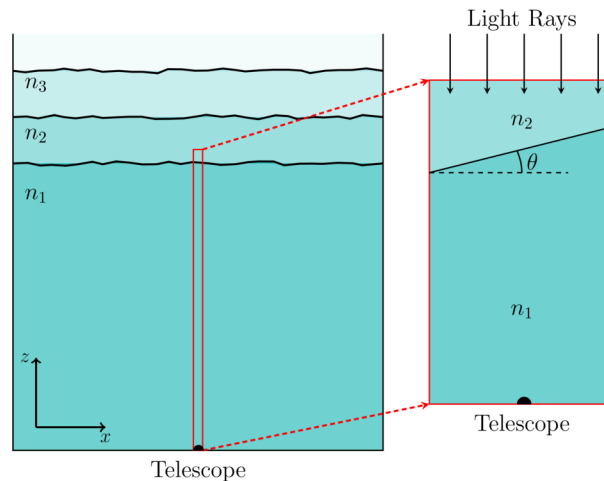
Teleskop s objektívom s achromatickou konvexnou šošovkou s priemerom $D = 15$ cm a ohniskovou vzdialenosťou $f = 200$ cm je nasmerovaný na hviezdu v zenite.

- (T09.1) Nájdite priemer d_{image} obrazu (v m) bodového zdroja vytvoreného objektívom v jeho ohniskovej [1]
rovine pre zelené svetlo ($\lambda = 550$ nm), pričom zohľadníte iba účinky difrakcie.

Obraz astronomického zdroja je tiež ovplyvnený tzv. "atmosférickým seeingom".

Hranice medzi vrstvami v atmosfére, ako aj indexy lomu týchto vrstiev sa neustále menia v dôsledku turbulencií, zmien teploty a iných faktorov. To vedie k drobným zmenám v polohe obrazu v ohniskovej rovine ďalekohľadu, známe ako "efekt blikania". Pre zvyšok problému, okrem použitia difrakčne vymedzenej konečnej veľkosti obrazu hviezdy (ako bolo použité vyššie), nebudú zohľadnené žiadne interferenčné efekty.

Ľavý panel obrázku nižšie ukazuje vertikálny prierez atmosférou s viacerými vrstvami rôznych indexov lomu ($n_1, n_2, n_3, \dots$). Pravý panel zobrazuje priblížený pohľad na tenký vertikálny výsek atmosféry a hranicu medzi dvoma najnižšími atmosférickými vrstvami s indexmi lomu n_1 a n_2 ($n_1 > n_2$). Pre tento problém uvažujeme len tieto dve vrstvy a ich hranicu. Diagramy nie sú v mierke.

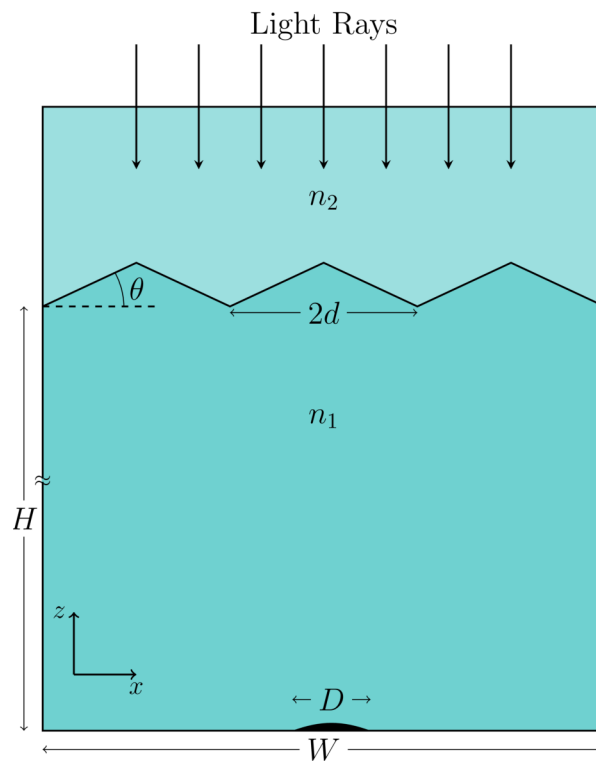


- (T09.2) Nech je hranica medzi dvoma vrstvami vo výške $H = 1$ km priamo nad objektívom ďalekohľadu, so sklonom $\theta = 30^\circ$ vzhľadom na vodorovnú rovinu. Vo všetkých častiach tohto problému sa uhol θ považuje za kladný proti smeru hodinových ručičiek. Pre monochromatický zdroj svetla, $n_1 = 1,00027$ a $n_2 = 1,00026$. Nech je uhlový posun obrazu v ohniskovej rovine ďalekohľadu pre hviezdu v zenite α .
- (T09.2a) Pre hranicu medzi vrstvami nakreslite a vhodne označte graf zobrazujúci n_1 , n_2 , θ a α . [2]
- (T09.2b) Nájdite výraz pre α v závislosti od θ , n_1 a n_2 . Použite aproximácie pre malé uhly: $\sin \alpha \approx \alpha$ a $\cos \alpha \approx 1$. [2]
- (T09.2c) Vypočítajte posun Δx_θ (v m) v polohe obrazu, ak θ vzrastie o 1% (pri zachovaní fixných n_1 a n_2). [3]
- (T09.2d) Vypočítajte posun Δx_n (v m) v polohe obrazu, ak n_2 vzrastie o 0,0001% (pri zachovaní fixných n_1 a θ). [3]
- (T09.3) Pre biele svetlo prichádzajúce z hviezdy v zenite vyberte, ktorá z nasledujúcich možností najlepšie vystihuje tvar a farbu obrazu, zaškrtnutím (✓) príslušného políčka (iba jedno) v súhrnnom odpovedovom hárku. Všimnite si, že x sa na obrázku zľava doprava zvyšuje. [2]

	Farba obrazu	Tvar obrazu	Ľavý okraj	Pravý okraj
A	Biela	Kruhový		
B	Biela	Eliptický		
C	Farebný	Kruhový	Modrá	Červená
D	Farebný	Kruhový	Červená	Modrá
E	Farebný	Eliptický	Modrá	Červená
F	Farebný	Eliptický	Červená	Modrá

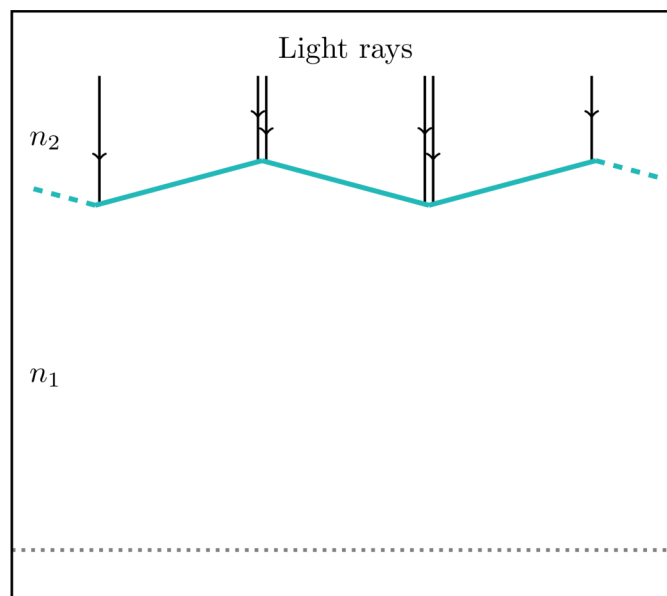
Pre všetky zostávajúce časti tejto úlohy uvažujte monochromatické zelené svetlo s vlnovou dĺžkou $\lambda = 550$ nm. Modelujeme hranicu medzi vrstvami ako súbor nekonečných cik-cak rovín (vedúcich kolmo na rovinu stránky) oddelených $d = 10$ cm pozdĺž osi x , s buď $\theta = 10^\circ$ alebo $\theta = -10^\circ$.

Obrázok nižšie (nie v mierke) zobrazuje priečny rez tohto modelu atmosféry so šírkou W ($W \ll H$). Pre ďalekohľady s veľkou apertúrou táto cik-cak povaha hranice vedie k tvorbe škvŕn v rovine ohniska.



(T09.4) Uvažujte atmosféru modelovanú ako vyššie.

(T09.4a) Časť atmosféry s cik-cak rovinami idúcimi po sebe, rovnakých parametrov, ako sú uvedené vyššie, je zobrazená na obrázku nižšie (nie v mierke).



Na tomto diagrame, reprodukovanom v súhrnnom odpovedovom hárku, nakreslite dráhy dopadajúcich svetelných lúčov až po rovinu, kde je umiestnený objektív ďalekohľadu, zobrazenú sivou bodkovanou čiarou.

Na diagrame oblasť (alebo oblasti) - ak taká existuje -, kde nedopadnú žiadne svetelné lúče, označte písmenom „X“.

(T09.4b) Vypočítajte šírku W_X takej oblasti (či oblastí).

[3]

(T09.4c) Nájdite najväčší priemer $D_{\max}$ objektívu ďalekohľadu, s ktorým bude možné vhodným výberom polohy ďalekohľadu vzhľadom na štruktúru hranice získať iba jeden obraz hviezdy. [4]

(T09.5) Uvažujte prípad, keď je cik-cakovitý tvar hranice povolený v oboch osiach x a y (ako pole pyramíd), a $D = 100$ cm (a $f = 200$ cm). [6]

Nakreslite kvalitatívny vzor výsledných škvŕn do políčka uvedeného v súhrnnom odpovedovom hárku.

(T09.6) Pre turbulentnú atmosféru opäť uvažujte rovnaký paralelne prebiehajúci cik-cakovitý tvar hraničnej vrstvy iba pozdĺž smeru osi x , ale teraz sa uhol medzi dvoma rovinami mení v priebehu 1,0 s rovnomerne z 10° na -10° . Predpokladajte, že to vedie k rovnomernej zmene polohy obrazu. [5]

Uvažujte ďalekohľad s $D = 8$ cm a $f = 1$ m. Odhadnite najdlhší expozičný čas $t_{\max}$ povolený pre jeho CCD kameru, aby sa získal iba jeden obraz a akákoľvek možná odchýlka v jeho polohe zostala menšia ako 1 % difrakciou vymedzeného priemeru obrazu.

(T10) Nukleosyntéza po Veľkom tresku

[35 bodov]

Počas éry žiarenia v ranom vesmíre je škálovací faktor vesmíru $a \propto t^{1/2}$, kde t je čas od Veľkého tresku. Počas väčšiny tejto éry zostávajú prostredníctvom slabých interakcií neutróny (n) a protóny (p) v termálnej rovnováhe medzi sebou. Početnosť (N) voľných neutrónov alebo protónov závisí od teploty T a ich zodpovedajúcich hmotností m podľa vzťahu

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

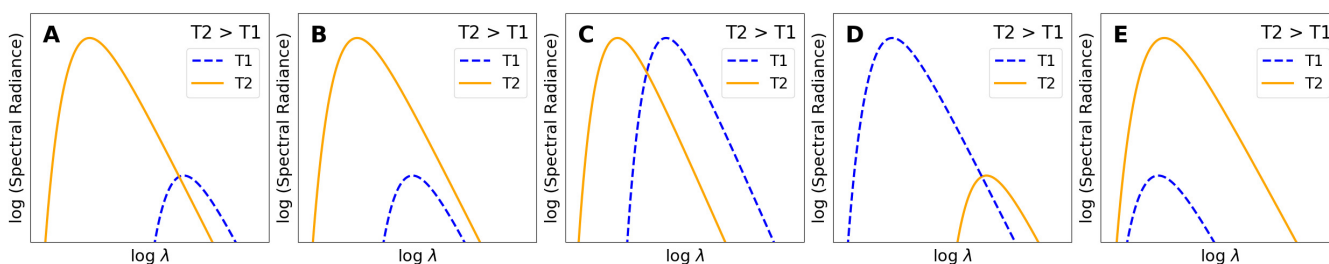
, kde čas $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70$ s, keď $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. Po t_{wk} už slabé interakcie nemôžu udržiavať takúto rovnováhu a voľné neutróny sa rozpadajú na protóny s polčasom rozpadu 610,4 s.

(T10.1) Nech je (objemová) hustota protónov N_p a neutrónov N_n . Vypočítajte relatívnu početnosť neutrónov danú pomerom $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ v čase t_{wk} . [4]

(T10.2) Fotóny udržiavajú vo všetkých érach tepelnú rovnováhu, pričom zachovávajú spektrum čierneho telesa.

(T10.2a) Nájdite index β , pričom $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Určte, ktorý z nasledujúcich grafov zobrazuje správne správanie spektrálnej hustoty energie pre dve teploty T_1 a T_2 . Označte (✓) správnu možnosť v súhrnnom odpovedovom hárku. [2]

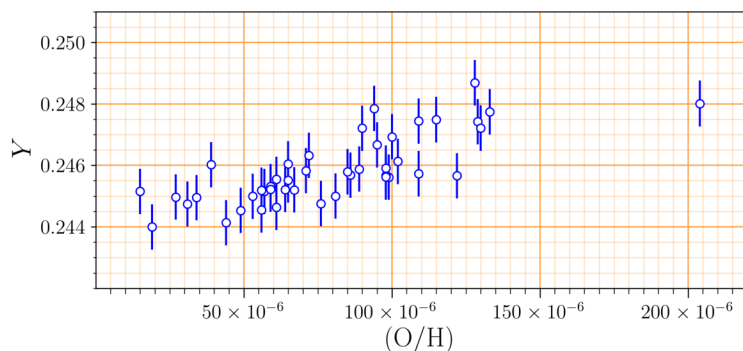


- (T10.3) Po t_{wk} je proces tvorby deutéria z protónov a neutrónov riadený Sahovou rovnicou, ktorú odvodil indický fyzik Prof. Meghnad Saha, a ktorá sa dá zjednodušiť na

$$\frac{N_D}{N_n} = 6,5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n) c^2}{k_B T} \right).$$

Tu je pomer baryónov k fotónom $\eta \approx 6,1 \times 10^{-10}$, a N_D je hustota deutéria.

- (T10.3a) Vykreslite pomer N_D/N_n na mriežke v súhrnnom odpovedovom hárku (Summary Answersheet) pre aspoň 4 primerane rozmiestnené hodnoty teploty, ktoré ležia v rozsahu $k_B T = [60, 70]$ keV a nakreslite hladkú krivku prechádzajúcu týmito bodmi. [5]
- (T10.3b) Z grafu nájdite $k_B T_{\text{nuc}}$ (v keV), keď $N_D = N_n$. [1]
- (T10.3c) Namiesto toho teraz predpokladajte, že všetky voľné neutróny sa okamžite spoja s protónmi pri $k_B T_{\text{nuc}}$ a vzniká deutérium, ktoré sa všetko okamžite premení na hélium (${}^4_2\text{He}$). Vypočítajte zodpovedajúcu éru alebo čas nukleosyntézy t_{nuc} (v s) pre tvorbu hélia. [4]
- (T10.4) Vypočítajte hodnotu $X_{n, \text{nuc}}$ bezprostredne pred t_{nuc} . [5]
- (T10.5) Prvotná (primordiálna) abundancia hélia Y_{prim} je definovaná ako zlomok celkovej baryonickej hmoty vo vesmíre, ktorá je viazaná v héliu tesne po t_{nuc} . Získajte teoretický odhad hodnoty Y_{prim} . Pre účely iba tohto výpočtu predpokladajte, že $m_p \approx m_n$ a že hmotnosť hélia $m_{\text{He}} \approx 4m_n$. [3]
- (T10.6) Prvotné množstvo hélia je veľmi ťažké merať, pretože hviezdy vo vesmíre neustále premieňajú vodík na hélium. Množstvo spracovania hviezdami v galaxii je charakterizované relatívnou hustotou kyslíka (ktorý je produkovaný iba hviezdami) k vodíku, označenou ako (O/H). Kompilácia meraní (O/H) a množstva hélia Y pre rôzne galaxie je zobrazená nižšie.



Použite všetky body v tomto grafe (ktorý je zobrazený v súhrnnom odpovedovom hárku) na zodpovedanie nasledujúcich otázok.

- (T10.6a) Odhadnite Y pre modrú kompaktnú trpasličiu galaxiu s hodnotou $(\text{O}/\text{H}) = 1,75 \times 10^{-4}$. [2]
- (T10.6b) Získajte sklon $dY/d(\text{O}/\text{H})$ priamky prispôbenej vyššie uvedeným údajom. [2]
- (T10.6c) Odhadnite na základe vyššie uvedených pozorovaní prvotné množstvo hélia $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$. [2]
- (T10.7) Odchýlku medzi Y_{prim} a $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ možno znížiť zmenou pomeru baryónov k fotónom η . Keď sa η zníži, ako je uvedené šípku $\downarrow$ v súhrnnom odpovedovom hárku, označte zvýšenie ($\uparrow$) alebo zníženie ($\downarrow$) v $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (keď $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$ a Y_{prim} v políčkach nachádzajúcich sa v súhrnnom odpovedovom hárku. [3]

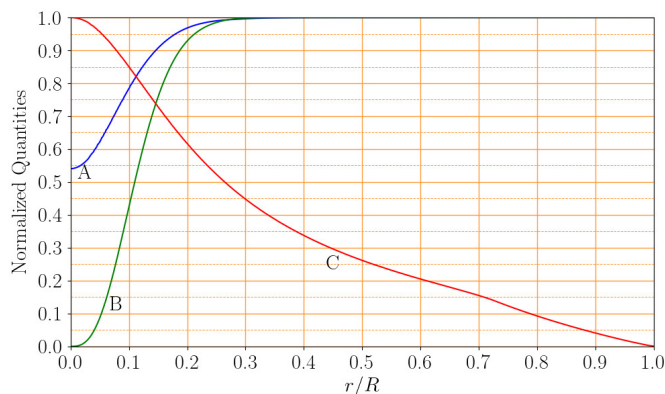
(T11) Hviezdy cez grafy
[50 bodov]

Hviezdy je možné dobre aproximovať ako sféricky symetrické objekty, a preto možno radiálnu vzdialenosť r od stredu zvoliť ako jedinú nezávislú premennú pri modelovaní vnútorných oblastí hviezd. Hmotnosť obsiahnutá v guli s polomerom r je označená ako $m(r)$. Svetivosť $l(r)$ je definovaná ako čistá energia prúdiaca von cez sférický povrch s polomerom r za jednotku času. Iné zaujímavé veličiny, napríklad hustota $\rho(r)$, teplota $T(r)$, hmotnostný pomer vodíka $X(r)$, hmotnostný pomer hélia $Y(r)$ a jadrová energia generovaná na jednotku hmotnosti za jednotku času $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, sú považované za funkcie r . V priebehu tohto problému budeme zanedbávať účinky difúzie a gravitačného usadzovania prvkov vnútri hviezd.

Symbol "log" označuje logaritmus so základom 10. Problém pozostáva z troch nezávislých častí.

(T11.1) Časť 1: Vnútri hviezd

Graf nižšie ukazuje zmenu troch štrukturálnych veličín A, B a C, ako funkcie časti polomeru r/R v hviezdnom modeli s hmotnosťou $1 M_{\odot}$ a vekom 4 GYr, kde R je polomer fotosféry hviezd. Hodnoty hmotnostného pomeru hélia na (fotosférickom) povrchu Y_s a metalicity (hmotnostný zlomok všetkých prvkov ťažších ako hélium) na (fotosférickom) povrchu Z_s hviezd sú dané ako $(Y_s, Z_s) = (0,28, 0,02)$. Všetky veličiny zobrazené na grafoch sú normalizované podľa ich príslušných maximálnych hodnôt.



(T11.1a) Každú z troch veličín A, B a C jednoznačne priradiť k jednej z piatich možností:

[6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Napište A/B/C do políček vedľa príslušných veličín v súhrnnom odpoved'ovom hárku. Vašu odpoveď nemusíte odôvodňovať.)

(T11.1b) Aký je hmotnostný pomer hélia v jadre Y_c hviezd?

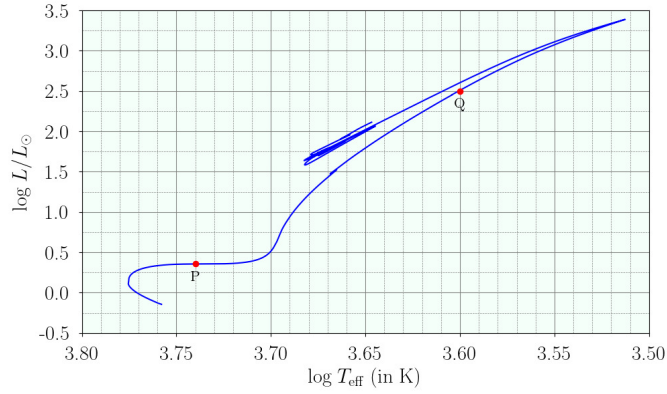
[3]

(T11.1c) Nakreslite zostávajúce dve veličiny zo zoznamu piatich (ktoré neboli identifikované ako krivky A, B alebo C) uvedených v (T11.1a), ako funkcie r/R na rovnakom grafe v súhrnnom odpoved'ovom hárku a označte ich príslušnými veličinami.

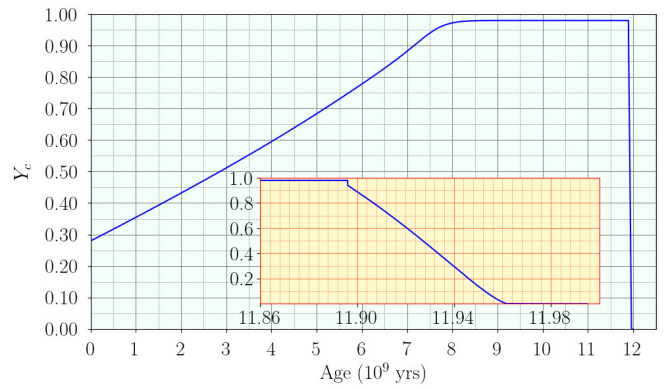
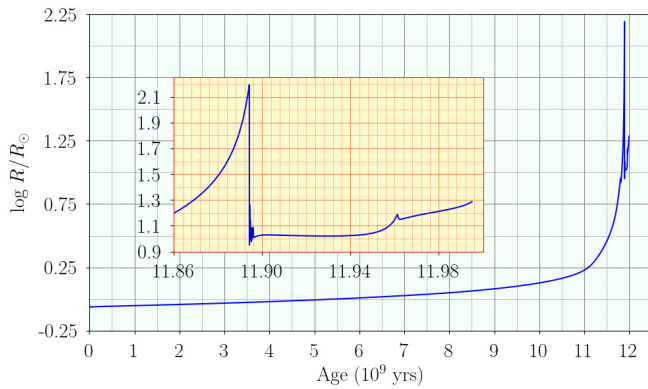
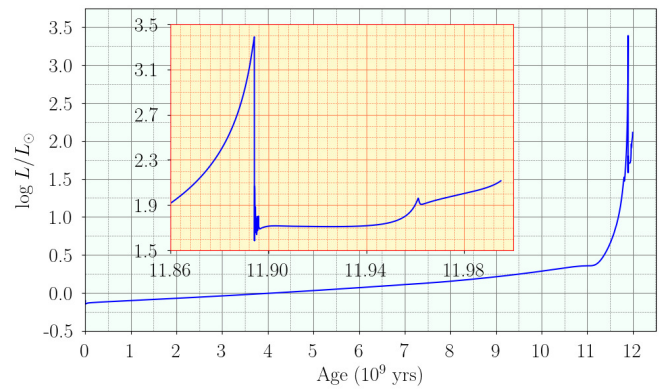
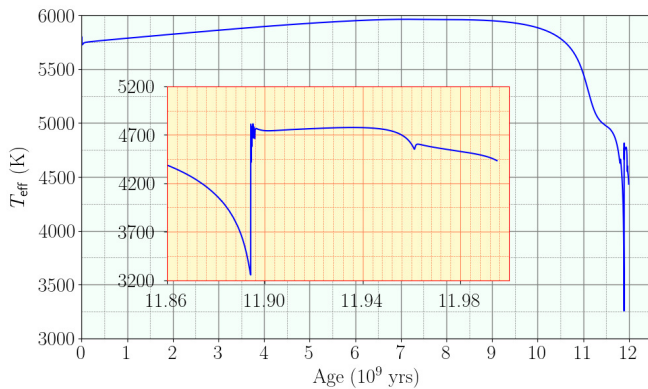
[5]
(T11.2) Časť 2: Vyvíjajúce sa hviezdy

Uvažujte vývoj hviezd s hmotnosťou $1 M_{\odot}$, ktorej počiatočné rovnomerné zloženie je dané pomerom hmotnosti hélia $Y_0 = 0,28$ a kovov $Z_0 = 0,02$. Obrázky nižšie ukazujú zmenu rôznych globálnych veličín tejto hviezd, keď sa vyvíja od ZAMS (Zero Age Main Sequence) až po koniec spaľovania hélia v jej jadre.

Graf nižšie ukazuje dráhu vývoja hviezd na H-R diagrame (graf $\log L/L_{\odot}$ vs $\log T_{\text{eff}}$, kde L je povrchová svetivosť a T_{eff} je efektívna teplota).



Obrázok nižšie obsahuje štyri grafy, ktoré ukazujú zmenu T_{eff} (v K), L (zobrazené ako $\log L/L_{\odot}$), R (zobrazené ako $\log R/R_{\odot}$) a Y_c s vekom (v 10^9 rokov) tej istej hviezdy. Pre objasnenie, krivky v každom z týchto štyroch grafov zobrazujú podrobné zmeny príslušných veličín medzi vekmi $11,86 \times 10^9$ rokov až $12,00 \times 10^9$ rokov.



Použite tieto grafy na vyriešenie úloh nižšie.

- (T11.2a) Aká je približná životnosť hviezdy na hlavnej postupnosti t_{MS} (v rokoch)? [1]
- (T11.2b) Aká je približná doba Δt_{He} (v rokoch), počas ktorej hviezda spaľuje vo svojom jadre hélium? [1]
- (T11.2c) Aká časť f_{H} počiatocného množstva vodíka v jej strede bola spálená, keď je svietivosť hviezdy $1 L_{\odot}$? [3]
- (T11.2d) Aký je polomer hviezdy R_1 (v jednotkách $R_{\odot}$), keď 60% počiatocného množstva vodíka v jej jadre bolo spálené? [3]
- (T11.2e) Aké sú polomery hviezdy, R_P a R_Q (v jednotkách $R_{\odot}$), zodpovedajúce jej pozíciám P a Q ako sú označené na H-R diagrame? [4]

(T11.3) **Časť 3: Rozdelenie hmoty vnútri hviezd**

Rovnica, ktorá vyjadruje rozdelenie hmoty vnútri hviezd, je

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Bolo by vhodné vyjadriť túto rovnicu pomocou troch bezrozmerných premenných, konkrétne pomeru hmotností q , pomeru polomerov x , a relatívnej hustoty σ , ktoré definujeme ako

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

, kde M a R sú celková hmotnosť a polomer hviezd a $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ je priemerná hustota hviezd.

Pre konkrétnu hviezdu, ktorú budeme v tejto časti uvažovať, sú uvedené nasledujúce informácie:

- Centrálna hustota $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$
- Polovica hmotnosti hviezd je obsiahnutá vnútri 25 % jej celkového polomeru a 70 % jej hmotnosti je obsiahnutých vnútri 35 % jej celkového polomeru.

Vo všetkých nasledujúcich častiach tejto otázky bude postačujúce zaokrúhliť všetky odvodené numerické koeficienty na 0,005.

(T11.3a) Vyjadrite vyššie uvedenú rovnicu opisujúcu závislosť hmotnosti od polomere pomocou [2]
 x , $\frac{dq(x)}{dx}$ a $\sigma(x)$.

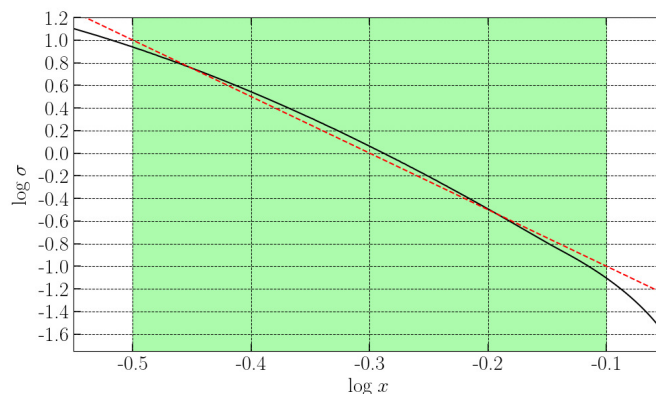
Na získanie rozloženia hmotnosti podľa polomeru potrebujeme poznať profil hustoty vnútri hviezd. Pre účely tohto problému opíšeme zmenu hustoty podľa polomeru približnými formami v dvoch oblastiach x :

- vnútorná časť hviezd: $0 \leq x \leq 0,32$
- stredná časť hviezd: $0,32 < x < 0,80$

Pre vonkajšiu časť, t.j. $0,80 \leq x \leq 1,00$, nerobíme žiadnu aproximáciu.

(T11.3b) **Aproximácia pre strednú časť:**

Zmena $\log \sigma$ ako funkcia $\log x$ v strednej časti hviezd je zobrazená (čiernou krivkou) v grafe nižšie. Urobíme lineárnu aproximáciu (zobrazenú prerušovanou červenou čiarou) pre $\log \sigma$ ako funkciu $\log x$ v oblasti $-0,5 < \log x < -0,1$, t.j. $0,32 \lesssim x \lesssim 0,80$ (zobrazené zelenou tieňovanou oblasťou). Ďalej aproximujeme sklon tejto čiary na najbližšie celé číslo.



Použite túto aproximáciu na napísanie výrazu pre $\sigma(x)$ ako funkciu x v oblasti [4]
 $0,32 < x < 0,80$.

(T11.3c) Použite výsledok z (T11.3b) na odvodenie výrazu pre $q(x)$ v oblasti $0,32 < x < 0,80$. [6]

(T11.3d) **Aproximácia pre vnútornú časť:**

Vo vnútornej časti hviezdy ($0 \leq x \leq 0,32$) môže byť hustota aproximovaná ako lineárna funkcia polomeru, t.j. $\sigma(x) = Ax + B$, kde A, B sú konštanty. Určte A a B , a tým získajte výraz pre $q(x)$ v oblasti $0 \leq x \leq 0,32$. Upozorňujeme, že aproximácie prijaté v predchádzajúcej časti a tejto časti môžu viesť k malým nespojitostiam v hustote alebo hmotnosti pri $x = 0,32$. [8]

(T11.3e) Výrazy pre $q(x)$ získané v častiach (T11.3c) a (T11.3d) sú aproximácie, ktoré dobre opisujú zmenu hmotnosti podľa polomeru, ale iba v špecifických oblastiach hviezdy. Pre oblasť $0,80 \leq x \leq 1$ (pre ktorú sme neodvodili žiadny výraz), je možné použiť vhodnú extrapoláciu z príľahlej oblasti. Použite tieto približné výrazy a dané údaje na načrtnutie hladkej krivky (bez nespojitostí v $q(x)$ alebo jeho derivácii) pre $q(x)$ vs x pre celú hviezdu ($0 \leq x \leq 1$), ktorá predstavuje zmenu hmotnosti podľa polomeru. [4]

(T12) Hawkingovo žiarenie z čiernych dier

[50 bodov]

(T12.1) Čierna diera (BH) sa typicky formuje gravitačným kolapsom masívnej hviezdy na konci jej životného cyklu do bodu nazývaného singularita. Kvôli extrémnej gravitácii takéhoto objektu nič, čo vstúpi do takzvaného horizontu udalostí (guľová plocha s $r = R_{SC}$, kde r je vzdialenosť od singularity), z neho nedokáže uniknúť. Tu sa R_{SC} označuje ako Schwarzschildov polomer.

(T12.1a) **Modelovanie pôvodu Hawkingovho žiarenia:** Uvažujte dvojicu častíc, každú s hmotnosťou m , ktorá vznikla na oboch stranách horizontu udalostí čiernej diery. Jedna častica je mierne mimo horizontu na $r \approx R_{SC}$, zatiaľ čo druhá častica je vnútri horizontu na $r = \kappa R_{SC}$. Predpokladajte, že celková energia častice je súčtom jej energie kludovej hmotnosti mc^2 a gravitačnej potenciálnej energie v dôsledku čiernej diery.

Určte hodnotu κ , pre ktorú má dvojica častíc nulovú celkovú energiu.

[4]

(T12.1b) **Teplota čiernej diery:** Ak má častica vytvorená mimo horizontu v uvedenom procese dostatočnú kinetickú energiu, môže uniknúť z čiernej diery v procese nazývanom Hawkingovo žiarenie. Tá, ktorá je vo vnútri horizontu a má zápornú energiu, je absorbovaná a znižuje hmotnosť čiernej diery.

Predpokladajme, že všetko Hawkingovo žiarenie je tvorené fotónmi so spektrom absolútne čierneho telesa, ktoré vrcholí pri vlnovej dĺžke $\lambda_{bb} \approx 16R_{SC}$. Je známe, že pre čiernu dieru s hmotnosťou Slnka je $R_{SC, \odot} = 2,952$ km.

Získajte výraz pre teplotu, T_{bh} , čiernej diery zodpovedajúcej tomuto žiareniu čierneho telesa, v závislosti od jej hmotnosti M_{bh} a fyzikálnych konštánt. Vypočítajte Schwarzschildov polomer $R_{SC, 10\odot}$ a teplotu $T_{bh, 10\odot}$ pre čiernu dieru s hmotnosťou $10 M_{\odot}$. [4]

(T12.1c) **Úbytok hmotnosti čiernej diery:** Predpokladajte, že Hawkingovo žiarenie je vyžarované z horizontu udalostí.

Pomocou ekvivalencie hmotnosti a energie získajte výraz pre rýchlosť úbytku hmotnosti $dM_{bh}(t)/dt$ v závislosti od hmotnosti $M_{bh}(t)$ čiernej diery a fyzikálnych konštánt.

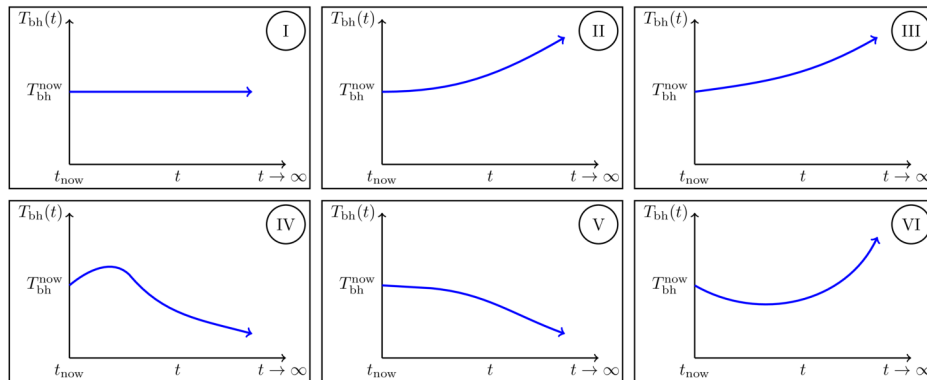
Získajte teda výraz pre $M_{bh}(t)$ pre čiernu dieru s počiatočnou hmotnosťou M_0 . [8]
Nakreslite $M_{bh}(t)$ ako funkciu t od $M_{bh} = M_0$ po $M_{bh} = 0$.

(T12.1d) **Životnosť čiernej diery:** Získajte výraz pre životnosť τ_{BH} , pri ktorej sa čierna diera s počiatkovou hmotnosťou M_0 úplne vyparí v dôsledku Hawkingovho žiarenia, v závislosti od M_0 a fyzikálnych konštánt. Vypočítajte životnosť $\tau_{bh,10\odot}$ (v sekundách) pre čiernu dieru s $M_0 = 10 M_\odot$. [3]

(T12.1e) **Čierna diera obklopená kozmickým mikrovlnným žiarením:** uvažujte izolovanú čiernu dieru vo vesmíre, ďaleko od iných telies, s aktuálnou teplotou T_{bh}^{now} , obklopenú kozmickým mikrovlnným pozadím (Cosmic Microwave Background, CMB) s aktuálnou teplotou $T_{cmb}^{now} = 2,7$ K. Čierna diera môže zvyšovať svoju hmotnosť absorbovaním CMB žiarenia a strácať svoju hmotnosť Hawkingovým žiarením.

Berúc do úvahy zrýchľujúcu sa expanziu vesmíru, určte, ktoré z obrázkov dolu ukazujú dlhodobý časový vývoj T_{bh} v nasledujúcich troch prípadoch:

(X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Označte svoju odpoveď zaškrtnutím príslušného políčka (iba jedno) pre každý prípad X, Y alebo Z v tabuľke uvedenej v súhrnnom odpovedovom hárku, ktorý zodpovedá príslušnému číslu obrázku. [6]

(T12.2) Prvotné čierne diery (Primordial Black Holes, PBHs) s oveľa menšími hmotnosťami mohli vzniknúť vo veľmi ranom vesmíre. Všetky nasledujúce úlohy sa týkajú PBHs. Tu môžeme zanedbať akékoľvek procesy, ktoré zvyšujú hmotnosť čiernej diery.

(T12.2a) **PBH vyparujúca sa v súčasnej ére:** Ako ste si mohli všimnúť z odpovedí na predchádzajúce úlohy, čierne diery s hmotnosťou S_{nka} by potrebovali dlhý čas na vyparenie. Avšak, keďže PBH môžu mať oveľa menšiu hmotnosť, môžeme ich vidieť vyparovať sa v súčasnosti.

Nájdite počiatkovú hmotnosť $M_{0, PBH}$ (v kg), Schwarzschildov polomer $R_{SC, PBH}$ (v m) a teplotu T_{PBH} (v K) čiernej diery, ktorá sa môže úplne vyparíť v súčasnej dobe, t.j. tie s dobou života $\tau_{PBH} = 14$ miliárd rokov. [4]

(T12.2b) **Formovanie PBH:** V ranom vesmíre, v ktorom dominovalo žiarenie, sa škálovací faktor menil ako $a(t) \sim t^{1/2}$. V tomto období sa PBH formovali v dôsledku kolapsu všetkej energie obsiahnutej v oblasti fyzickej veľkosti ct , kde t je vek vesmíru v tom čase.

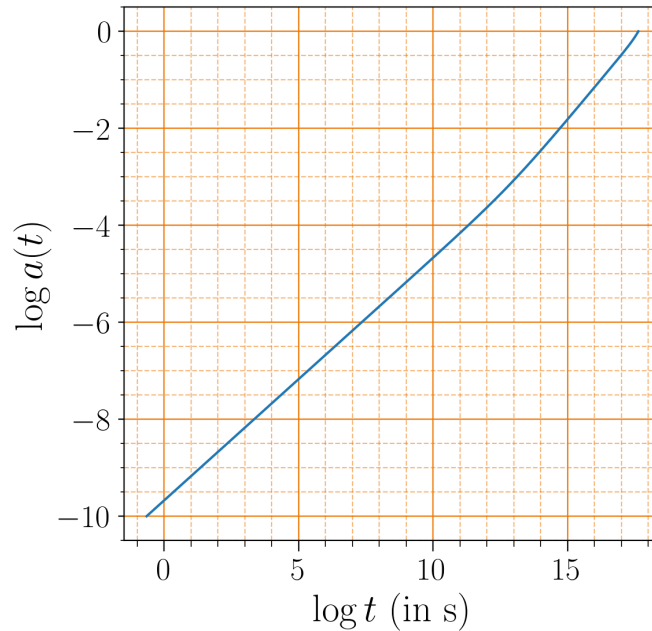
PBH s hmotnosťou 1×10^{12} kg sa formuje, keď je vek vesmíru približne 1×10^{-23} s. Vypočítajte vek vesmíru, t_{20} , keď sa formuje PBH s hmotnosťou 1×10^{20} kg. [6]

(T12.2c) **Pozorované spektrum Hawkingovho žiarenia z PBH:** Uvažujte PBH s počiatkovou hmotnosťou 1×10^{10} kg, ktorá sa na konci svojho života úplne vyparí τ_{PBH} . Pre túto časť predpokladajte pre jednoduchosť, že väčšina Hawkingovho žiarenia je doteraz vyžiarená, s teplotou zodpovedajúcou jeho počiatkovej hmotnosti. Tiež predpokladajte, že škálovací faktor vesmíru sa vyvíja ako $a(t) \sim t^{2/3}$.

Vypočítajte vlnovú dĺžku maxima tohto Hawkingovho žiarenia, ako je v súčasnej ére (pri $t = 14$ miliárd rokov) pozorované zo Zeme λ_{earth} . [5]

- (T12.2d) **Vysokoenergetické kozmické žiarenie z PBH:** Teraz predpokladajme, že Hawkingovo žiarenie emitované v danom čase t zodpovedá fotónom emitovaným s energiou $k_B T_{\text{bh}}(t)$. Najvyššia možná teplota pre čiernu dieru je Planckova teplota T_{Planck} , kde $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Evolúcia škálovacieho faktora v priebehu relevantných časových mierok je znázornená na nasledujúcom obrázku. Škálovací faktor má v súčasnosti hodnotu 1. $t(s)$ na časovej osi predstavuje vek vesmíru v sekundách.



Ak je na Zemi pozorovaný fotón s energiou $E_{\text{det}} = 3,0 \times 10^{20}$ eV, určte najväčšie a [10]
najmenšie možné hodnoty počiatocnej hmotnosti PBH (M_0^{max} a M_0^{min}), ktoré by
mohli vyžiariť tento fotón.