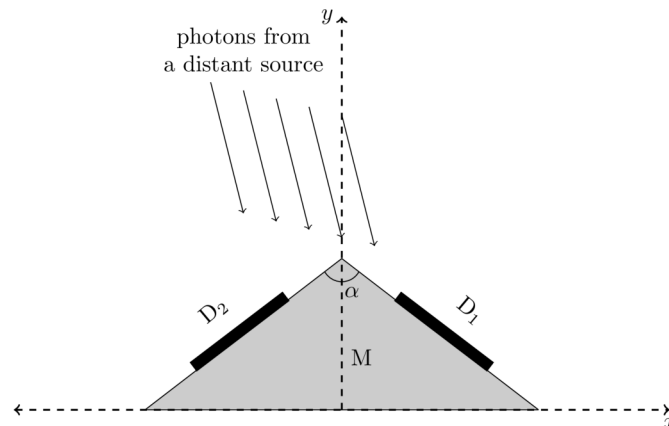


(T01) Misija Daksha
[10 točk]

"Daksha" je ime predlagani indijski misiji, ki jo sestavljata dva satelita S_1 in S_2 , ki krožita okoli Zemlje po isti krožni tirnici s polmerom $r = 7000$ km, vendar s faznim zamikom 180° . Satelita opazujeta vesolje v visokoenergetskem spektru (rentgenskem in γ -območju). Vsak satelit misije Daksha uporablja več ravnih detektorjev pravokotne oblike.

S poenostavljenim modelom misije Daksha boš določila lokacijo izvora na nebu. Predpostavi, da ima S_1 dva enaka detektorja D_1 in D_2 , pri čemer ima vsak površino $A = 0,50$ m², oba sta pritrjena na neprosojno stojalo M , kot je prikazano na spodnji sliki. Detektorja ležita simetrično glede na os y v ravninah, ki sta pravokotni na ravnino x - y , in med seboj oklepata kot $\alpha = 120^\circ$.



- (T01.1) Pri opazovanju oddaljenega izvora, ki se nahaja v ravnini x - y , detektor D_1 zabeleži moč $P_1 = 2,70 \cdot 10^{-10}$ J s⁻¹, detektor D_2 pa moč $P_2 = 4,70 \cdot 10^{-10}$ J s⁻¹.

Oceni kot η , ki ga krajevni vektor izvora tvori s pozitivnim krakom osi y . Upoštevaj, da je kot [5]
pozitiven, če ga od osi y meriš v nasprotni smeri urnega kazalca.

Satelita (S_1 in S_2) misije Daksha zaznata pulz iz oddaljenega izvora (ne nujno v ravnini x - y) ob časih t_1 oziroma t_2 .

- (T01.2) Izmerjeni čas $t_1 - t_2$ je enak $10,0 \pm 0,1$ ms. Določi delež f nebesne krogle, kjer bi se lahko nahajal [5]
izvor.

(T02) Makar-Sankranti
[10 točk]

Praznik "Makar-Sankranti" v Indiji praznujejo, ko Sonce za opazovalko na Zemlji vstopi v zodiakalno območje Kozoroga (Makar = Kozorog, Sankranti = vstop). V današnjih časih ga vsako leto praznujejo okoli 14. januarja. Pred mnogimi leti je praznik sovpadal z zimskim solsticijem na severni polobli (21. decembra).

- (T02.1) Na podlagi zgornjih informacij določi leto, y_c , ko je ta praznik nazadnje sovpadal z zimskim [3]
solsticijem na severni polobli.
- (T02.2) Sonce je v zodiakalno območje Kozoroga za opazovalko v Mumbaju vstopilo 14. januarja 2006 ob [3]
11.50.13 po lokalnem času. Izračunaj datum, D_{enter} , in lokalni čas, t_{enter} , ko je Sonce v območje Kozoroga vstopilo v letu 2013.
- (T02.3) Makar-Sankranti v danem kraju praznujejo na dan prvega sončnega zahoda v zodiakalnem [4]
območju Kozoroga. Predpostavi, da je lokalni čas sončnega zahoda v Mumbaju v januarju ob 18.30.00.

Navedi datum praznovanja za vsako leto med 2006 in 2013 (označi z (✓) v ustreznem polju v [4]
preglednici, ki je podana na listu za povzetek odgovorov).

(T03) Gravitacijski valovi
[15 znakov]

Črne luknje v dvojnih sistemih so izvor gravitacijskih valov. Obravnavaj dve črni luknji v naši Galaksiji z masama $M = 36 M_{\odot}$ in $m = 29 M_{\odot}$, ki okoli skupnega težišča krožita po krožnih tirnicah s kotno hitrostjo ω .

- (T03.1) Izpelji izraz za kotno hitrost ω_{ini} kroženja črnih lukenj ob času t_{ini} ko je razdalja med črnima luknjama enaka 4,0-kratniku vsote njunih Schwarzschildovih polmerov. Končni izraz naj vključuje samo M , m in fizikalne konstante. Pri izpeljavi uporabi Newtonovo gravitacijo.

Izračunaj vrednost ω_{ini} (v rad s^{-1}).

[5]

(T03.2) V splošni teoriji relativnosti črne luknje med kroženjem oddajajo gravitacijske valove s frekvenco f_{GW} , pri čemer je $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. Pri tem se polmer tirnic črnih lukenj zmanjšuje, s tem pa se frekvenca f_{GW} povečuje. Hitrost spreminjanja f_{GW} je podana z izrazom

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

kjer $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ označuje tako imenovano "chirp mass".

Določi vrednosti α , β in δ .

[4]

- (T03.3) Predpostavimo, da smo gravitacijske valove prvič zaznali ob času $t_{\text{ini}} = 0$.

[6]

Izpelji izraz za čas zlitja črnih lukenj, t_{merge} , ko f_{GW} postane zelo velika. Končni izraz naj vključuje le ω_{ini} , M_{chirp} in fizikalne konstante.

Izračunaj vrednost t_{merge} (v sekundah).

(T04) Balmerjev dekrement
[15 točk]

Obravnavamo zvezdo glavne veje, obdano z meglico. V območju V je navidezni sij zvezde enak 11,315 mag. Iz ioniziranega območja meglice v bližini zvezde izhajata emisijski črti $H\alpha$ in $H\beta$ črte s pripadajočima valovnima dolžinama $0,6563 \mu\text{m}$ in $0,4861 \mu\text{m}$. Teoretično napovedano razmerje gostot svetlobnih tokov med črtama $H\alpha$ in $H\beta$ je $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2,86$. Ko to sevanje prehaja skozi zunanji del hladne prašne meglice, sta opazovani emisijski gostoti svetlobnih tokov $H\alpha$ in $H\beta$ črt enaki $6,80 \cdot 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ in $1,06 \cdot 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

Ekstinkcija A_{λ} je funkcija valovne dolžine in jo izrazimo kot

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Pri tem je $\kappa(\lambda)$ krivulja ekstinkcije, $E(B - V)$ pa označuje barvni presežek v območjih B in V. Krivulja ekstinkcije (z λ v μm) je podana z enačbo

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2,659 \times \left(-1,857 + \frac{1,040}{\lambda}\right) + R_V, & 0,63 \leq \lambda \leq 2,20 \\ 2,659 \times \left(-2,156 + \frac{1,509}{\lambda} - \frac{0,198}{\lambda^2} + \frac{0,011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0,12 \leq \lambda < 0,63 \end{cases}$$

kjer je $R_V = A_V/E(B - V) = 3,1$.

- (T04.1) Izračunaj vrednosti $\kappa(H\alpha)$ in $\kappa(H\beta)$.

[3]

(T04.2) Izračunaj razmerje barvnih presežkov $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$. [4]

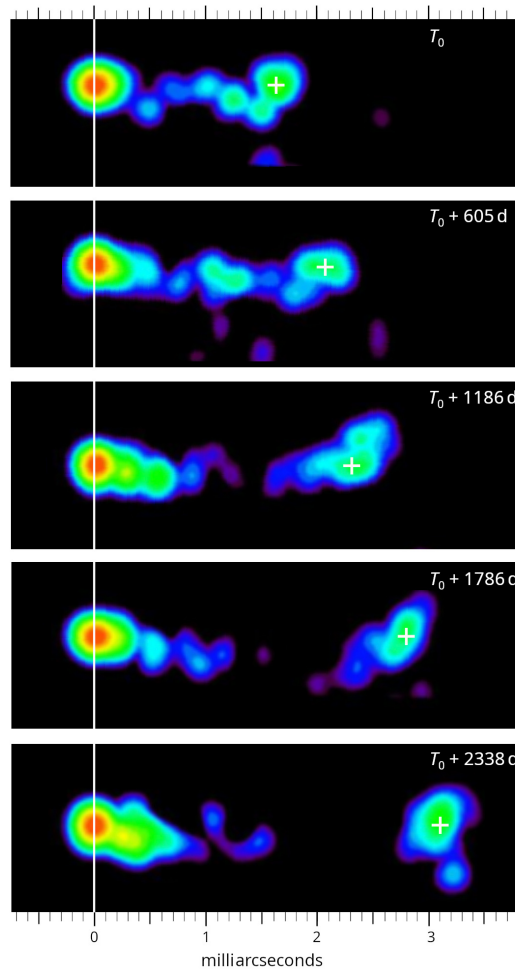
(T04.3) Oceni ekstinkciji zaradi prisotnosti meglice, $A_{H\alpha}$ in $A_{H\beta}$, pri valovnih dolžinah $H\alpha$ in $H\beta$. [6]

(T04.4) Oceni ekstinkcijo meglice (A_V) in navidezni sij m_{V0} zvezde v območju V v odsotnosti meglice. [2]

(T05) Kvazarji

[20 točk]

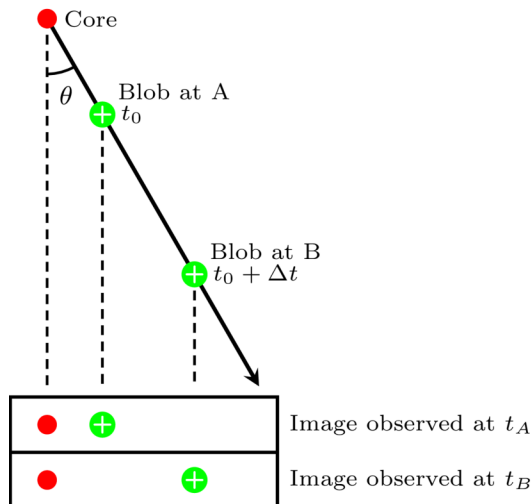
Kvazar je izjemno svetla aktivna galaksija, ki jo poganja supermasivna črna luknja, ki oddaja relativistične curke. Slika prikazuje zaporedje radijskih posnetkov kvazarja (na rdečem premiku $z = 0,53$ in izsevnostni razdalji $D_L = 1,00 \cdot 10^{10}$ ly) v različnih trenutkih. Na slikah je "jedro" poravnano z navpično belo črto, medtem ko se curek, ki ga sestavlja "zmazek" (označen z belim znakom +), sčasoma odmika stran od njega. Na posamični sliki je naveden čas opazovanja (začenši s T_0 za prvo sliko), kotno merilo pa je označeno na vrhu in dnu sklopa slik.



(T05.1) Za vsako opazovanje določi kotno razdaljo zmazka ϕ_{blob} (v mili kotnih sekundah) in njegovo [5]
prečno razdaljo l_{blob} (v svetlobnih letih) od jedra kvazarja. Z uporabo zaporednih opazovanj
izračunaj β_{app} ($= v_{\text{app}}/c$), t.j. navidezno hitrost zmazka v prečni smeri (v_{app}) kot delež svetlobne
hitrosti. Nato izračunaj še povprečno navidezno hitrost $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ v celotnem času opazovanj.

Curek kvazarja se dejansko giblje z relativistično hitrostjo $v \equiv \beta c$, vendar ne nujno v ravnini, pravokotni na smer pogleda. Giblje se pod kotom θ («viewing angle») glede na smer pogleda oddaljenega opazovalca (ki je označena s črtkanimi črtami), prikaz najdeš na spodnji skici.

V tem in vseh nadaljnjih delih naloge zanemari rdeči premik kvazarja in vse relativistične učinke.



(T05.2) Svetloba, ki jo odda zmazek ob časih t_0 (ki ustreza položaju A) oziroma $t_0 + \Delta t$ (ki ustreza položaju B), doseže opazovalca ob časih t_A oziroma t_B . Opazovana časovna razlika je torej $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

(T05.2a) Zapiši izraz za razmerje $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ v odvisnosti od β in θ . [2]

(T05.2b) Z uporabo tega razmerja izrazi β_{app} v odvisnosti od β in θ . [2]

(T05.3) Gibanje imenujemo superluminalno, če navidezna hitrost presega hitrost svetlobe ($\beta_{\text{app}} > 1$), in subluminalno, če je ne presega ($\beta_{\text{app}} < 1$).

(T05.3a) Za $\beta_{\text{app}} = 1$ nariši gladko krivuljo β v odvisnosti od θ , ki označuje mejo med subluminalnim in superluminalnim gibanjem. Superluminalno območje na grafu osenči s poševnimi črtami (///). [4]

(T05.3b) Poišči najnižjo dejansko hitrost curka ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$), pri kateri pride do superluminalnega gibanja, in tudi ustrezni kot θ_{low} . [2]

(T05.4) Zapiši izraz za največji kot θ_{max} , za katerega je možna dana vrednost β_{app} . [2]

Jedro kvazarja, njegov osrednji kompaktni objekt, kaže spremenljivost v svojem sevanju zaradi notranjih procesov, ki se dogajajo znotraj vzročno povezanega območja. Velikost (= polmer) tega območja je običajno petkrat večji od Schwarzschildovega polmera jedra.

(T05.5) Sevanje iz jedra nekega kvazarja se spreminja na časovni skali približno 1 ure. Določi zgornjo mejo, $M_{\text{c, max}}$, za maso osrednjega kompaktnega objekta v enotah Sončeve mase. [3]

(T06) Rotacija Galaksije

[20 točk]

Rotacijsko krivuljo naše Galaksije določimo z meritvami hitrosti vzdolž smeri pogleda oblakov nevtralnega vodika (HI), ki jih opazujemo pri 21 cm HI črti na različnih galaktičnih dolžinah. Upoštevaj HI-oblak na galaktični dolžini l , ki se nahaja na razdalji R od galaktičnega središča (GC) in na razdalji D od Sonca. Predpostavi, da je Sonce na razdalji $R_0 = 8,5$ kpc od GC. Predpostavi, da tako Sonce kot tudi HI-oblak krožita po krožnih tirnicah okoli GC v galaktični ravnini, s kotnima hitrostma Ω_0 in Ω ter rotacijskima hitrostma V_0 in V .

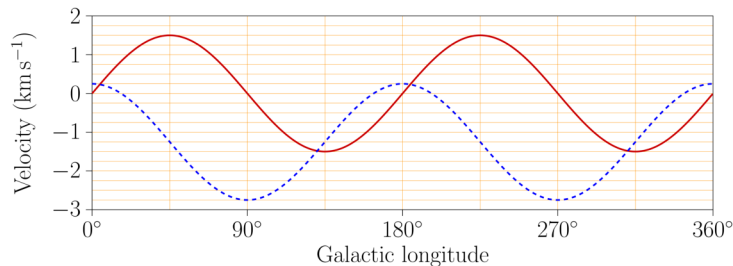
Komponenti hitrosti vzdolž smeri pogleda (V_r) in prečne hitrosti (V_t) oblaka, kot ju opazujemo s Sonca, lahko izrazimo kot

$$V_r = (\Omega - \Omega_0) R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Gledano s severnega galaktičnega pola poteka galaktična rotacija v smeri urnega kazalca. V tej nalogi bomo hitrost vzdolž smeri pogleda pri oddaljevanju šteli za pozitivno, oblake pa bomo obravnavali kot točkasta telesa.

- (T06.1) Na grafu, ki je priložen na listu za povzetek odgovorov, skiciraj V_r kot funkcijo D na območju med $D = 0$ in $D = 2R_0$ za dve smeri, in sicer za (i) $l = 45^\circ$ in (ii) $l = 135^\circ$. Vsako od krivulj označi z ustrezno vrednostjo l . [5]
- (T06.2) Spodnji graf prikazuje povprečne radialne (rdeča neprekinjena krivulja) in prečne (modra črtkana krivulja) komponente hitrosti zvezd na razdalji 100 pc od Sonca v odvisnosti od galaktične dolžine.



Na podlagi grafa oceni obhodni čas Sonca (P) okoli galaktičnega središča GC in ga izrazi v megaleti (Myr). [3]

- (T06.3) Jan Oort je upošteval, da je v Sončevi okolici ($D \ll R_0$) razlika kotnih hitrosti ($\Omega - \Omega_0$) majhna. Na podlagi tega približka je izpeljal naslednji enačbi, s katerima je mogoče izračunati približek prvega reda za radialno in prečno komponentno hitrosti:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

kjer sta A in B znani kot Oortovi konstanti.

Obravnavaj dva primera.

(I) dejanska opazovana rotacijska krivulja Galaksije, in

(II) rotacijska krivulja za hipotetični scenarij, kjer Galaksija nima temne snovi in je celotna masa Galaksije zbrana v njenem središču.

- (T06.3a) Za oba primera izpelji izraz za radialni gradient rotacijske hitrosti na lokaciji Sonca, [2]
- $$\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}.$$

- (T06.3b) Konstanti A in B izrazi z V_0 , R_0 in radialnim gradientom rotacijske hitrosti na lokaciji Sonca, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$. [8]

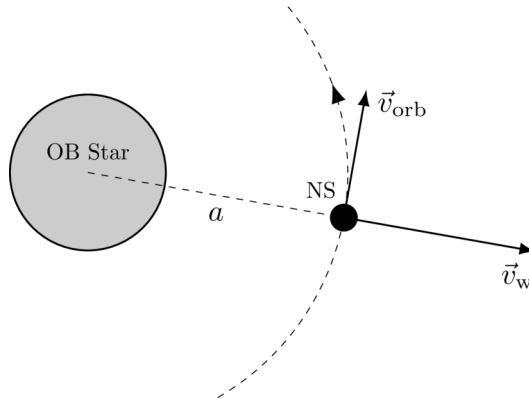
- (T06.3c) Definirajmo razmerji (A/B) Oortovih konstant za dva podana primera, (I) in (II), in ju označimo z F_I in F_{II} . Določi F_I in F_{II} . [2]

(T07) Nevtronsko dvozvezdje

[20 točk]

V dvozvezdju je zgoščena zvezda, snov druge zvezde pa ne sega v njeno Rochejevo območje. Glavni vir akrecijske snovi okoli take zgoščene zvezde je zvezdni veter z druge zvezde. Z zvezdnim vetrom napajen proces akrecije je še posebej pomemben v sistemih, kjer je ena zvezda tipa O ali B (v nadaljevanju ji bomo rekli kar OB zvezda), druga komponenta dvozvezdja pa je zgoščena zvezda, na primer nevtronska zvezda (NS), in hkrati sta zvezdi v tesni orbiti oz. sta si blizu.

Zamisli si tako NS-OB dvozvezdje, kjer ima nevtronska zvezda maso $M_{\text{NS}} = 2,0 M_{\odot}$ in polmer $R_{\text{NS}} = 11 \text{ km}$. Nevtronska zvezda se giblje po krožni orbiti polmera a okoli središča OB zvezde s hitrostjo $v_{\text{orb}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (glej sliko spodaj). V tem primeru predpostavimo, da OB zvezda maso izgublja krogelno simetrično s pretokom $\dot{M}_{\text{OB}} = 1,0 \cdot 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.



- (T07.1) Akrecijski polmer R_{acc} je definiran kot največja oddaljenost od NS, pri kateri NS še lahko ujame zvezdni veter spremljevalke. Za zgornji primer po standardnem postopku za ubežno hitrost izračunaj R_{acc} v km, če je hitrost zvezdnega vetra na orbitalni oddaljenosti NS $v_w = 3,0 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$. [3]
- (T07.2) Predpostavi, da gre vsa od NS ujeta snov v akrecijski disk, in izračunaj hitrost akrecije mase $\dot{M}_{\text{acc}}$, ki pade iz zvezdnega vetra na NS v enotah $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, kjer je $a = 0,5 \text{ au}$. Zanemari učinke tlaka sevanja in končen čas ohlajanja plina v akrecijskem disku. [3]
- (T07.3) Sedaj predpostavi, da je hitrost zvezdnega vetra na orbitalni oddaljenosti a (blizu NS) primerljiva z orbitalno hitrostjo NS. V tem primeru masni tok iz zvezdnega vetra na NS opiše enačba $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} f(\tan \beta, q)$, kjer je $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$ razmerje mas zvezd v dvozvezdju in je kot β (v opazovalnem sistemu NS) med smerjo hitrosti zvezdnega vetra in radialno smerjo stran od OB zvezde. Izpelji izraz za $f(\tan \beta, q)$ s predpostavko $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$. [6]
- (T07.4) Predpostavi, da je snov v akrecijskem disku povsem ionizirana in se giblje radialno ter da jo zavira močno magnetno polje $\vec{B}$ nevtronske zvezde NS. Ta učinek lahko opišemo kot tlak z izrazom $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Predpostavimo da ima NS dipolno magnetno polje, katerega gostota se v ekvatorialni ravnini spreminja z oddaljenostjo r od NS kot $r \gg R_{\text{NS}}$ in

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

, kjer je B_0 gostota magnetnega polja na ekvatorju NS. Predpostavi, da sta vrtilna os in os magnetnega dipola NS poravnani.

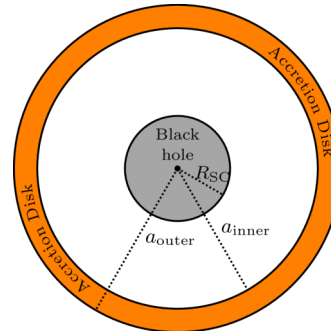
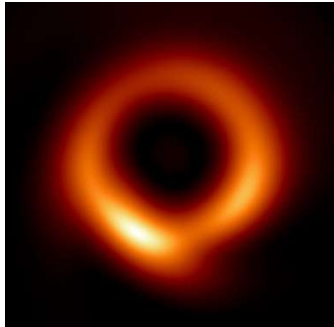
- (T07.4a) Izpelji izraz za magnetni tlak $P_{\text{eq, mag}}$ v ekvatorialni ravnini NS v velikostih B_0 , R_{NS} , r in drugih pripadajočih konstantah. [1]
- (T07.4b) Največja oddaljenost, na kateri magnetno polje zaustavi akrecijski tok snovi v ekvatorialni ravnini, se imenuje polmer magnetosfere R_m . Ta tok snovi ustvarja tlak zaradi relativnega gibanja med vpadajočim zvezdnim vetrom in NS. Izpelji približni izraz za kritično gostoto magnetnega polja $B_{0,c}$ pri kateri R_m sovpada z R_{acc} in izračunaj njeno vrednost v enoti Tesla. Magnetne učinke lahko zanemariš za $r > R_m$ in privzameš $v_w \gg v_{\text{orb}}$.

(T08) Senca črne luknje

[20 točk]

Spodaj levo je slika supermasivne črne luknje v središču galaksije M87, ki jo je posnel teleskop Event Horizon Telescope (EHT).

Za razumevanje nekaterih preprostih značilnosti na tej sliki boš obravnavala poenostavljen model nerotirajoče, statične, sferno simetrične črne luknje z maso $M = 6,5 \cdot 10^9 M_\odot$, ki jo obdaja brezmasni, tanek, ravninski akrecijski disk z notranjim in zunanjim polmerom $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ in $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, kjer je R_{SC} Schwarzschildov polmer. Pogled z vrha je na skici spodaj desno (skica ni v merilu).



Predpostavimo, da je akrecijski disk edini vir svetlobe, ki ga je potrebno upoštevati. Vsaka točka na disku oddaja svetlobo v vse smeri. Ta svetloba potuje pod vplivom gravitacijskega polja črne luknje. Pot svetlobnih žarkov določata dve enačbi, ki sta podani spodaj (in sta podobni enačbam za telo okrog Sonca):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

kjer je $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ radialna koordinata, $\phi \in [0, 2\pi)$ polarni kot, E in L pa konstanti, povezani z ohranitvijo energije oziroma ohranitvijo vrtilne količine.

$v_r \equiv dr/dt$ je velikost radialne hitrosti, v_ϕ velikost tangencialne hitrosti in $\omega \equiv d\phi/dt$ kotna hitrost. Vpadni parameter b za tirnico definiramo kot $b = L/\sqrt{2E}$. V tej nalogi zanemari relativistično časovno dilatacijo.

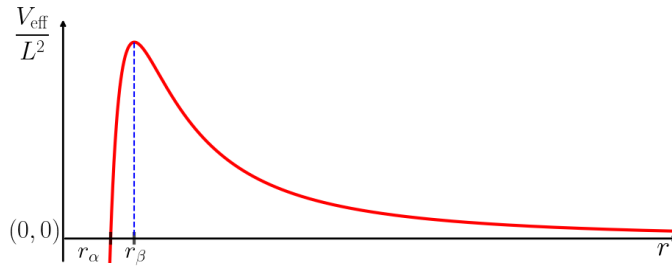
Drugo uporabno enačbo dobimo z odvajanjem prve enačbe:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

(T08.1) Blizu črne luknje lahko obstajajo krožne svetlobne tirnice. Za tirnice fotonov izrazi polmer r_{ph} in vpadni parameter b_{ph} v odvisnosti od M in ustreznih konstant. [4]

(T08.2) Izračunaj čas T_{ph} v sekundah, ki ga svetloba na krožni tirnici potrebuje za en obhod. [2]

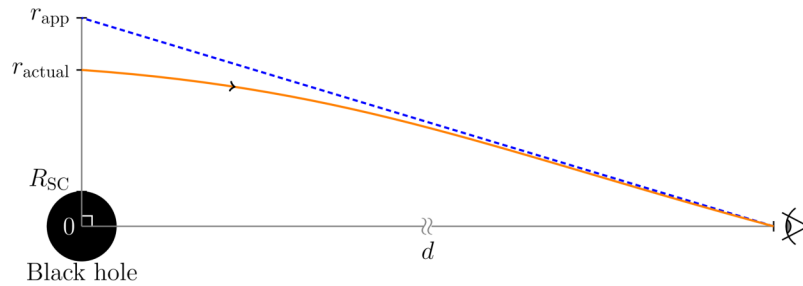
(T08.3) Zgornjo enačbo radialne hitrosti (prva enačba v tej nalogi) lahko primerjamo z enačbo oblike $\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ za svetlobne tirnice. Shematski prikaz odvisnosti V_{eff}/L^2 od r je spodaj.



(T08.3a) Graf prikazuje dva posebna polmera, r_α in r_β . Izračunaj izraza za r_α in r_β v odvisnosti od M in ustreznih konstant. [2]

(T08.3b) Foton, ki potuje navznoter iz akrecijskega diska proti črni luknji, lahko v nekaterih primerih še vedno pobegne v neskončnost. Poišči izraz za r_t , to je najmanjšo vrednost polmera točke obrata za tak foton v odvisnosti od M in ustreznih konstant. Poišči izraz za najmanjšo vrednost vpadnega parametra $b_{\min}$ za ta foton. [3]

(T08.4) Curek svetlobe, ki prihaja iz oddaljenosti r_{actual} od središča sistema proti opazovalcu, bo doživel močan gravitacijski odklon zaradi težnosti črne luknje. Opazovalec (na sliki označen z očesom) na oddaljenosti d od sistema bo to svetlobo videl dlje od črne luknje, kar prikazuje spodnja skica.

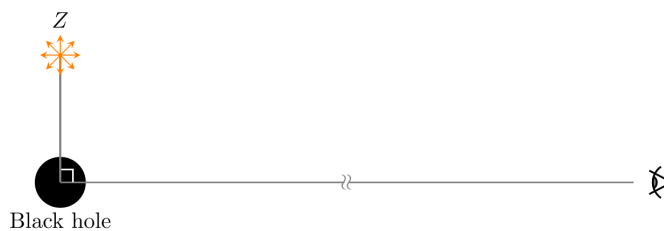


Takemu opazovalcu se bo zdelo, da svetloba izvira iz različne točke oz. prihaja iz oddaljenosti $r_{\text{app}} \approx b$ od središča črne luknje, gledano v ravnini neba. b je tako imenovani vpadni parameter (impact parameter) za tir fotona. Za točke v akrecijskem disku pri $r = r_{\text{actual}}$ lahko predpostavimo sledečo zvezo:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

Za oddaljene opazovalce, na primer nas, ki opazujejo akrecijski disk od zgoraj, bo sistem na nebu videti krožno simetričen. Izračunaj zunanji navidezni polmer r_{outer} in notranji navidezni polmer slike kolobarja v astronomskih enotah (au). [5]

(T08.5) Zamisli si osamljeno supermasivno črno luknjo z maso $M = 6,5 \cdot 10^9 M_\odot$ brez akrecijskega diska. Kratkotrajen močen izbruh elektromagnetnega sevanja traja 5 sekund in izvira iz točke Z, ki je oddaljena $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ od črne luknje, kar je prikazano na sliki. Izbruh v točki Z odda svetlobo v vse smeri. Oddaljena opazovalka, ki je na sliki označena z očesom, naredi 60-sekundno fotografijo okolice črne luknje.



Izberi pravilni odgovor za vsako od spodnjih trditev:

- (T08.5a) Število možnih poti svetlobe od Z do opazovalke je [2]
(A) največ ena (B) natanko ena (C) natanko dve (D) več kot dve.
- (T08.5b) Na posnetku, ki ga je naredila opazovalka, bo vidnih slik izbruha [2]
(A) največ ena (B) natanko ena (C) natanko dve (D) več kot dve.

(T09) Atmosferski seeing (razmazanost)

[35 točk]

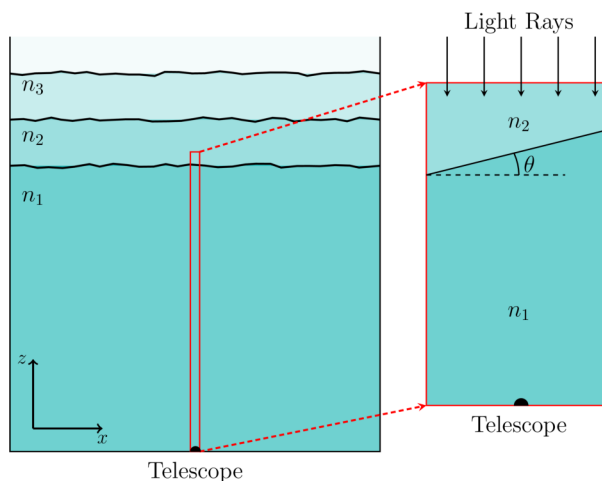
Teleskop z akromatsko konveksno lečo objektiva s premerom $D = 15$ cm in goriščno razdaljo $f = 200$ cm je usmerjen proti zvezdi v zenitu.

- (T09.1) Izračunaj premer d_{image} slike točkovnega vira (v m), ki nastane v goriščni ravnini objektiva za [1]
zeleno svetlobo ($\lambda = 550$ nm). Upoštevaj samo uklon svetlobe.

Na sliko astronomskega izvora vpliva tudi tako imenovani »atmosferski seeing« ali razmazanost.

Zaradi turbulence, temperaturnih sprememb in drugih dejavnikov se meje med atmosferskimi plastmi in lomni količniki teh plasti nenehno spreminjajo. Pri tem nastanejo majhne spremembe v položaju slike v goriščni ravnini teleskopa, ki jih poznamo kot "utripanje" ("twinkling effect"). V preostalem delu naloge ne upoštevaj učinkov interference, razen uporabe končne velikosti slike zvezde zaradi uklona (kot v prejšnjem delu naloge).

Na levi strani spodnje slike je vertikalni prerez večplastne atmosfere z različnimi lomnimi količniki ($n_1, n_2, n_3, \dots$). Na desni strani pa je povečana skica tankega segmenta atmosfere in meje med najnižjima atmosferskima plastema z lomnima količnikoma n_1 in n_2 ($n_1 > n_2$). V tej nalogi upoštevaj samo ti dve plasti in njuno mejo. Diagrami niso v merilu.



- (T09.2) Meja med plastema je na višini neposredno $H = 1$ km nad teleskopom, pod kotom $\theta = 30^\circ$ glede na vodoravno ravnino. Pri vseh delih naloge privzemi, da je kot θ pozitiven v smeri nasprotni urinemu kazalcu. Za monokromatski izvor svetlobe sta $n_1 = 1,00027$ in $n_2 = 1,00026$. Slika zvezde v zenitu bo v goriščni ravnini teleskopa zamaknjena za kot α .
- (T09.2a) Nariši ustrezno označen žarkovni diagram na meji med plastema, kjer so označeni n_1 , [2]
 n_2 , θ in α .
- (T09.2b) Zapiši izraz za α v odvisnosti od θ , n_1 in n_2 . Uporabi približka za majhne kote: [2]
 $\sin \alpha \approx \alpha$ in $\cos \alpha \approx 1$.
- (T09.2c) Izračunaj premik Δx_θ (v m) položaja slike za primer, ko se θ poveča za 1% (n_1 in n_2 [3]
ostaneta nespremenjena).

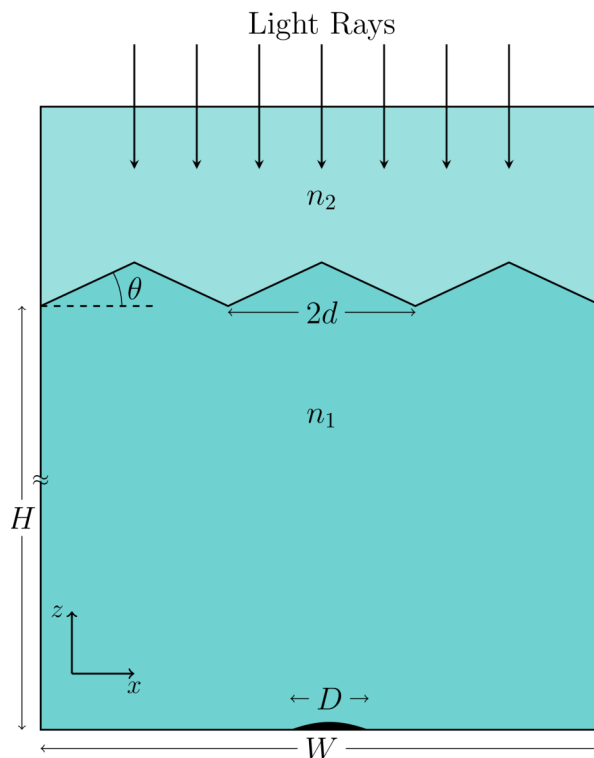
(T09.2d) Izračunaj premik Δx_n (v m) položaja slike za primer, ko se n_2 poveča za 0,0001 % (n_1 in θ ostaneta nespremenjena). [3]

(T09.3) Z zvezde v zenitu prihaja bela svetloba. Izberi, katera od naslednjih možnosti najbolj natančno opisuje obliko in barvo slike. Na listu za povzetek odgovorov z (✓) označi ustrezno polje (samo eno). Opomba: x na sliki narašča od leve proti desni. [2]

	Barva slike	Oblika slike	Levi rob	Desni rob
A	Bela	Krožna		
B	Bela	Eliptična		
C	Barvna	Krožna	Modra	Rdeča
D	Barvna	Krožna	Rdeča	Modra
E	Barvna	Eliptična	Modra	Rdeča
F	Barvna	Eliptična	Rdeča	Modra

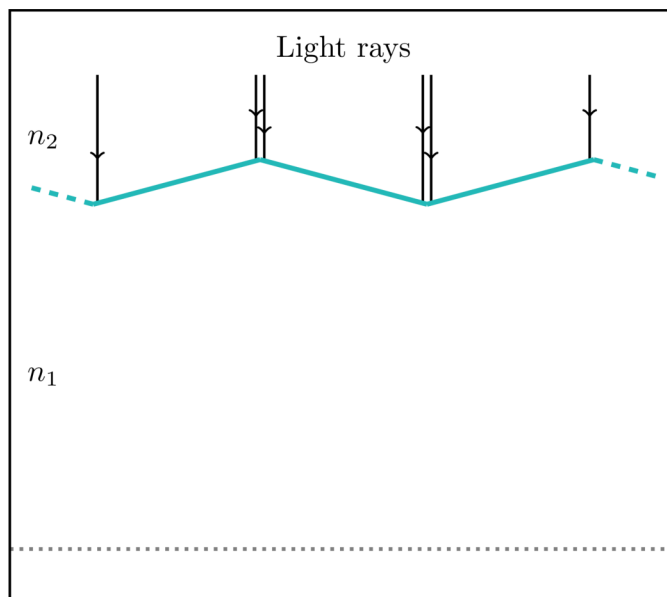
V vseh preostalih delih te naloge upoštevaj monokromatsko zeleno svetlobo z ($\lambda = 550$ nm). Mejo med plastmi modeliramo kot niz neskončnih cikcak plasti (ki potekajo pravokotno na ravnino strani), ločenih za $d = 10$ cm vzdolž osi x , $z \theta = 10^\circ$ ali $\theta = -10^\circ$.

Spodnja slika (ni v merilu) prikazuje prerez tega modela atmosfere s širino W ($W \ll H$). Pri teleskopih z velikim premerom ta cikcak narava meje povzroči nastanek pegic (speckles) v goriščni ravnini.



(T09.4) Obravnavaj ozračje, ki ga modeliramo, kot je opisano zgoraj.

(T09.4a) Na spodnjem diagramu je prikazan prerez ozračja z zaporednimi cikcak ploskvami z enakimi parametri, kot so navedeni zgoraj. Diagram ni v merilu.



Na tem diagramu, ki je natisnjen na listu s povzetkom odgovorov, nariši poti vpadnih svetlobnih žarkov do ravnine, kjer je postavljen objektiv teleskopa, ki je prikazana s sivo črtkano črto.

Morebitna območja, do katerih svetlobni žarki ne pridejo, na diagramu označi z "X". [4]

(T09.4b) Izračunaj širino W_X takega območja (takih območij). [3]

(T09.4c) Izračunaj največji premer (D_{max}) objektiva teleskopa, s katerim bo mogoče dobiti eno samo sliko zvezde, če ustrezno izbereš položaj teleskopa glede na strukturo meje. [4]

(T09.5) Obravnavaj primer, ko je cikcakasta oblika meje dovoljena v obeh smereh x in y (kot nekakšno polje piramid) in velja $D = 100$ cm (s $f = 200$ cm). [6]

V polje na listu za povzetek odgovorov kvalitativno skiciraj vzorec nastalih pegic (speckles).

(T09.6) Za turbulentno ozračje ponovno upoštevaj isto cikcak obliko mejne plasti samo v smeri x , vendar se zdaj kot med dvema ravninama enakomerno spreminja od 10° do -10° v 1,0 s. Predpostavi, da to povzroči enakomerno premikanje položaja slike. [5]

Teleskop ima $D = 8$ cm in $f = 1$ m. Oцени najdaljši čas osvetlitve t_{max} za kamero CCD, da dobiš le eno sliko in da je vsako možno odstopanje v njenem položaju manjše od 1% uklonsko omejenega premera slike.

(T10) Nastanek elementov ob Velikem poku

[35 točk]

V času prevlade sevanja v mladem vesolju je bil skalirni faktor vesolja $a \propto t^{1/2}$, kjer je t čas od Velikega poka. Večino časa tega so nevtroni (n) in protoni (p) ostali v toplotnem ravnovesju zaradi učinka šibkih interakcij. Številčna gostota (N) prostih nevtronov ali protonov je odvisna od temperature T in njihovih pripadajočih mas m . Tako je

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

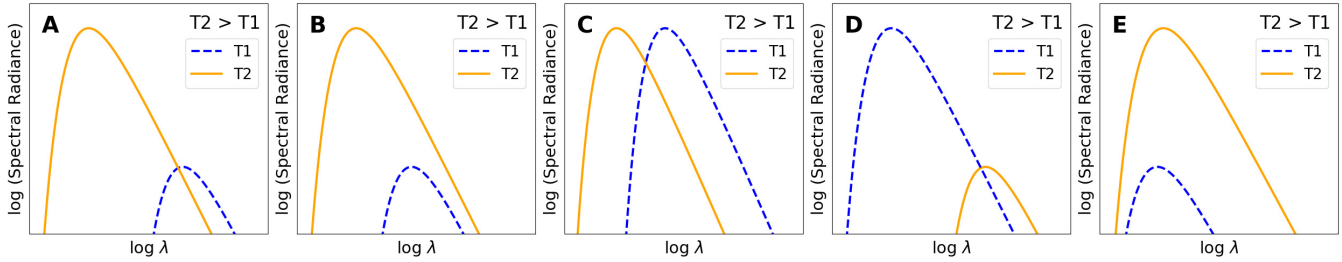
dokler za čas velja $t \leq t_{\text{wk}} = 1.70$ s, ko je $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. Po t_{wk} šibke interakcije ne morejo več vzdrževati takega ravnovesja in prosti nevtroni z razpolovno dobo 610,4 s razpadejo v protone.

(T10.1) Naj bo številčna gostota protonov N_p , nevtronov pa N_n . Izračunaj relativni delež nevtronov kot $X_{n, wk} = N_n / (N_n + N_p)$ v času t_{wk} . [4]

(T10.2) Fotoni ohranjajo toplotno ravnovesje in ohranjajo spekter črnega telesa ob vseh časih.

(T10.2a) Določi indeks β , tako da $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Ugotovi, kateri od sledečih grafov pravilno prikazuje obnašanje spektralne gostote energije za temperaturi T_1 in T_2 . Pravilni odgovor označi z (✓) na listu s povzetkom odgovorov (Summary Answersheet). [2]



(T10.3) Po t_{wk} proces nastajanja devterija iz protonov in nevtronov sledi enačbi Saha, ki jo je zapisal indijski fizik Prof. Meghnad Saha in ki jo v poenostavljeni obliki lahko zapišemo kot

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

Razmerje med barioni in fotoni η je tu $6, 1 \times 10^{-10}$ in N_D številčna gostota devterija.

(T10.3a) Na milimetrski papir v listu s povzetkom odgovorov (Summary Answersheet) označi razmerje N_D/N_n najmanj za 4 smiselno razmaknjene vrednosti temperature v območju $k_B T = [60, 70]$ keV in nariši gladko krivuljo, ki gre skozi te točke. [5]

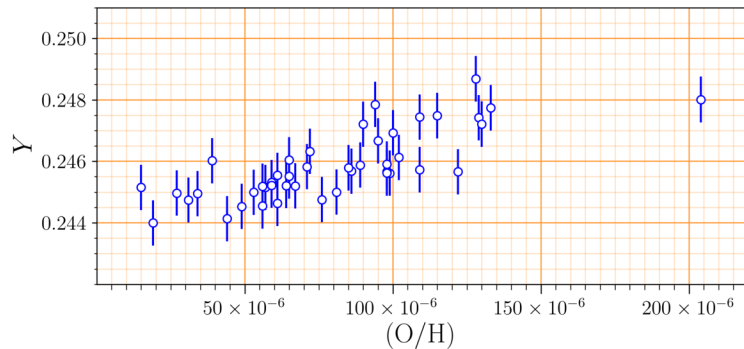
(T10.3b) Iz grafa odčitaj $k_B T_{nuc}$ (v keV), kjer je $N_D = N_n$. [1]

(T10.3c) Sedaj pa predpostavi, da se vsi prosti nevtroni sočasno združijo s protoni pri $k_B T_{nuc}$ in ustvarijo devterij. Ves devterij se potem v hipu zlije v helij (${}^4_2\text{He}$). Izračunaj obdobje ali čas t_{nuc} (v sekundah) nastanka helija. [4]

(T10.4) Izračunaj vrednost $X_{n, nuc}$ tik pred t_{nuc} . [5]

(T10.5) Prvobitni delež helija Y_{prim} je definiran kot delež celotne barionske mase vesolja, ki je vezan v helij takoj po času t_{nuc} . Naredi teoretično oceno vrednosti Y_{prim} . Samo pri tem računu predpostavi $m_p \approx m_n$ in da je masa helija $m_{He} \approx 4m_n$. [3]

- (T10.6) Prvobitni delež helija je zelo težko izmeriti, saj zvezde neprestano pretvarjajo vodik v helij. Količina v zvezdah ustvarjenega helija v galaksijah je povezana z razmerjem številčne gostote kisika (ki nastaja le v zvezdah) in številčne gostote atomov vodika, kar označujemo z (O/H) . Na spodnjem grafu so meritve (O/H) in deleža helija Y v različnih galaksijah.



Uporabi vse točke/meritve v tem grafu (najdeš ga tudi v Summary Answersheet) in odgovori na sledeča vprašanja.

- (T10.6a) Oceni Y za modre kompaktne pritlikave galaksije z vrednostjo $(O/H)=1.75 \times 10^{-4}$. [2]
- (T10.6b) Poišči naklon $dY/d(O/H)$ premice, ki se najboljše sklada z meritvami na grafu. [2]
- (T10.6c) Na podlagi zgornjih meritev oceni delež prvobitnega helija $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$. [2]
- (T10.7) Odstopanje med Y_{prim} in $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ je mogoče zblížati s spremembo razmerja barioni/fotoni η . Če se η zmanjša, kar je v Summary Answersheet označeno z $\downarrow$, v pripadajočih kvadratih v Summary Answersheet označi povečanje ($\uparrow$) ali zmanjšanje ($\downarrow$) v $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (ko je $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$ in Y_{prim} . [3]

(T11) Zvezde skozi grafe

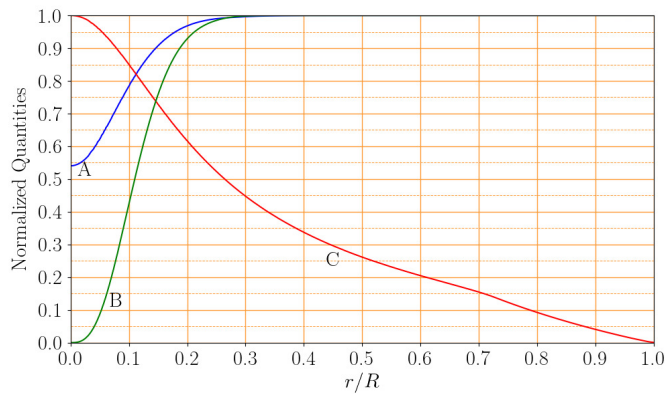
[50 točk]

Zvezde lahko dobro opišemo kot sferno simetrična telesa, zato lahko pri modeliranju fizikalnih lastnosti v notranjosti zvezde kot edino neodvisno spremenljivko izberemo radialno razdaljo r od središča zvezde. Maso, ki jo zaobjema krogla s polmerom r , označimo z $m(r)$. Izsev $l(r)$ definiramo kot neto energijo, ki v enoti časa preide skozi sferično površino s polmerom r . Druge količine, kot so na primer gostota $\rho(r)$, temperatura $T(r)$, masni delež vodika $X(r)$, masni delež helija $Y(r)$ in jedrska energija $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, proizvedena na enoto mase v enoti časa, so funkcije $\backslash(r)$. V tej nalogi bomo zanemarili učinke difuzije in gravitacijskega usedanja elementov znotraj zvezde.

Simbol "log" se nanaša na logaritem z osnovo 10. Naloga je sestavljena iz treh neodvisnih delov.

(T11.1) Del 1: Znotraj zvezde

Graf spodaj prikazuje variacijo treh strukturnih količin, A, B in C, kot funkcije brezdimenzijskega polmera r/R v modelu zvezde z maso $1 M_{\odot}$ in starostjo 4 Gyr, kjer je R fotosferski polmer zvezde. Za zvezdo sta vrednosti masnega deleža helija na (fotosferski) površini, Y_s , in kovinskosti (masni delež vseh elementov težjih od helija) na (fotosferski) površini, Z_s , podani z $(Y_s, Z_s) = (0,28, 0,02)$. Vse količine, prikazane na grafih, so normalizirane glede na njihove največje vrednosti.



(T11.1a) Določi, katere količine označujejo A, B in C. Izbiraš med petimi možnostmi:

[6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Zapiši A/B/C v okenca poleg ustreznih količin na listu za povzetke odgovorov. Pojasnila niso potrebna.)

(T11.1b) Kolikšen je masni delež Y_c helija v središču zvezde?

[3]

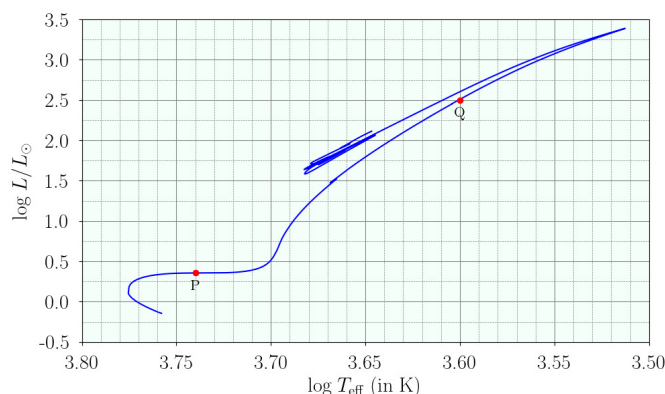
(T11.1c) Na isti graf na listu za povzetek odgovorov nariši še preostali dve količini s seznama petih (tj. količini, ki jima nisi pripisala krivulje A, B oziroma C) v odvisnosti od r/R in krivulji jasno označi.

[5]

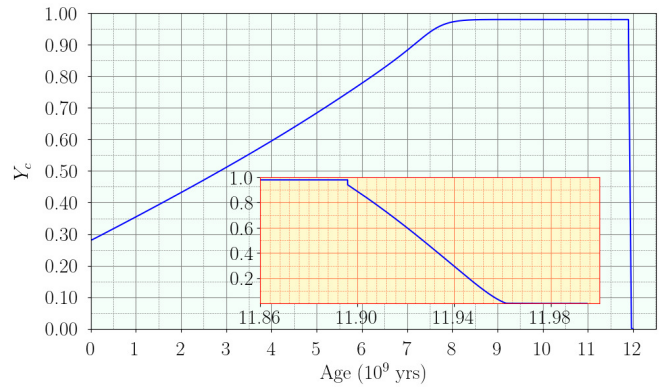
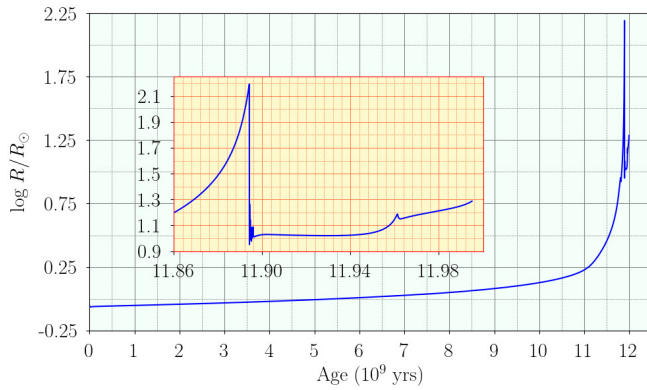
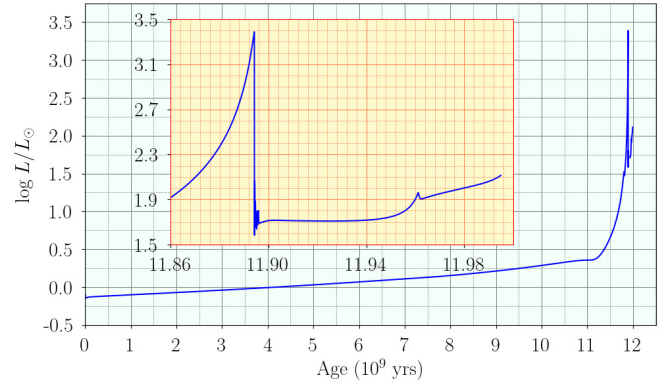
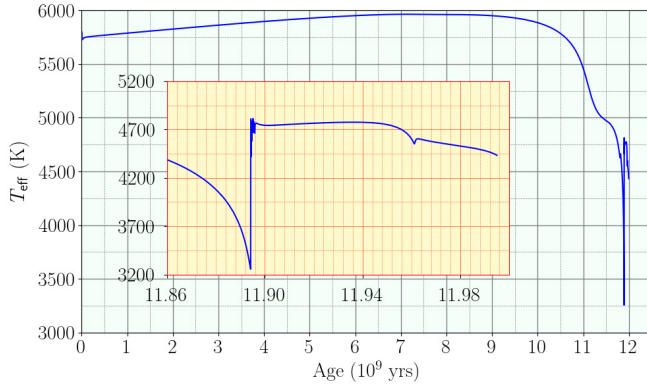
(T11.2) Del 2: Razvoj zvezd

Obravnavala boš razvoj zvezde z maso $1M_{\odot}$. Začetna sestava zvezde je uniformna in podana z masnim deležem helija $Y_0 = 0,28$ in masnim deležem kovin $Z_0 = 0,02$. Spodnje slike prikazujejo spremembo različnih globalnih količin te zvezde, ko se razvija od ZAMS (Zero Age Main Sequence) do konca gorenja helija v njeni sredi.

Graf spodaj prikazuje evolucijsko pot zvezde na H-R diagramu (graf $\log L/L_{\odot}$ v odvisnosti od $\log T_{\text{eff}}$, kjer je L površinski izsev in T_{eff} efektivna temperatura).



Spodnja slika vključuje štiri grafe, ki za isto zvezdo prikazujejo spreminjanje T_{eff} (v K), L (prikazano kot $\log L/L_{\odot}$), R (prikazano kot $\log R/R_{\odot}$) in Y_c v odvisnosti od starosti (v 10^9yr). Zavrloj preglednosti so na vsakem od štirih grafov podrobni prikazi, ki prikazujejo spremembe pripadajočih količin med starostjo $11,86 \cdot 10^9$ let in $12,00 \cdot 10^9$ let.



Na podlagi grafov odgovori na spodnja vprašanja.

- (T11.2a) Kolikšna je približna življenjska doba t_{MS} (v letih) te zvezde na glavni veji? [1]
- (T11.2b) Koliko časa Δt_{He} (v letih) bo v sredici zvezde potekalo gorenje helija? [1]
- (T11.2c) Kolikšen delež f_H začetnega vodika v sredici je zgorel do trenutka, ko izsev zvezde doseže $1 L_\odot$? [3]
- (T11.2d) Kolikšen je polmer zvezde, R_1 (v enotah $R_\odot$), ko je sredici zvezde zgorelo 60% začetne količine vodika? [3]
- (T11.2e) Kolikšna sta polmera zvezde, R_P in R_Q (v enotah $R_\odot$), ki ustrezata položajema P in Q označenima na H-R diagramu? [4]

(T11.3) **Del 3: Porazdelitev mase znotraj zvezde**

Porazdelitev mase znotraj zvezde narekuje enačba

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

. Enačbo je prikladno zapisati s tremi brezdimenzijskimi spremenljivkami, in sicer z brezdimenzijsko maso q , brezdimenzijskim polmerom x in relativno gostoto σ , ki jih definiramo kot

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

, kjer sta M in R skupna masa in polmer zvezde, ter $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ povprečna gostota zvezde. Za zvezdo, ki jo bomo obravnavali v tem delu, so podane naslednje informacije:

- Gostota v središču zvezde $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$

- Polovica mase zvezde je zbrana znotraj 25 % celotnega polmera, in 70 % njene mase je zbrane znotraj 35 % celotnega polmera.

V vseh nadaljnjih delih naloge zadostuje, da vse izpeljane numerične koeficiente zaokrožiš na 0,005 natančno.

- (T11.3a) Zgornjo enačbo, ki opisuje odvisnost mase od polmera, prepisi v obliko, v kateri bodo [2]
nastopale količine x , $\frac{dq(x)}{dx}$ in $\sigma(x)$.

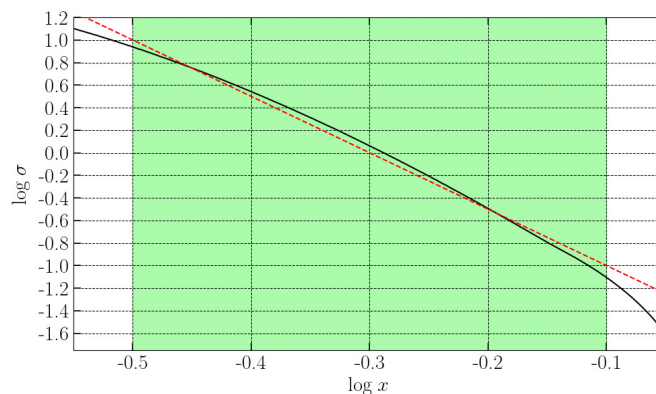
Če nas zanima porazdelitev mase v odvisnosti od polmera, moramo poznati profil gostote znotraj zvezde. V okviru te naloge bomo spreminjanje gostote s polmerom opisali v dveh območjih vrednosti x :

- notranji del zvezde: $0 \leq x \leq 0,32$
- srednji del zvezde: $0,32 < x < 0,80$

Za najbolj zunanji del zvezde, tj. $0,80 \leq x \leq 1,00$, ne naredimo nobenega približka.

- (T11.3b) **Približek za srednji del:**

Na spodnjem grafu je s črno črto prikazano spreminjanje $\log \sigma$ v odvisnosti od $\log x$. Naredili bomo linearno aproksimacijo (prekinjena rdeča črta na grafu) za $\log \sigma$ kot funkcijo $\log x$ v domeni $-0.5 < \log x < -0.1$, tj. $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (zeleno osenčeno območje). Poleg tega bomo aproksimirali naklon te črte z najbližjim celim številom.



Na podlagi tega približka zapiši izraz za $\sigma(x)$ v odvisnosti od x na območju [4]
 $0,32 < x < 0,80$.

- (T11.3c) Na podlagi rezultata iz (T11.3b) izpelji izraz za $q(x)$ na območju $0,32 < x < 0,80$. [6]

- (T11.3d) **Približek za notranji del:**

V notranjem delu zvezde ($0 \leq x \leq 0,32$) lahko gostoto aproksimiramo z linearno [8]
funkcijo polmera, tj. $\sigma(x) = Ax + B$, kjer sta A, B konstanti. Določi A in B , in s tem izrazi $q(x)$ na območju $0 \leq x \leq 0,32$. Upoštevaj, da lahko približki, sprejeti v prejšnjem delu in tem delu naloge, povzročijo manjša odstopanja v gostoti oziroma masi pri vrednosti $x = 0,32$.

- (T11.3e) Izraza za $q(x)$, ki si jih izpeljala pri delih (T11.3c) in (T11.3d), sta približka, ki dobro [4]
opisujeta spremembo mase s polmerom le v določenih območjih zvezde. Za območje $0,80 \leq x \leq 1$ (za katero nisi izpeljala nobenega izraza) lahko uporabiš ustrezno ekstrapolacijo iz sosednjega območja. Na podlagi teh aproksimacij in danih podatkov skiciraj sklenjeno krivuljo (brez nezveznosti bodisi v $q(x)$ bodisi v njegovem odvodu) za $q(x)$ v odvisnosti od x za celotno zvezdo ($0 \leq x \leq 1$), ki predstavlja spremembo mase s polmerom.

(T12) Hawkingovo sevanje črnih lukenj

[50 točk]

(T12.1) Tipična črna luknja (BH) nastane z gravitacijskim sesedanjem masivne zvezde ob koncu njenega življenja v singularnost. Zaradi mogočne težnosti takega objekta, nič, kar je onstran tako imenovanega dogodkovnega obzorja, ne more pobegniti navzven. Dogodkovno obzorje je sfera s polmerom $r = R_{\text{SC}}$, kjer je r oddaljenost od singularnosti. R_{SC} je tako imenovani Schwarzschildov polmer.

(T12.1a) **Modeliranje izvora Hawkingovega sevanja:** Zamisli si par delcev, vsakega z maso m , ki nastaneta na obeh straneh dogodkovnega obzorja BH. En delec je nekoliko zunaj obzorja pri $r \approx R_{\text{SC}}$, drugi delec pa je znotraj obzorja pri $r = \kappa R_{\text{SC}}$. Predpostavi, da je celotna energija delca vsota ekvivalenta energije njegove mirovne mase mc^2 in gravitacijske potencialne energije v težnostnem polju BH.

Določi vrednost κ , pri kateri ima par delcev celotno energijo nič.

[4]

(T12.1b) **Temperatura črne luknje:** Če ima delec, ki je nastal pri prej opisanem procesu zunaj obzorja, dovolj kinetične energije, lahko uide BH v tako imenovanem procesu, ki mu pravimo Hawkingovo sevanje. Delec, ki je nastal znotraj obzorja, ki ima negativno energijo, ostane v črni luknji in zmanjša maso BH.

Predpostavi, da je vse Hawkingovo sevanje iz fotonov in ima spekter črnega telesa, ki ima maksimum pri valovni dolžini $\lambda_{\text{bb}} \approx 16R_{\text{SC}}$. Za črno luknjo mase Sonca je znano, da je $R_{\text{SC}, \odot} = 2,952 \text{ km}$.

Izpelji izraz za temperaturo T_{bh} črne luknje (BH), ki ogovarja njenemu spektru črnega telesa. Izraz zapiši kot odvisnost od mase BH M_{bh} s pripadajočimi fizikalnimi konstantami. Izračunaj Schwarzschildov polmer $R_{\text{SC}, 10\odot}$ in temperaturo $T_{\text{bh}, 10\odot}$ za BH z maso $10 M_{\odot}$. [4]

(T12.1c) **Izguba mase črne luknje:** Predpostavi, da Hawkingovo sevanje izhaja iz dogodkovnega obzorja.

Na podlagi ekvivalentnosti mase in energije izrazi hitrost izgube mase $dM_{\text{bh}}(t)/dt$ z maso $M_{\text{bh}}(t)$ BH in fizikalnimi konstantami.

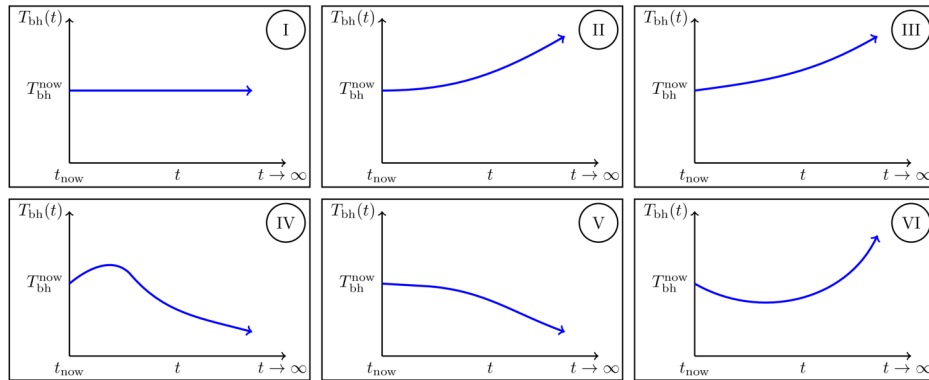
Izrazi še $M_{\text{bh}}(t)$ za BH z njeno začetno maso M_0 . Skiciraj odvisnost $M_{\text{bh}}(t)$ kot funkcijo t od $M_{\text{bh}} = M_0$ do $M_{\text{bh}} = 0$. [8]

(T12.1d) **Življenjska doba črne luknje:** Izpelji izraz za življenjsko dobo τ_{BH} , v kateri črna luknja z začetno maso M_0 zaradi Hawkingovega sevanja popolnoma izhlapi. Izraz zapiši z M_0 in s pripadajočimi fizikalnimi konstantami. Izračunaj življenjsko dobo $\tau_{\text{bh}, 10\odot}$ (v sekundah) za črno luknjo z maso $M_0 = 10 M_{\odot}$. [3]

(T12.1e) **Črna luknja v kopeli prasevanja:** Zamisli si izolirano črno luknjo, ki je v vesolju zelo daleč od drugih teles in ima trenutno temperaturo $T_{\text{bh}}^{\text{now}}$, obliva pa jo prasevanje (mikrovalovno sevanje ozadja – CMB) s trenutno temperaturo $T_{\text{cmb}}^{\text{now}} = 2,7 \text{ K}$. Črna luknja lahko maso pridobiva z absorpcijo CMB, izgublja pa s Hawkingovim sevanjem.

Upošteva je pospešeno širjenje vesolja, ugotovi, kateri graf pravilno prikazuje dolgotrajni potek oziroma časovni razvoj T_{bh} za tri primere:

$$(X) T_{\text{bh}}^{\text{now}} > T_{\text{cmb}}^{\text{now}}, (Y) T_{\text{bh}}^{\text{now}} = T_{\text{cmb}}^{\text{now}}, (Z) T_{\text{bh}}^{\text{now}} < T_{\text{cmb}}^{\text{now}}.$$



Svoj odgovor označi v pripadajočem kvadratu v Summary Answersheet, smo enega za [6]
posamezni primer X, Y ali Z v tabeli z rimsko številko grafa.

(T12.2) V mladem vesolju so lahko nastale tako imenovane prvobitne črne luknje (PBH) z mnogo manjšimi masami. Vsa naslednja vprašanja so na temo PBH, pri katerih so procesi večanja njihovih mas zanemarljivi.

(T12.2a) **PBH izhlapevanje v sedanji dobi:** Kot si lahko opazila iz odgovorov pri prejšnjih vprašanjih te naloge, črne luknje z maso Sonca potrebujejo veliko časa, da izhlapijo. Ker pa imajo PBH mnogo manjšo maso, lahko njihovo izhlapevanje opazimo tudi danes.

Izračunaj začetno maso $M_{0, \text{PBH}}$ (v kg), Schwarzschildov polmer $R_{\text{SC, PBH}}$ (v metrih) in [4]
temperaturo T_{PBH} (v K) črne luknje, ki pri današnji starosti vesolja popolnoma izhlapela. Življenjska doba take črne luknje je torej $\tau_{\text{PBH}} = 14$ milijard let.

(T12.2b) **Nastanek PBH:** V mladem vesolju, kjer je prevladovalo sevanje, se je skalirni faktor spreminjal kot $a(t) \sim t^{1/2}$. V tistem času so PBH nastale zaradi sesedanja vse energije znotraj območja velikosti ct , kjer je t starost vesolja.

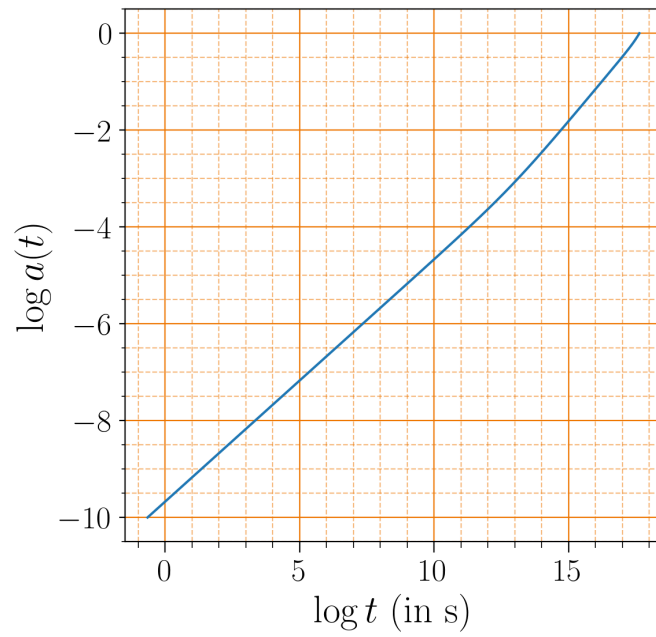
PBH z maso 1×10^{12} kg je nastala, ko je bilo vesolje staro približno 1×10^{-23} s. [6]
Izračunaj starost vesolja t_{20} , ko je nastala PBH z maso 1×10^{20} kg.

(T12.2c) **Opazovani spekter Hawkingovega sevanja PBH:** Zamisli si PBH z začetno maso 1×10^{10} kg, ki je ob koncu življenja v času τ_{PBH} popolnoma izhlapela. Za ta del naloge zaradi lažjega predpostavi, da je večino Hawkingovega sevanja oddala ob tem času, pri temperaturi, ki bi jo imela ob začetni masi. Poleg tega za skalirni faktor vesolja privzemi $a(t) \sim t^{2/3}$.

Izračunaj valovno dolžino vrha spektra tega Hawkingovega sevanja, ki jo opazujemo [5]
na Zemlji λ_{earth} v današnjem času ($t = 14$ milijard let).

(T12.2d) **Kozmično sevanje visokih energij iz PBH:** Sedaj predpostavi, da je bilo Hawkingovo sevanje izsevano ob določenem času t in je energija fotonov $k_B T_{\text{bh}}(t)$. Poleg tega je najvišja možna temperatura črne luknje enaka Planckovi temperaturi T_{Planck} , kjer je $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Razvoj skalirnega faktorja za dolgo časovno obdobje je podan na spodnjem grafu. Za današnji čas je skalirni faktor 1. $t(s)$ na časovni osi predstavlja starost vesolja v sekundah.



Če na Zemlji opazujemo foton z energijo $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$, izračunaj največjo in [10]
najmanjšo možno vrednost za začetno maso PBH (M_0^{max} in M_0^{min}), ki je izsevala tak
foton.