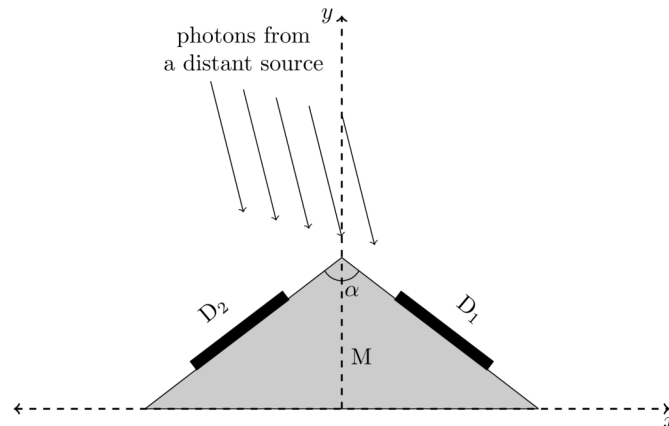


(T01) Мисија Дакша

[10 поена]

„Дакша“ је предложена индијска мисија која се састоји од два сателита S_1 и S_2 који круже око Земље у истој кружној орбити полупречника $r = 7000 \text{ km}$, али са фазном разликом од 180° . Ови сателити посматрају универзум у домену високих енергија (Х-зраци и γ -зраци). Сваки од сателита Дакше користи неколико равних, правоугаоних детектора.

Да бисмо разумели како локализовати извор на небу, користићемо поједностављени модел мисије Дакша. Претпоставимо да S_1 има само два идентична детектора D_1 и D_2 , сваки површине $A = 0,50 \text{ m}^2$, причвршћених за непрозирни носач M као што је приказано на слици испод (превод текста са слике: „фотони из удаљеног извора“). Детектори леже симетрично око y осе у равнинама нормалним на x - y раван и заклапају угао $\alpha = 120^\circ$ један са другим.



- (T01.1) Приликом посматрања удаљеног извора који се налази у x - y равни, детектор D_1 региструје снагу $P_1 = 2,70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$, а детектор D_2 региструје снагу $P_2 = 4,70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$.

Процените угао η који заклапа вектор положаја извора са позитивним делом y -осе, при чему се угао супротан од казаљке на сату од позитивног дела y -осе сматра позитивним. [5]

Размотримо један сигнал из удаљеног извора (не нужно у x - y равни) који су забележила оба сателита (S_1 и S_2) Дакше. Времена максимума сигнала који су забележили S_1 и S_2 су t_1 и t_2 , респективно.

- (T01.2) Ако је $t_1 - t_2$ измерено време и износи $10,0 \pm 0,1 \text{ ms}$, онда одредити део, f , небеске сфере где би извор могао да се налази. [5]

(T02) Макар-Санкранти

[10 поена]

Фестивал „Макар-Санкранти“ се слави у Индији када Сунце улази у зодијачки регион сазвежђа Јарац (Макар = Јарац, Санкранти = Улазак) гледано са Земље. Слави се сваке године око 14. јануара. Пре много година овај фестивал се такође поклапао са зимским солстицијем на северној хемисфери, за који подразумевамо да се дешава 21. децембра.

- (T02.1) На основу горе наведених информација, пронађите годину, y_c , када се прослава овог фестивала последњи пут поклопила са зимским солстицијем на северној хемисфери. [3]
- (T02.2) Ако је Сунце ушло у зодијачки регион сазвежђа Јарац по локалном времену од 11:50:13 часова 14. јануара 2006. године у Мумбају, израчунајте датум, D_{enter} , и локално време, t_{enter} , његовог уласка у сазвежђе Јарац 2013. године. [3]
- (T02.3) Фестивал Макар-Санкранти се слави на одређеном месту на дан првог заласка Сунца у зодијачком региону сазвежђа Јарац. Можемо да претпоставимо да је локално време заласка Сунца за Мумбај у јануару 18:30:00 часова.

Наведите датум прославе фестивала за сваку годину почев од 2006. и закључно са 2013. [4]
(означавањем (✓) одговарајућег поља у табели датај у листу са резимеом одговора).

(T03) Гравитациони таласи

[15 поена]

Орбитирајуће двојне црне рупе генеришу гравитационе таласе. Размотримо две црне рупе, у нашој Галаксији, са масама $M = 36 M_{\odot}$ и $m = 29 M_{\odot}$, које се окрећу у кружним орбитама са орбиталном угаоном фреквенцијом ω око свог центра масе.

(T03.1) Под претпоставком Њутновске гравитације, изведите израз за угаону фреквенцију, ω_{ini} , орбите црних рупа у тренутку t_{ini} , када је растојање између црних рупа било 4,0 пута веће од збира њихових Шварцшилдових полупречника, у терминима само M , m и физичких константи.

Израчунај вредност ω_{ini} (у rad s^{-1}).

[5]

(T03.2) У општој релативности, црне рупе у орбити емитују гравитационе таласе са фреквенцијом f_{GW} , тако да $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. Ово смањује орбите црне рупе, што заузврат повећава f_{GW} . Брзина промене f_{GW} је

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

где $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ назива „маса цвркута“.

Пронађите вредности α , β и δ .

[4]

(T03.3) Претпоставимо да су гравитациони таласи повезани са догађајем први пут детектовани у тренутку $t_{\text{ini}} = 0$. [6]

Изведите израз за посматрано време спајања црних рупа, t_{merge} , када f_{GW} постане веома велико, само у терминима ω_{ini} , M_{chirp} и физичких константи.
Израчунај вредност t_{merge} (у секундама).

(T04) Балмеров однос

[15 поена]

Размотримо звезду главног низа окружену маглином. Посматрана привидна магнитуда звезде у V опсегу износи 11,315 mag. Јонизована област маглине близу звезде има емисионе линије $\text{H}\alpha$ и $\text{H}\beta$, чије су таласне дужине су $0,6563 \mu\text{m}$ и $0,4861 \mu\text{m}$, респективно. Теоријски предвиђени однос флуксева у $\text{H}\alpha$ и $\text{H}\beta$ линијама је $f_{\text{H}\alpha}/f_{\text{H}\beta} = 2.86$. Међутим, када ово зрачење прође кроз спољашњи део хладне прашњаве маглине, посматрани емисиони флуксеви линија $\text{H}\alpha$ и $\text{H}\beta$ су $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ и $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$, респективно.

Екстинкција A_{λ} је функција таласне дужине и изражава се као

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(BV).$$

Овде је $\kappa(\lambda)$ крива екстинкције, а $E(BV)$ означава вишак боје, односно колор ексцес у В и V филтерима. Крива екстинкције (са λ у μm) дата је на следећи начин.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

где је $R_V = A_V/E(BV) = 3.1$ однос укупне и селективне екстинкције мерене колор ексцесом.

(T04.1) Нађите вредности $\kappa(H\alpha)$ и $\kappa(H\beta)$. [3]

(T04.2) Наћи вредност односа колор ексцеса $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(BV)}$. [4]

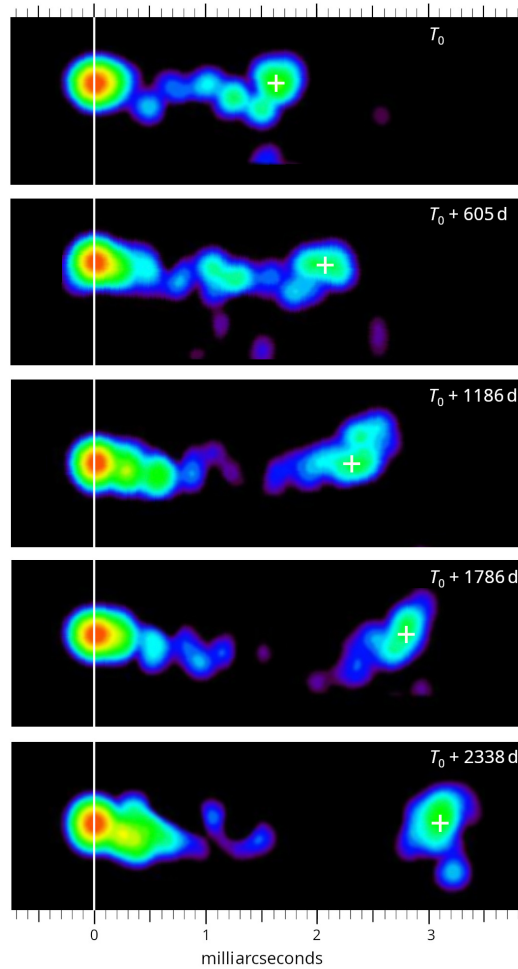
(T04.3) Процените екстинкцију узроковану маглином, $A_{H\alpha}$ и $A_{H\beta}$, на $H\alpha$ и $H\beta$ таласним дужинама, респективно. [6]

(T04.4) Процените екстинкцију узроковану маглином (A_V) и привидну магнитуду звезде у V опсегу, m_{V0} , у одсуству маглине. [2]

(T05) Квазари

[20 поена]

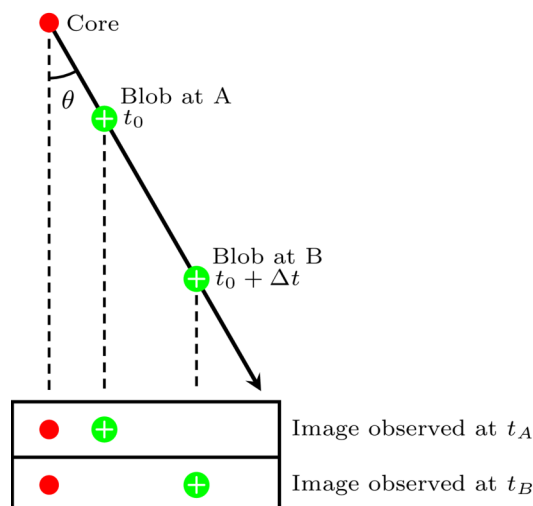
Квазар је изузетно светла активна галаксија која садржи супермасивну црну рупу која избацује релативистичке млазеве материје познате као џетови. Слика приказује низ панела радио посматрања квазара (са црвеним помаком $z = 0.53$ и луминозном удаљеношћу $D_L = 1,00 \times 10^{10}$ ly у различитим временима. „Језгро“ галаксије се поравнава са вертикалном белом линијом, док се млаз, приказан „мрљом“ (означен белим +), удаљава од ње током времена. Сваки панел приказује време посматрања (почевши од T_0 за прву слику), а угаона скала је назначена на врху и дну слике.



- (T05.1) Одредите угаоно растојање мрље, ϕ_{blob} (у лучним милисекундама), и њено попречно растојање, l_{blob} (у светлосним годинама), од језгра квазара за свако посматрање. Затим, израчунајте привидну брзину мрље у попречном правцу (v_{app}) као део брзине светлости, β_{app} ($= v_{\text{app}}/c$) користећи узастопна посматрања. Израчунајте просечну привидну брзину $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ током целог посматраног интервала. [5]

Млаз квазара се заправо креће релативистичком брзином $v \equiv \beta c$, али не нужно у равни неба; нпр., правац кретања заклапа угао θ („угао одклона“) у односу на правац визуре удаљеног посматрача (означен испрекиданим линијама), као што је приказано на скици испод.

За овај и све наредне делове задатка, занемарите црвени помак квазара и све релативистичке ефекте.



- (T05.2) Светлост коју емитује мрља у два различита тренутка t_0 (што одговара позицији А) и $t_0 + \Delta t$ (што одговара позицији В) допире до посматрача у t_A и t_B , респективно. Дакле, посматрана временска разлика је $\Delta t_{app} = t_B - t_A$.
- (T05.2a) Изразите однос $\frac{\Delta t_{app}}{\Delta t}$ помоћу β and θ . [2]
- (T05.2b) Користећи овај однос, изразите β_{app} помоћу β и θ . [2]
- (T05.3) Кретање се назива суперлуминозним ако привидна брзина премашује брзину светлости ($\beta_{app} > 1$), а сублуминозним ако то није случај ($\beta_{app} < 1$).
- (T05.3a) За $\beta_{app} = 1$, нацртајте глатку криву β као функције од θ да бисте означили границу између сублуминозног и суперлуминозног кретања. Осенчите суперлуминозну област на графику косим линијама (///). [4]
- (T05.3b) Пронађите најнижу праву брзину млаза ($\beta_{low} = v_{low}/c$) да би се десило суперлуминозно кретања, као и његов одговарајући угао оријентације θ_{low} . [2]
- (T05.4) Пронађите израз за максимални угао одклона, θ_{max} , за који ће бити могућа дата вредност β_{app} . [2]
- Језгро квазара, његов централни компактни објекат, показује варијабилност у својој емисији због унутрашњих процеса који се одвијају унутар узрочно повезаног региона. Величина (= полупречник) овог региона се обично узима да је око пет пута већа од Шварцшилдовог полупречника језгра.
- (T05.5) Утврђено је да језгро одређеног квазара варира на временској скали од око 1 сат. Одредите горњу границу, $M_{c, max}$, масе централног компактног објекта, у јединицама соларне масе. [3]

(T06) Галактичка ротација

[20 поена]

Крива ротације наше Галаксије одређена је коришћењем мерења брзине облака неутралног водоника (HI) дуж различитих Галактичких лонгитуда, посматраних кроз 21 cm линију HI. Размотримо HI облак са Галактичком лонгитудом l , који се налази на удаљености R од Галактичког центра (GC) и удаљености D од Сунца. Размотримо да је Сунце на удаљености $R_0 = 8.5$ kpc од GC. Претпоставимо да су и Сунце и HI облак у кружним орбитама око GC у Галактичкој равни, са угаоним брзинама Ω_0 и Ω , и брзинама ротације V_0 и V , респективно.

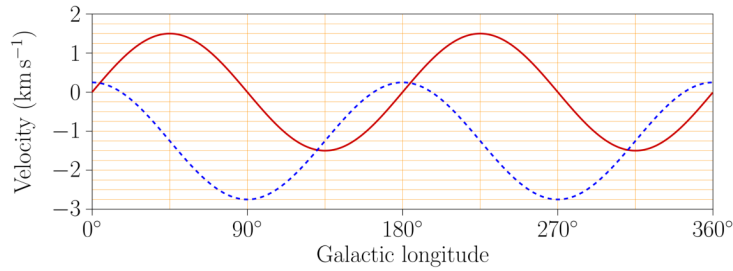
Компоненте брзине за облак су радијална (V_r) и трансверзална (V_t), посматране са Сунца и могу се представити као:

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Гледано са Северног галактичког пола, галактичка ротација је у смеру казаљке на сату. Кроз овај проблем, радијалну брзину ћемо сматрати позитивном при удаљавању, а облаке ћемо третирали као тачкасте објекте.

- (T06.1) На графикону датом на листу са резимеом одговора, нацртајте $(V_t)_{\text{max}}$ као функцију од D у интервалу од $D = 0$ до $D = 2R_0$ за две радијалне брзине дефинисане са (i) $l = 45^\circ$ и (ii) $l = 135^\circ$. Означите сваку од ваших линија/кривих одговарајућом вредношћу l . [5]
- (T06.2) График испод текста показује просечне радијалне (пуна, црвена крива) и трансверзалне (испрекидана, плава крива) компоненте брзине звезда на удаљености од 100 pc од Сунца, приказане као функција Галактичке лонгитуде.



Користећи график, процените орбитални период Сунца (P) око GC у милионима година [3]
(Myr).

(T06.3) Јан Орт је приметио да ће у околини Сунца ($D \ll R_0$) разлика у угаоним брзинама ($\Omega - \Omega_0$) бити мала, и стога је извео следећу апроксимацију првог реда за радијалну и трансверзалну компоненту брзине:

$$\begin{aligned} V_r &= AD \sin 2l \\ V_t &= AD \cos 2l + BD \end{aligned}$$

где су A и B познатији као Ортове константе.

Размотримо два случаја:

(I) стварна посматрана крива ротације Галаксије, и

(II) крива ротације је за хипотетички сценарио где је Галаксија лишена тамне материје и претпоставља се да је цела маса Галаксије концентрисана у њеном центру.

(T06.3a) Изведите изразе за радијални градијент брзине ротације на локацији Сунца, [2]
 $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$, за два случаја.

(T06.3b) Изразите A и B преко V_0 , R_0 и радијалног градијента брзине ротације на [8]
локацији Сунца, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$.

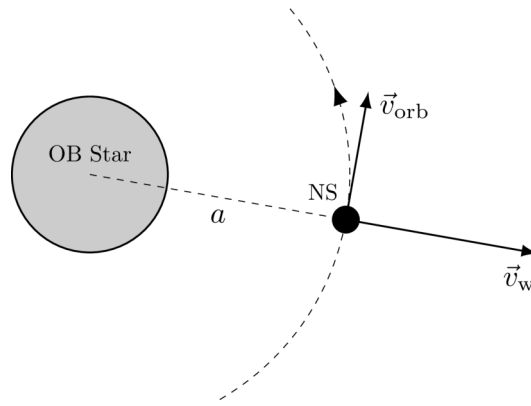
(T06.3c) Однос (A/B) Ортових константи за два дата случаја, (I) и (II), дефинисан је као F_I [2]
и F_{II} , респективно. Одредити F_I и F_{II} .

(T07) Неутронска звезда у двојном систему

[20 поена]

У двојном систему који укључује компактну звезду, где звезда пратилац не прелази свој Рошов овал, примарни извор акреције за компактну звезду је звездани ветар са звезде пратиоца. Ова акреција, подстакнута звезданим ветром, посебно је значајна у системима који укључују звезду раног типа (као што је О или В звезда, у даљем тексту означена као ОВ звезда), поред компактног објекта попут неутронске звезде (NS) у блиској орбити.

Размотримо такав двојни систем NS-OV звезде где се неутронска звезда масе $M_{NS} = 2,0 M_\odot$ и полупречника $R_{NS} = 11 \text{ km}$ креће по кружној орбити полупречника a око центра ОВ звезде брзином $v_{orb} = 1,5 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ (видети слику испод). Претпоставља се да је губитак масе са ОВ звезде сферно симетричан и да је његова брзина $\dot{M}_{OV} = 1,0 \times 10^{-4} M_\odot \text{ yr}^{-1}$.



- (T07.1) Полупречник акреције, R_{acc} , дефинисан је као максимална удаљеност од NS на којој NS може да привуче звездани ветар. Ако је брзина звезданог ветра у близини NS $v_w = 3,0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, пронађите R_{acc} за горе наведени систем у km користећи стандардни прорачун за космичку брзину. [3]
- (T07.2) Под претпоставком да је сав заробљени материјал акретован од стране NS, процените брзину акреције масе, $\dot{M}_{\text{acc}}$, звезданог ветра на NS у јединицама $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ ако је $a = 0,5 \text{ au}$. Занемарите ефекте притиска зрачења и коначног времена хлађења акреционог гаса. [3]
- (T07.3) Сада размотримо ситуацију где брзина звезданог ветра на орбиталној удаљености a (близу NS) постаје упоредива са орбиталном брзином NS. Брзина акреције масе са звезданог ветра на NS у овом случају би била дата изразом облика $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} f(\tan \beta, q)$, где $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$ однос маса звезда у двојном систему, а β угао посматран са NS између правца брзине ветра и радијалног правца у смеру од OB звезде. Изведите израз за $f(\tan \beta, q)$ под претпоставком да је $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$. [6]
- (T07.4) Узмимо у обзир да се потпуно јонизовани материјал акретује радијално и да је ометен због јаког магнетног поља $\vec{B}$ неутронске звезде. Овај ефекат се може моделовати као притисак, дат са $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Претпоставићемо да NS има диполно магнетно поље чији се интензитет мења у екваторијалној равни са растојањем r од NS при чему за $r \gg R_{\text{NS}}$ важи:

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

где је B_0 магнетно поље на екватору NS. Претпоставимо да се оса магнетног дипола поклапа са осом ротације NS.

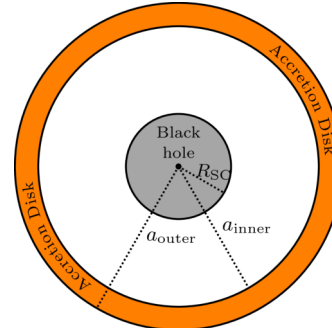
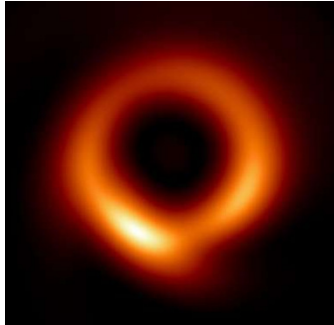
- (T07.4a) Израчунајте магнетни притисак, $P_{\text{eq, mag}}$, у екваторијалној равни у зависности од B_0 , R_{NS} , r , и других одговарајућих константи. [1]
- (T07.4b) Максимално растојање на којем магнетно поље у екваторијалној равни зауставља акрециони ток, назива се полупречник магнетосфере R_m . Овај ток материје ће вршити притисак због релативног кретања између долазећег звезданог ветра и NS. Пронађите израз за критичну вредност магнетног поља $B_{0,c}$ за коју се R_m поклапа са R_{acc} и израчунајте вредност магнетне индукције у Теслама. Магнетни ефекти се занемарују за $r > R_m$ и размотрите $v_w \gg v_{\text{orb}}$. [7]

(T08) Сенка црне рупе

[20 поена]

Телескоп „Event Horizon“ (ЕХТ) објавио је слику супермасивне црне рупе у центру галаксије М87, као што је приказано на левом панелу слике испод.

Да бисмо разумели неке једноставне карактеристике ове слике, размотрићемо поједностављени модел неротирајуће, статичне, сферно симетричне црне рупе масе $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$, окружене безмасеним, танким, равним акреционим диском унутрашњег и спољашњег полупречника, $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ и $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, респективно, где је R_{SC} Шварцшилдов полупречник. Скица погледа с'лица је приказана у десном панелу слике испод (слика није у размери).



Претпостављамо да је акрециони диск једини извор светлости који треба узети у обзир. Свака тачка на диску емитује светлост у свим правцима. Ова светлост путује под утицајем гравитационог поља црне рупе. Путања светлосних зрака је одређена двама једначинама датим у наставку (које су сличне онима објекта око Сунца):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

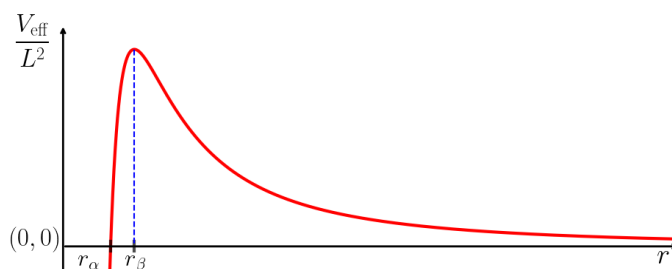
где је $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ радијална координата, $\phi \in [0, 2\pi)$ је азимутални угао, а E и L су константе повезане са очуваном енергијом и очуваним угаоним моментом, респективно.

Овде је $v_r \equiv dr/dt$ величина радијалне брзине, v_ϕ је величина тангенцијалне брзине, а $\omega \equiv d\phi/dt$ је угаона брзина. Дефинишемо параметар удара b за трајекторију као $b = L/\sqrt{2E}$. Временска дилатација се у овом проблему занемарује.

Још једна корисна једначина се добија диференцирањем прве једначине:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

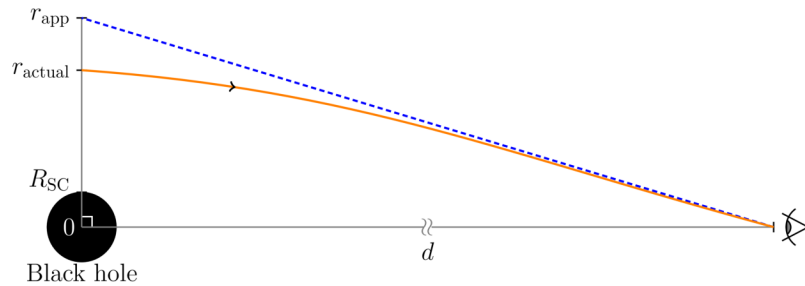
- (T08.1) Кружне трајекторије светлости могу постојати око црне рупе. Пронађите полупречник, r_{ph} , [4] и параметар удара, b_{ph} , за такве трајекторије фотона у терминима M и релевантних константи.
- (T08.2) Израчунајте време, T_{ph} , потребно за завршетак једне пуне орбите кружне путање светлости [2] у секундама.
- (T08.3) Једначина радијалне брзине дата горе (прва једначина у овом питању) може се упоредити са једначином облика $\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ за путање светлости. Шематски приказ V_{eff}/L^2 као функције од r дат је испод.



(T08.3a) График приказује два посебна полупречника, r_α и r_β . Изведите изразе за r_α и r_β у терминима M и релевантних константи. [2]

(T08.3b) Фотон који путује ка унутра од акреционог диска према црној рупи и даље може да побегне напоље у бесконачност у неким случајевима. Нађи израз за најмању вредност полупречника тачке обрта, r_t , за такав фотон, у терминима M и релевантних константи. Нађи израз за минималну вредност параметра удара, $b_{\min}$, за овај фотон. [3]

(T08.4) Зрак светлости који долази из полупречника r_{actual} из центра система у равни неба претрпеће јако савијање због гравитације црне рупе и на крају ће стићи до посматрача (означеног оком) на великој удаљености d од система, као што је приказано на слици испод.

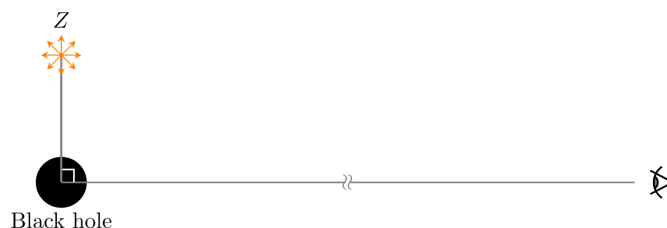


Овом посматрачу би се чинило да зрак потиче из друге тачке на удаљености $r_{\text{app}} \approx b$ од центра црне рупе у равни неба, где је b параметар удара за ту путању фотона. За тачке на акреционом диску у $r = r_{\text{actual}}$, може се претпоставити следећа релација:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

За удаљеног посматрача, као што смо ми, са погледом с'лица на акрециони диск, слика система ће изгледати кружно симетрично у равни неба. Одредити највећи спољни привидни полупречник, r_{outer} , и најмањи унутрашњи привидни полупречник, r_{inner} , слике у астрономским јединицама. [5]

(T08.5) Размотримо изоловану супермасивну црну рупу масе $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$ без икаквог акреционог диска. Кратак јак бљесак електромагнетног зрачења се јавља током 5 секунди у тачки Z на удаљености, рецимо, $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ од црне рупе, као што је приказано на слици. Бљесак у тачки Z емитује светлост у свим правцима. Посматрач у тачки далеко од црне рупе (означеној оком на слици испод) прави слику региона око црне рупе са дугом експозицијом током 60 секунди.



Изаберите исправну опцију за сваку од доле наведених изјава:

(T08.5a) Број могућих путања којима светлост може да путује од Z до посматрача је (А) Највише један (Б) Тачно један (Ц) Тачно два (Д) Веће од два. [2]

(T08.5b) Број слика ЕМ бљеска у Z које ће се видети на слици са дугом експозицијом је (А) Највише један (Б) Тачно један (Ц) Тачно два (Д) Веће од два. [2]

(T09) Атмосферски синг
[35 поена]

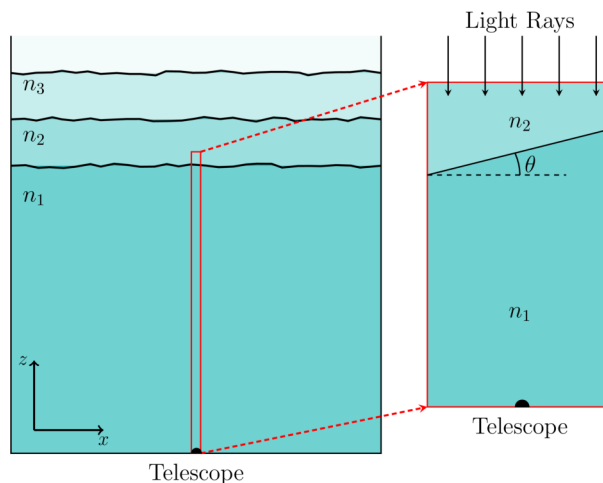
Телескоп са ахроматским конвексним објективом сочива пречника $D = 15 \text{ cm}$ и жижном даљином $f = 200 \text{ cm}$ усмерен је ка звезди у зениту.

- (T09.1) Наћи величину, d_{image} , слике тачкастог извора коју производи сочиво објектива у својој жижној равни за зелену светлост ($\lambda = 550 \text{ nm}$), узимајући у обзир само ефекте дифракције. **[1]**

На слику астрономског објекта утиче и такозвани „атмосферски синг“.

Границе између слојева у атмосфери, као и индекси преламања слојева, континуирано се мењају због турбуленције, варијација температуре и других фактора. То доводи до ситних промена у положају слике у жижној равни телескопа, познатих као „ефекат треперења“. За остатак проблема, осим дифракционо ограничене коначне величине слике звезде о којој је горе било речи, неће се разматрати ефекти интерференције.

Леви панел слике испод приказује вертикални попречни пресек атмосфере са више слојева различитих индекса преламања ($n_1, n_2, n_3, \dots$). Десни панел приказује увећани приказ танког вертикалног сегмента атмосфере и границе између два најнижа атмосферска слоја индекса преламања n_1 и n_2 ($n_1 > n_2$). За овај проблем разматрамо само ова два слоја и њихове границе. Дијаграми нису у размери.

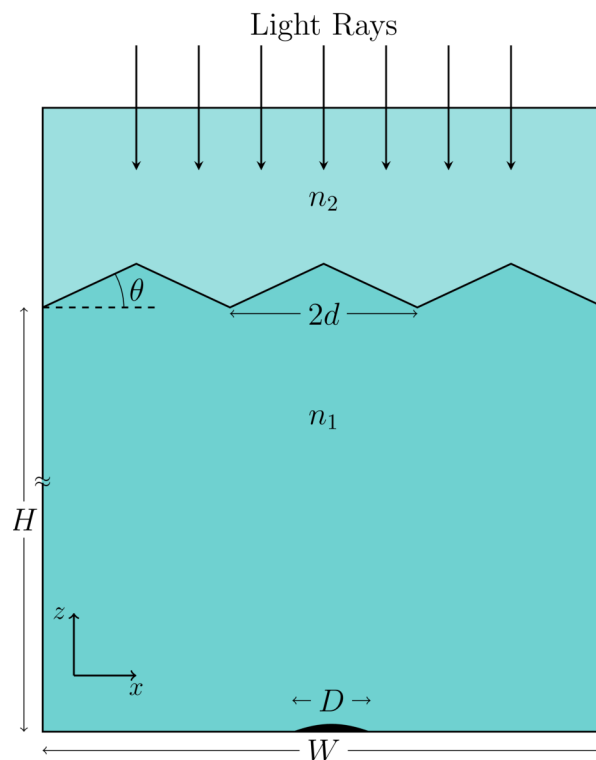


- (T09.2) Нека је граница између два слоја на висини $H = 1 \text{ km}$, са нагибом од $\theta = 30^\circ$ у односу на хоризонталу. За монохроматски извор светлости, $n_1 = 1,00027$ и $n_2 = 1,00026$. Нека је угаоно померање положаја слике у жижној равни телескопа за звезду у зениту α .
- (T09.2a) Нацртајте одговарајуће означен дијаграм зрака на ивици који приказује n_1, n_2, θ и α . **[2]**
- (T09.2b) Наћи израз за α у терминима θ, n_1 и n_2 . Користите апроксимације малих углова: $\sin \alpha \approx \alpha$ и $\cos \alpha \approx 1$. **[2]**
- (T09.2c) Израчунајте померање, Δx_θ (у метрима), у положају слике ако се θ повећа за 1% (одржавајући n_1 и n_2 фиксираним). **[3]**
- (T09.2d) Израчунајте померање, Δx_n (у m), у положају слике ако се n_2 повећа за 0,0001% (одржавајући n_1 и θ фиксираним). **[3]**
- (T09.3) За белу светлост која долази са звезде у зениту, изаберите која од следећих опција најближе описује облик и боју слике тако што ћете означити (✓) одговарајуће поље (само једно) у листу са резимеом одговора. **[2]**

	Боја слике	Облик слике	Лева ивица	Десна ивица
A	Бела	Кружни		
B	Бела	Елиптични		
C	Обојена	Кружни	Плава	Црвена
D	Обојена	Кружни	Црвена	Плава
E	Обојена	Елиптични	Плава	Црвена
F	Обојена	Елиптични	Црвена	Плава

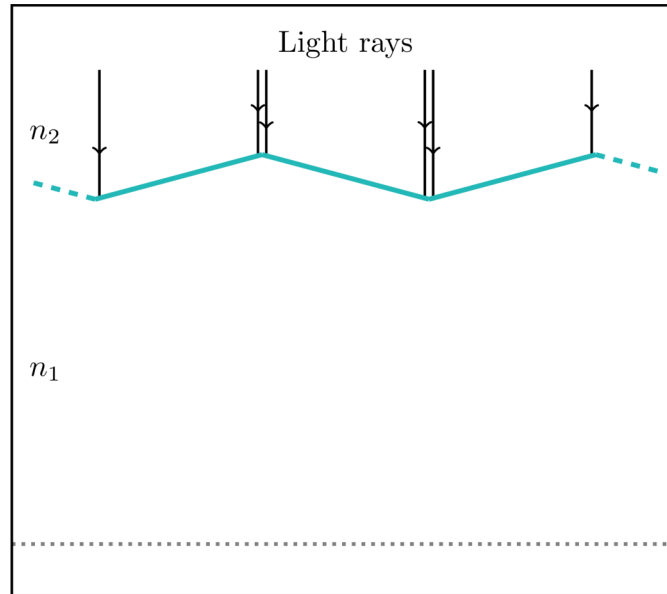
За све преостале делове овог питања разматрамо монохроматску жуту светлост са $\lambda = 550 \text{ nm}$. Моделирамо границу између слојева као скуп бесконачних цик-цак равни (које се пружају нормално на раван странице) раздвојених са $d = 10 \text{ cm}$ дуж x осе, са углом $\theta = 10^\circ$ или $\theta = -10^\circ$.

Доња слика (није у размери) приказује попречни пресек овог модела атмосфере ширине W ($W \ll H$). Код телескопа са великим отвором бленде, ова цик-цак природа границе доводи до формирања пега у жижиној равни.



(T09.4) Размотрите атмосферу моделирану као што је приказано изнад.

(T09.4a) Део атмосфере са узастопним цик-цак равнима, са истим параметрима као што је горе наведено, приказан је на дијаграму испод (није у размери).



На овом дијаграму, репродукованом у листу са резимеом одговора, нацртајте путање упадних светлосних зрака до равни у којој се налази објектив телескопа, што је приказано сивом испрекиданом линијом.

Означите регион(е), ако их има, са „X“ на дијаграму до којих неће допрети светлосни зраци. [4]

(T09.4b) Израчунајте ширину W_X таквог(их) региона(а). [3]

(T09.4c) Пронађите највећи пречник, $D_{\max}$, објектива телескопа помоћу којег ће бити могуће добити једну слику звезде, одговарајућим избором положаја телескопа у односу на структуру границе. [4]

(T09.5) Размотримо случај када је цик-цак облик границе дозвољен у оба правца x и y , и $D = 100$ cm (са $f = 200$ cm). [6]

Нацртајте квалитативни образац резултујућих пега у пољу датом у листу са резимеом одговора.

(T09.6) За турбулентну атмосферу поново размотримо исти паралелно текући цик-цак облик граничног слоја само дуж x правца, али сада се угао између две равни мења равномерном брзином од 10° до -10° за 1,0 s. Претпоставимо да ово доводи до равномерног померања положаја слике. [5]

Размотрите телескоп са $D = 8$ cm и $f = 1$ m. Процените најдуже време експозиције $t_{\max}$ дозвољено за његову CCD камеру тако да се добије само једна слика, а свако могуће одступање у њеном положају остане мање од 1% дифракцијом ограниченог пречника слике.

(T10) Нуклеосинтеза Великог праска

[35 поена]

Током ере доминације зрачења у раном Универзуму, фактор скалирања Универзума је $a \propto t^{1/2}$, где је t време од Великог праска. Рано, у овој ери, неутрони (n) и протони (p) остају у термодинамичкој равнотежи једни са другима путем слабих интеракција. Концентрација (N) слободних неутрона или протона је повезана са температуром T и њиховим одговарајућим масама m тако да је

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

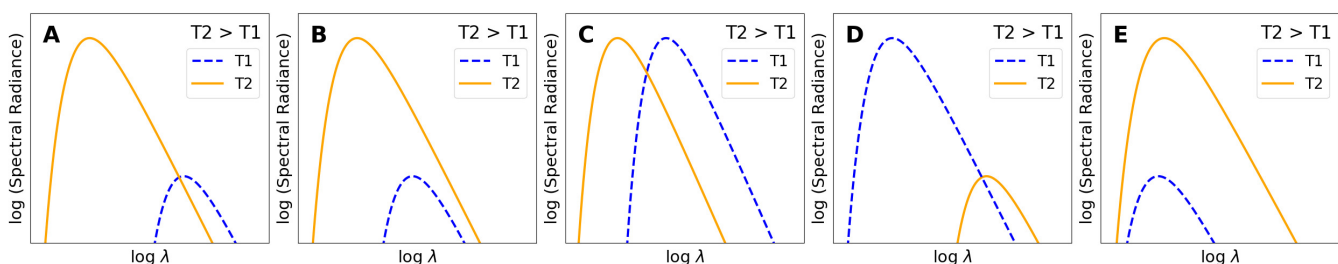
све док је време $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70 \text{ s}$, када $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800 \text{ keV}$. Након t_{wk} , слабе интеракције више не могу да одрже такву равнотежу, а слободни неутрони се распадају на протоне са временом полураспада од $610,4 \text{ s}$.

(T10.1) Нека је концентрација протона N_p , а неутрона N_n . Израчунајте релативну концентрацију неутрона $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ у тренутку t_{wk} . [4]

(T10.2) Фотони одржавају термодинамичку равнотежу и задржавају спектар црног тела у свим епохама.

(T10.2a) Пронађите индекс β , такав да је $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Одредите који од следећих графика приказује исправно понашање спектралне густине енергије за две температуре T_1 и T_2 . Означите са (✓) тачну опцију у листу са резимеом одговора. [2]



(T10.3) Након t_{wk} , процес формирања деутеријума од протона и неутрона описан је Сахином једначином, коју је формулисао индијски физичар проф. Мегнад Саха, која се може поједноставити следећим изразом:

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n) c^2}{k_B T} \right).$$

Овде је однос бариона и фотона $\eta = 6.1 \times 10^{-10}$, а N_D је концентрација деутеријума.

(T10.3a) Нацртајте однос N_D / N_n у координатном систему на листу са резимеом одговора, за најмање 4 размакнуте вредности температуре које леже у домену $k_B T = [60, 70] \text{ keV}$, и нацртајте глатку криву која пролази кроз ове тачке. [5]

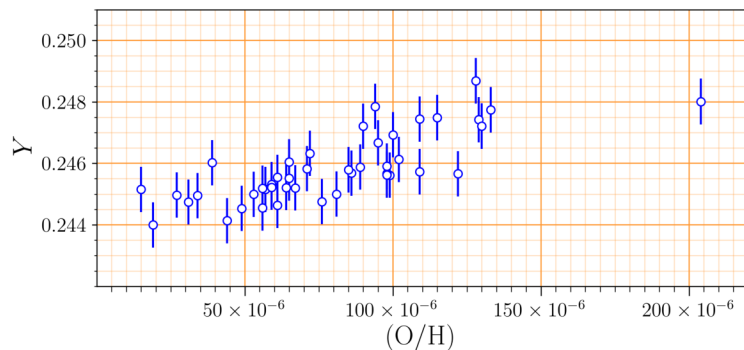
(T10.3b) Из графика пронађите $k_B T_{\text{nuc}}$ (у keV) где је $N_D = N_n$. [1]

(T10.3c) Претпоставимо да се сви слободни неутрони готово тренутно комбинују са протонима на $k_B T_{\text{nuc}}$ да би формирали деутеријум, и да се све то одмах претвара у хелијум (${}^4_2\text{He}$). Израчунајте одговарајућу епоху, или време нуклеосинтезе t_{nuc} (у s), за формирање хелијума. [4]

(T10.4) Израчунајте вредност $X_{n, \text{nuc}}$ непосредно пре t_{nuc} . [5]

(T10.5) Примордијална заступљеност хелијума, Y_{prim} , дефинисана је као део укупне масе у Универзуму који је садржан у хелијуму одмах након t_{nuc} . Дати теоријску процену за вредност Y_{prim} . Само за потребе овог прорачуна, претпоставимо да је $m_p \approx m_n$ и да је маса хелијума, $m_{\text{He}} \approx 4m_n$. [3]

- (T10.6) Првобитну заступљеност хелијума је веома тешко измерити, јер звезде континуирано претварају водоник у хелијум у Универзуму. Количина настала од стране звезда у галаксији карактерише се релативном концентрацијом кисеоника (који је произведен само у звездама) у односу на водоник у галаксији, означеном као (O/H) . Мерења концентрација (O/H) и хелијума, Y , за различите галаксије су приказана испод.



Користите све тачке на овом графику (који је репродукован у листу са резимеом одговора) да бисте одговорили на следећа питања.

- (T10.6a) Процените Y за плаву компактну патуљасту галаксију са вредношћу $(O/H)=1,75 \times 10^{-4}$. [2]
- (T10.6b) Израчунајте нагиб $dY/d(O/H)$ праве линије која пролази кроз горе наведене податке. [2]
- (T10.6c) Процените примордијалну заступљеност хелијума, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, на основу горе наведених посматрања. [2]
- (T10.7) Одступање између Y_{prim} и $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ може се превазићи променом односа бариона и фотона η . [3]
Када се η смањи, као што је назначено са $\downarrow$ у листу са резимеом одговора, назначите повећање ($\uparrow$) или смањење ($\downarrow$) следећих величина: $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (када је $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$ и Y_{prim} у пољима предвиђеним за то у листу са резимеом одговора.

(T11) Звезде кроз графике

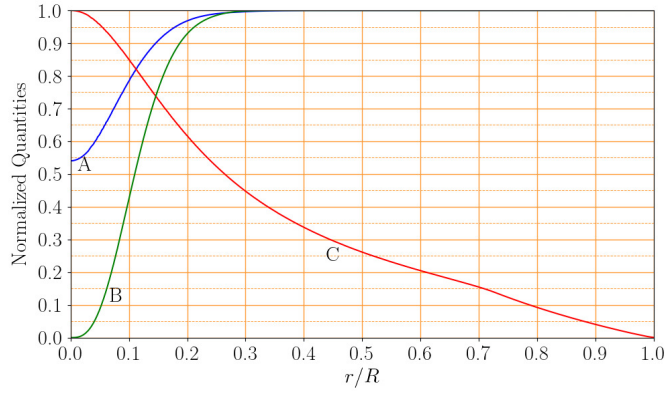
[50 поена]

Звезде се могу добро апроксимирати као сферно симетрични објекти, па се радијално растојање r од центра може изабрати као једина независна променљива у моделовању звезданих унутрашњости. Маса садржана унутар сфере полупречника r означена је са $m(r)$. Луминозност $l(r)$ је дефинисана као нето количина енергије која пролази кроз сферну површину полупречника r по јединици времена. Друге величине од интереса, на пример, густина $\rho(r)$, температура $T(r)$, масени удео водоника $X(r)$, масени удео хелијума $Y(r)$ и нуклеарна енергија генерисана по јединици масе по јединици времена $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, узимамо као функције од r . У овом задатку занемарићемо ефекте дифузије и гравитационог таложења елемената унутар звезде.

Симбол "log" се односи на логаритам са основом 10. Овај задатак се састоји од три независна проблема.

(T11.1) Део 1: Унутар звезде

Доњи график приказује варијацију три структурне величине, А, В и С, као функције нормализованог полупречника r/R у звезданом моделу масе $1 M_{\odot}$ и старости 4 GYr, где је R фотосферски полупречник звезде. Вредности масеног удела хелијума на површини (фотосфери) Y_s и металности (масеног удела свих елемената тежих од хелијума) на површини (фотосфери) Z_s звезде дате су са $(Y_s, Z_s) = (0.28, 0.02)$. Све величине приказане на графицима су нормализоване дељењем њиховим одговарајућим максималним вредностима.



(T11.1a) Јединствено одредите три величине А, В и С од пет понуђених:

[6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Упишите А/В/С у поља поред одговарајућих величина у листу са резимеом одговора. Није потребно образложење за ваш одговор.)

(T11.1b) Колики је масени удео хелијума, Y_c , у центру звезде?

[3]

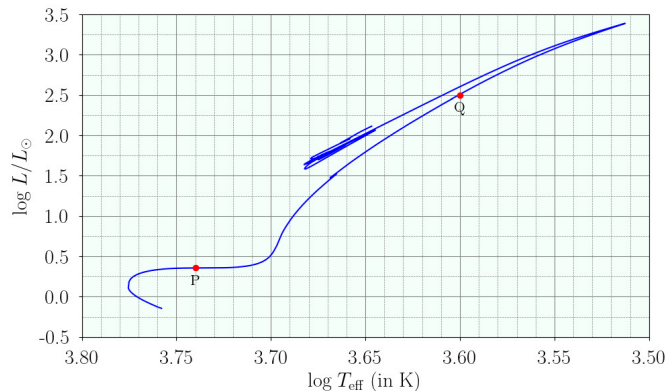
(T11.1c) Скицирајте преостале две величине са списка од пет (које нису идентификоване као криве А, В или С), а дате су у (T11.1a), као функције од r/R на истом графику у листу са резимеом одговора и означите их одговарајућим величинама.

[5]

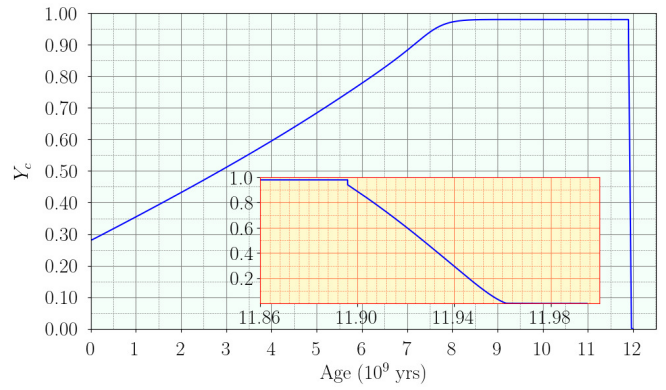
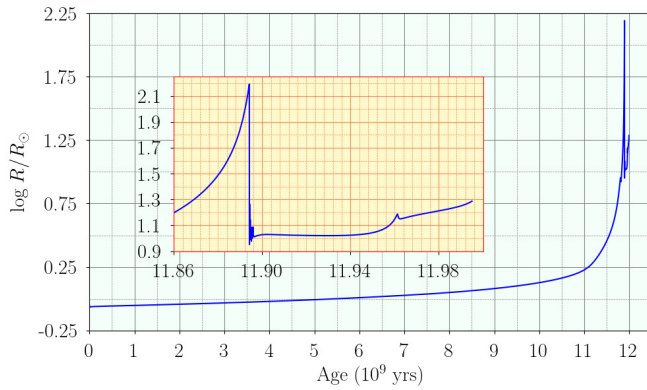
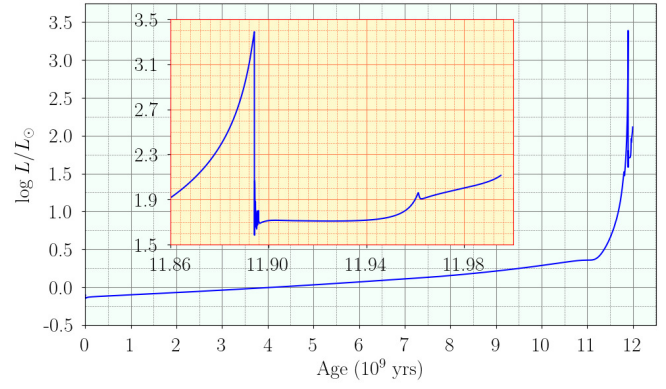
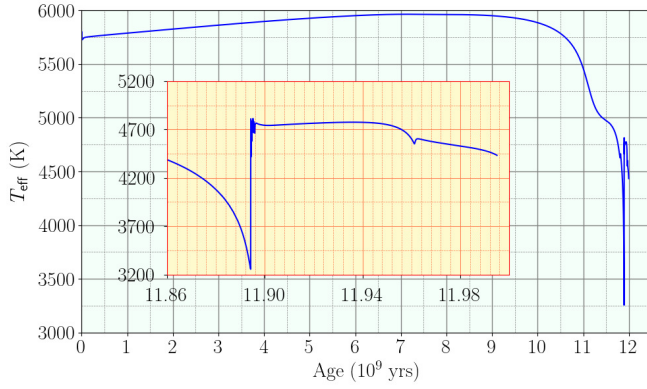
(T11.2) Део 2: Еволуција звезда

Размотримо еволуцију звезде $1M_{\odot}$ чији је почетни униформни састав дат преко масених удела хелијума, $Y_0 = 0.28$, и метала, $Z_0 = 0.02$. Сlike испод приказују варијације различитих глобалних величина ове звезде док еволуира од ZAMS (Главни низ нулте старости) до краја сагоревања хелијума у њеном језгру.

График испод приказује еволутивни пут звезде на HR дијаграму (график је у логаритамској скали, $\log L/L_{\odot}$ у односу на $\log T_{\text{eff}}$, где је L површински сјај, а T_{eff} ефективна температура).



Доња слика има четири графика која приказују варијацију T_{eff} (у K), L (приказано као $\log L/L_{\odot}$), R (приказано као $\log R/R_{\odot}$) и Y_c са старашћу (у 10^9 год) исте звезде. У сваком од ова четири графика, уметци детаљно приказују варијације одговарајућих величина између старости од 11.86×10^9 год до 12.00×10^9 год, ради веће јасноће.



Користите ове графике да бисте одговорили на доња питања.

(T11.2a) Колико приближно траје фаза главног низа звезде, t_{MS} (у годинама)? [1]

(T11.2б) Колико приближно траје фаза сагоревања хелијума у језгру звезде, Δt_{He} (у годинама)? [1]

(T11.2ц) Који део, f_{H} , почетне количине водоника у центру звезде је сагорео када је луминозност звезде $1 L_{\odot}$? [3]

(T11.2д) Колики је полупречник звезде, R_1 (у јединицама R) када је 60% почетне количине водоника у њеном центру сагорело? [3]

(T11.2е) Колики су полупречници звезде, R_P и R_Q (у јединицама $R_{\odot}$), који одговарају њеним положајима P и Q, респективно, као што је означено на HR-дијаграму? [4]

(T11.3) Део 3: Расподела масе унутар звезде

Једначина која описује расподелу масе унутар звезде дата је са

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Погодно је изразити ову једначину преко три бездимензионе променљиве, за масу, q , затим за полупречник, x и релативне густине, σ , које дефинишемо као

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

где су M и R укупна маса и полупречник звезде, респективно, а $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ је просечна густина звезде. За одређену звезду коју ћемо разматрати у овом делу, дате су следеће информације:

- Централна густина $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$
- Половина масе звезде налази се унутар 25% њеног укупног полупречника, а 70% њене масе налази се унутар 35% њеног укупног полупречника.

У свим наредним деловима овог питања, биће довољно заокружити све изведене нумеричке коефицијенте на 0,005.

- (T11.3a) Изразите горњу једначину која описује зависност масе од полупречника преко x , [2]
 $\frac{dq(x)}{dx}$ и $\sigma(x)$.

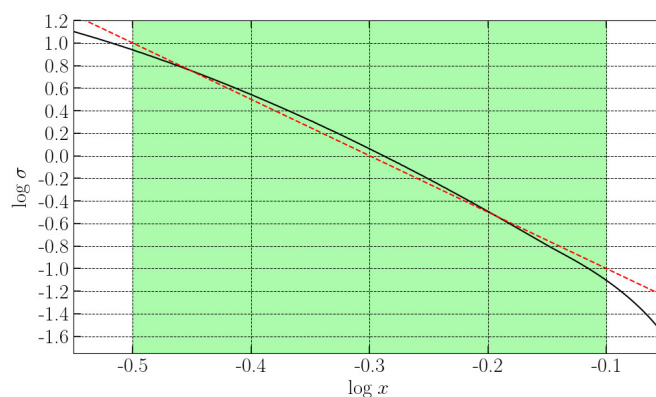
Да бисмо добили расподелу масе са полупречником, потребно је да знамо профил густине унутар звезде. За потребе овог проблема, описаћемо промену густине са полупречником приближним формама у два домена од x :

- унутрашњи део звезде: $0 \leq x \leq 0.32$
- средњи део звезде: $0.32 < x < 0.80$

Не правимо никакву апроксимацију за спољашњи део, тј. $0.80 \leq x \leq 1.00$.

- (T11.3b) Приближна вредност за средњи део:

Промена $\log \sigma$, као функције $\log x$ у средњем делу звезде, приказана је (црном кривом) на графику испод. Направићемо линеарну апроксимацију (приказану као испрекидана црвена линија на графику) за $\log \sigma$ као функцију $\log x$ у домену $-0.5 < \log x < -0.1$, тј. $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (приказано зелено освешеним доменом). Даље, апроксимираћемо нагиб ове линије најближим целим бројем.



Користите ову апроксимацију да бисте написали израз за $\sigma(x)$ као функцију од x [4]
у домену $0.32 < x < 0.80$.

- (T11.3c) Користите резултат (T11.3b) да бисте извели израз за $q(x)$ у домену [6]
 $0.32 < x < 0.80$.

- (T11.3d) Приближна вредност за унутрашњи део:

У унутрашњем делу звезде ($0 \leq x \leq 0.32$, густина се може апроксимирати као [8]
линеарна функција полупречника, тј. $\sigma(x) = Ax + B$, где су A, B константе. Одредити A и B и одредити израз за $q(x)$ у домену $0 \leq x \leq 0.32$. Апроксимације усвојене у претходном и овом делу могу довести до малих дисконтинуитета у густини или маси при $x = 0.32$.

- (T11.3e) Изрази за $q(x)$ добијени у деловима (T11.3c) и (T11.3d) су апроксимације које [4]
прилично добро описују варијацију масе са полупречником, али само у
одређеним областима звезде. За домен $0.80 \leq x \leq 1$ (за који нисмо извели
никакав израз), могуће је користити одговарајућу екстраполацију из суседне
области. Користите ове приближне изразе и дате податке да бисте скицирали
глатку криву (без икаквих дисконтинуитета било у $q(x)$ или њеном изводу) за
 $q(x)$ у зависности од x за целу звезду ($0 \leq x \leq 1$) која представља промену масе са
полупречником.

(T12) Хокингово зрачење из црних рупа

[50 поена]

- (T12.1) Црна рупа (ВН) се обично формира гравитационим колапсом масивне звезде на крају њеног
животног циклуса до тачке која се назива сингуларитет. Због екстремне гравитације таквог
објекта, ништа што уђе у такозвани хоризонт догађаја (сферна површина са $r = R_{SC}$, где је r
удаљеност од сингуларитета) не може да побегне из њега. Овде се R_{SC} назива
Шварцшилдовим полупречником.

- (T12.1a) **Моделовање порекла Хокинговог зрачења:** Размотримо пар честица, свака са
масом m , произведених са обе стране хоризонта ВН. Једна честица је мало изван
хоризонта на $r \approx R_{SC}$, док је друга честица унутар хоризонта на $r = \kappa R_{SC}$.
Претпоставимо да је укупна енергија честице збир њене енергије мировања масе
 mc^2 и гравитационе потенцијалне енергије услед ВН.

Одредити вредност κ за коју пар честица има укупну енергију једнаку нули.

[4]

- (T12.1b) **Температура црне рупе:** Ако честица произведена ван хоризонта у горе наведеном
процесу има довољно кинетичке енергије, она може да побегне из црне рупе у
процесу који се назива Хокингово зрачење. Она унутар хоризонта, која има
негативну енергију, бива апсорбована и смањује масу црне рупе.

Претпоставимо да је сво Хокингово зрачење састављено од фотона са спектром
црног тела који достиже највећу вредност на таласној дужини $\lambda_{bb} \approx 16R_{SC}$.
Познато је да за ВН соларне масе важи $R_{SC, \odot} = 2,952 \text{ km}$.

Изведите израз за температуру, T_{bh} , црне рупе која одговара зрачењу овог црног [4]
тела, у терминима њене масе M_{bh} и физичких константи. Израчунајте
Шварцшилдов полупречник, $R_{SC, 10\odot}$, и температуру, $T_{bh, 10\odot}$, за ВН са масом 10
 $M_{\odot}$.

- (T12.1c) **Губитак масе црне рупе:** Претпоставимо да се Хокингово зрачење емитује из
хоризонта догађаја.

Користећи еквиваленцију масе и енергије, изведите израз за брзину губитка
масе, $dM_{bh}(t)/dt$, у терминима масе $M_{bh}(t)$ ВН и физичких константи.

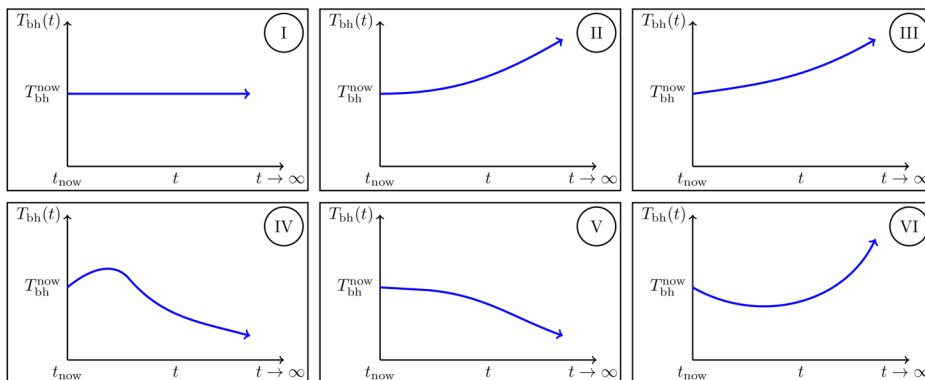
Дакле, изведите израз за $M_{bh}(t)$ за ВН са почетном масом M_0 . Скицирајте $M_{bh}(t)$ [8]
као функцију од t од $M_{bh} = M_0$ до $M_{bh} = 0$.

- (T12.1d) **Време живота црне рупе:** Изведите израз за време живота τ_{bh} при коме црна [3]
рупа са почетном масом M_0 потпуно испарава услед Хокинговог зрачења, у
терминима M_0 и физичких константи. Израчунајте време живота $\tau_{bh, 10\odot}$ (у
секундама) за црну рупу са $M_0 = 10 M_{\odot}$.

- (T12.1e) **Црна рупа у мору космичког микроталасног зрачења:** Размотрите изоловану црну рупу у свемиру, далеко од других тела, са тренутном температуром T_{bh}^{now} , окружену космичком микроталасном позадином (СМВ) са тренутном температуром $T_{cmb}^{now} = 2,7$ К. Маса црне рупе може да расте апсорбујући СМВ зрачење и може да опада Хокинговим зрачењем.

Узимајући у обзир убрзано ширење Универзума, одредите које од следећих слика приказују дугорочну временску еволуцију T_{bh} у следећа три случаја:

$$(X) T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}, (Y) T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}, (Z) T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}.$$



Назначите свој одговор тако што ћете означити одговарајуће поље које одговара броју слике (само једно) за сваки случај X, Y или Z у Табели датој у резимеу одговора. [6]

- (T12.2) Примордијалне црне рупе (РВН) много мањих маса могу се формирати у веома раном Универзуму. Сва следећа питања се односе на РВН. Овде се могу занемарити сви процеси који повећавају масу црне рупе.

- (T12.2a) **Испаравање РВН у садашњој епохи:** Као што сте можда приметили из одговора на претходна питања, црним рупама соларне масе би требало дуго да испаре. Међутим, пошто црне рупе могу имати много мању масу, можда ћемо моћи да их видимо како испаравају у садашњем времену.

Наћи почетну масу $M_{0, RVN}$ (у kg), Шварцшилдов полупречник $R_{SC, RVN}$ (у m) и температуру T_{RVN} (у K) црне рупе која може потпуно да испарави у садашњој епохи, тј. оне са животним веком $\tau_{RVN} = 14$ милијарди година. [4]

- (T12.2b) **Формирање РВН:** У раном Универзуму, у којем је доминирало зрачење, фактор скалирања варира као $a(t) \sim t^{1/2}$. У овој ери, РВН се формирају услед колапса целокупне енергије садржане у региону физичке величине ct , где је t старост Универзума у то време.

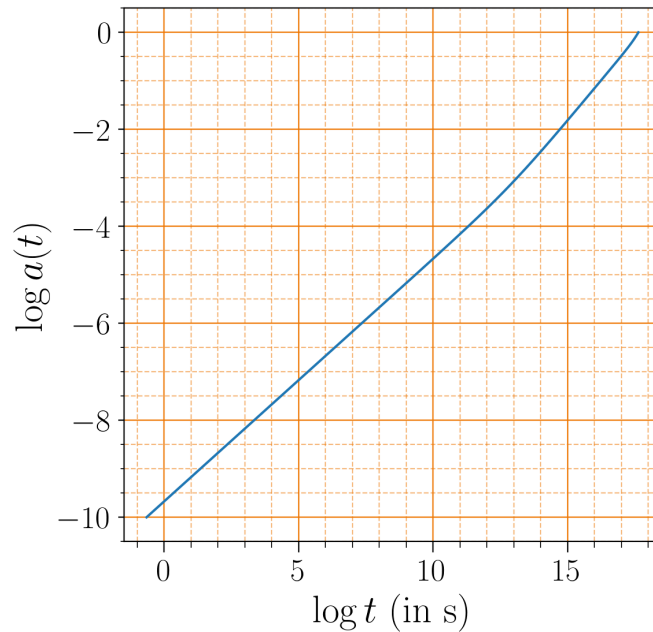
РВН масе 1×10^{12} kg се формира када је старост Универзума око 1×10^{-23} s. [6]
Израчунајте старост Универзума, t_{20} , када се формира РВН масе 1×10^{20} kg.

- (T12.2c) **Посматрани спектар Хокинговог зрачења из РВН:** Размотрите РВН почетне масе 1×10^{10} kg која потпуно испарава на крају свог животног века τ_{RVN} . За овај део задатка, претпоставимо ради једноставности да се већина Хокинговог зрачења емитује у овом тренутку, са температуром која одговара његовој почетној маси. Такође, узмите фактор скалирања Универзума да је $a(t) \sim t^{2/3}$.

Израчунајте највећу таласну дужину овог Хокинговог зрачења како је примећено на Земљи, λ_{earth} , у садашњој епохи (на $t = 14$ милијарди година). [5]

(T12.2д) **Космичко зрачење високе енергије из РВН:** Сада претпоставимо да Хокингово зрачење емитовано у датом тренутку t одговара фотонима емитованим са енергијом $k_B T_{bh}(t)$. Такође, највиша могућа температура за црну рупу је Планкова температура T_{Planck} где је $k_B T_{Planck} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Еволуција фактора скалирања током релевантних временских скала дата је на следећој слици. Фактор скалирања данас је подешен на јединицу. $t(s)$ на временској оси представља старост универзума у секундама.



Ако се на Земљи посматра фотон са енергијом од $E_{det} = 3,0 \times 10^{20}$ eV, одредите [10] највећу и најмању могућу вредност почетне масе РВН (M_0^{max} и M_0^{min} , респективно) које би могле бити одговорне за овај фотон.