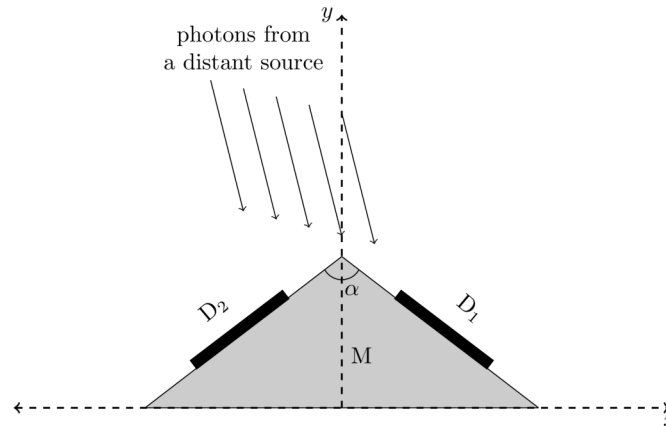


(T01) Missão Daksha

[10 pontos]

"Daksha" é uma missão indiana proposta que consiste em dois satélites S_1 e S_2 a orbitar a Terra na mesma órbita circular de raio $r = 7000$ km, mas com uma diferença de fase de 180° . Estes satélites observam o Universo no domínio das altas energias (raios X e raios γ). Cada um dos satélites da missão Daksha utiliza vários detectores planos e rectangulares.

Para compreender como localizar uma fonte no céu, vamos usar um modelo simplificado da missão Daksha. Assume que o satélite S_1 tem apenas dois detectores idênticos, D_1 e D_2 , cada um com uma área $A = 0,50 \text{ m}^2$, fixos numa estrutura opaca M , tal como é mostrado na figura abaixo. Os detectores estão dispostos simetricamente em torno do eixo do y , em planos perpendiculares ao plano x - y e formam entre si um ângulo $\alpha = 120^\circ$.



- (T01.1) Ao observar uma fonte distante localizada no plano x - y , o detector D_1 regista uma potência $P_1 = 2,70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$ e o detector D_2 regista uma potência $P_2 = 4,70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$.

Estima o ângulo η formado pelo vetor posição da fonte com o semi-eixo positivo de y , considerando como positivo o ângulo medido no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio a partir do semi-eixo positivo de y . **[5]**

Considera um único impulso proveniente de uma fonte distante (não necessariamente no plano x - y) registado por ambos os satélites (S_1 e S_2) da missão Daksha. Os tempos dos picos dos impulsos registados por S_1 e S_2 são t_1 e t_2 , respetivamente.

- (T01.2) Se $t_1 - t_2$ foi medido como sendo $10,0 \pm 0,1 \text{ ms}$, determina a fração f da esfera celeste onde a fonte poderá estar localizada. **[5]**

(T02) Makar-Sankranti

[10 pontos]

O festival de "Makar-Sankranti" é celebrado na Índia quando o Sol parece entrar na região zodiacal de Capricórnio (Makar = Capricórnio, Sankranti = Entrada), tal como é observado a partir da Terra. Atualmente, este festival é celebrado por volta do dia 14 de janeiro todos os anos. Há muitos anos, este festival coincidia também com o Solstício de Inverno no hemisfério norte, que assumimos ter lugar a 21 de dezembro.

- (T02.1) Com base na informação acima, determina o ano y_c em que a celebração deste festival coincidiu pela última vez com o Solstício de Inverno no hemisfério norte. **[3]**

(T02.2) Se o Sol entrou na região zodiacal de Capricórnio às 11:50:13 (hora local) no dia 14 de janeiro de 2006 em Mumbai, calcula a data D_{enter} e a hora local t_{enter} da sua entrada em Capricórnio no ano de 2013. [3]

(T02.3) O festival Makar-Sankranti é celebrado, num determinado local, no dia do primeiro pôr do Sol na região zodiacal de Capricórnio. Podes assumir que, em Mumbai, a hora local do pôr do Sol em janeiro é 18:30:00.

Indica a data de celebração do festival em cada ano entre 2006 e 2013 (assinalando com um (✓) a caixa respetiva na tabela fornecida na Folha de Respostas). [4]

(T03) Ondas gravitacionais

[15 pontos]

Buracos negros binários em órbita geram ondas gravitacionais. Considera dois buracos negros, na nossa Galáxia, com massas $M = 36 M_{\odot}$ e $m = 29 M_{\odot}$, que descrevem órbitas circulares com frequência angular orbital ω em torno do seu centro de massa.

(T03.1) Assumindo a gravidade newtoniana, deduz uma expressão para a frequência angular ω_{ini} das órbitas dos buracos negros num instante t_{ini} em que a separação entre os buracos negros era 4,0 vezes a soma dos seus respetivos raios de Schwarzschild, em função apenas de M , m e das constantes físicas.

Calcula o valor de ω_{ini} (in rad s^{-1}).

[5]

(T03.2) Na relatividade geral, os buracos negros em órbita emitem ondas gravitacionais com uma frequência f_{GW} , tal que $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. Esta emissão faz com que as órbitas dos buracos contraíam, o que, por sua vez, aumenta f_{GW} . A taxa de variação de f_{GW} é dada por:

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

onde $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ é designada por massa de chirp.

Determina os valores de α , β e δ .

[4]

(T03.3) Assume que as ondas gravitacionais associadas ao evento foram detectadas pela primeira vez no instante $t_{\text{ini}} = 0$. [6]

Deduz uma expressão para o instante observado de fusão dos buracos negros, t_{merge} , quando f_{GW} se torna muito grande, em função apenas de ω_{ini} , M_{chirp} e das constantes físicas. Calcula o valor de t_{merge} (em segundos).

(T04) Decremento de Balmer

[15 pontos]

Considera uma estrela da sequência principal rodeada por uma nebulosa. A magnitude observada da estrela na banda V é de 11,315 mag. A região ionizada da nebulosa, próxima da estrela, emite linhas de $H\alpha$ e $H\beta$, com comprimentos de onda de $0,6563 \mu\text{m}$ e $0,4861 \mu\text{m}$, respetivamente. O rácio teoricamente previsto dos fluxos nas

linhas $H\alpha$ e $H\beta$ é $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2,86$. No entanto, quando esta radiação atravessa a parte exterior da nebulosa fria e poeirenta, os fluxos de emissão observados das linhas $H\alpha$ e $H\beta$ são, respetivamente, $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ e $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

A extinção A_λ é uma função do comprimento de onda expressa-se por

$$A_\lambda = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Aqui, $\kappa(\lambda)$ é a curva de extinção e $E(B - V)$ representa o excesso de cor nas bandas fotométricas B e V. A curva de extinção (com λ em μm) é dada por:

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2,659 \times \left(-1,857 + \frac{1,040}{\lambda}\right) + R_V, & 0,63 \leq \lambda \leq 2,20 \\ 2,659 \times \left(-2,156 + \frac{1,509}{\lambda} - \frac{0,198}{\lambda^2} + \frac{0,011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0,12 \leq \lambda < 0,63 \end{cases}$$

onde, $R_V = A_V/E(B - V) = 3,1$ é a razão entre a extinção total e a extinção seletiva.

(T04.1) Determina os valores de $\kappa(H\alpha)$ e $\kappa(H\beta)$. [3]

(T04.2) Determina o valor da razão do excesso de cor $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$. [4]

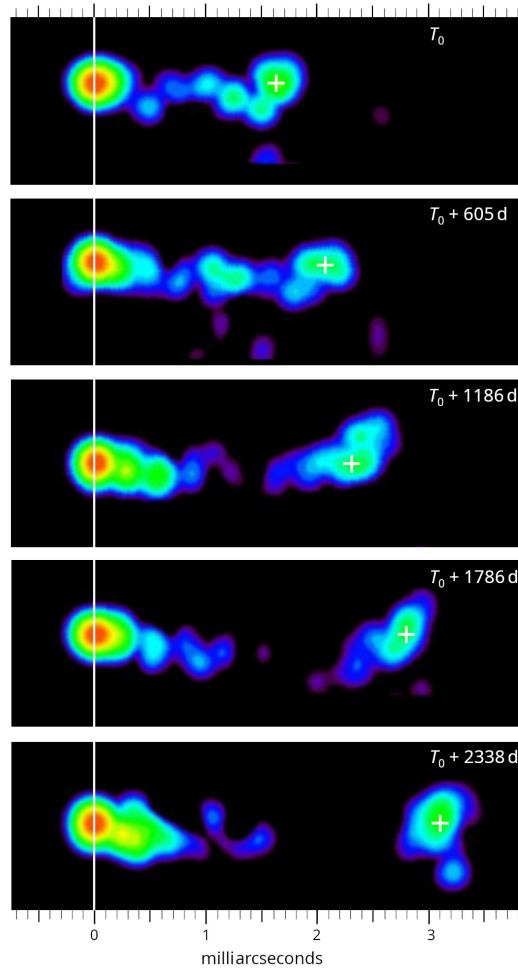
(T04.3) Estima a extinção devida à nebulosa, $A_{H\alpha}$ e $A_{H\beta}$, nos comprimentos de onda $H\alpha$ e $H\beta$, respetivamente. [6]

(T04.4) Estima a extinção da nebulosa (A_V) e a magnitude aparente da estrela na banda V, m_{V0} , na ausência da nebulosa. [2]

(T05) Quasares

[20 pontos]

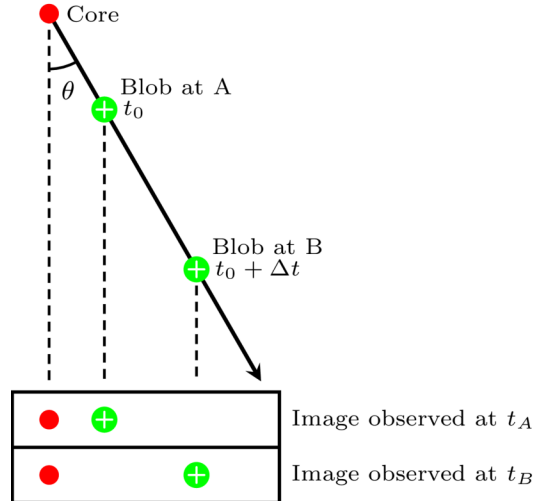
Um quasar é uma galáxia ativa extremamente luminosa, alimentada por um buraco negro supermassivo que emite jactos relativísticos. A figura mostra uma série de painéis com imagens no rádio de um quasar (com um desvio cosmológico para o vermelho de $z = 0,53$ e uma distância luminosidade de $D_L = 1,00 \times 10^{10} \text{ ly}$) em diferentes instantes. O "núcleo" está alinhado com a linha branca vertical, enquanto um jato, consistindo num "aglomerado" (indicado com uma cruz (+) branca) se afasta do "núcleo" ao longo do tempo. Cada painel mostra o instante de observação (começando com T_0 para a primeira imagem) e a escala angular é indicada na parte superior e inferior da figura.



- (T05.1) Determina a separação angular do "aglomerado", ϕ_{blob} (em milissegundos de arco), e a sua distância transversal, l_{blob} (em anos-luz), em relação ao "núcleo" do quasar para cada observação. Depois, calcula a velocidade aparente do "aglomerado" na direção transversal (v_{app}) como uma fração da velocidade da luz, $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$, usando observações consecutivas. Calcula também a velocidade aparente média $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ ao longo de todo o período de observação. [5]

O jato do quasar move-se, na realidade, a uma velocidade relativística $v \equiv \beta c$, mas não necessariamente no plano do céu. Por exemplo, forma um ângulo θ (o "ângulo de observação") em relação à linha de visão de um observador distante (indicado pelas linhas tracejadas), como se mostra no esquema abaixo.

Para esta parte e todas as partes seguintes, ignora o desvio cosmológico para o vermelho do quasar e quaisquer efeitos relativistas.



(T05.2) A luz emitida pelo "aglomerado" em dois instantes diferentes t_0 (correspondente à posição A) e $t_0 + \Delta t$ (correspondente à posição B) chega ao observador em t_A e t_B , respetivamente. Assim, a diferença de tempo observada é $\Delta t_{app} = t_B - t_A$.

(T05.2a) Determina uma expressão para a razão $\frac{\Delta t_{app}}{\Delta t}$ em termos de β e θ . [2]

(T05.2b) Usando a razão da alínea anterior, expressa β_{app} em função de β e θ . [2]

(T05.3) O movimento diz-se superluminal se a velocidade aparente exceder a da luz ($\beta_{app} > 1$) e subluminal se não exceder ($\beta_{app} < 1$).

(T05.3a) Para $\beta_{app} = 1$, traça uma curva suave de β em função de θ para marcar a fronteira entre movimentos subluminais e superluminais. Sombrea a região superluminal no gráfico com linhas inclinadas (///). [4]

(T05.3b) Determina a menor velocidade real do jato ($\beta_{low} = v_{low}/c$) e o respetivo ângulo de observação θ_{low} para que ocorra movimento superluminal. [2]

(T05.4) Encontra uma expressão para o ângulo de observação máximo, θ_{max} , para o qual é possível um dado valor de β_{app} . [2]

O "núcleo" de um quasar, o seu objeto compacto central, apresenta variabilidade na sua emissão devido a processos internos que ocorrem dentro de uma região causalmente ligada. O tamanho (= raio) desta região é tipicamente considerado como sendo cerca de cinco vezes o raio de Schwarzschild do "núcleo".

(T05.5) Verifica-se que o "núcleo" de um certo quasar varia em escalas de tempo de cerca de 1 h. Obtém um limite superior, $M_{c, max}$, para a massa do objeto compacto central, em unidades de massa solar. [3]

(T06) Rotação Galáctica

[20 pontos]

A curva de rotação da nossa Galáxia pode ser determinada usando medições de velocidade na linha de visão (velocidade radial) de nuvens de hidrogénio neutro (HI) ao longo de várias longitudes galácticas, observadas através da linha HI de 21 cm. Considera uma nuvem de HI com uma longitude galáctica l , situada a uma distância R do Centro Galáctico (CG) e a uma distância D do Sol. Considera o Sol a uma distância $R_0 = 8,5$ kpc do CG. Supõe que tanto o Sol como a nuvem de HI estão em órbitas circulares em torno do CG no plano galáctico, com velocidades angulares Ω_0 e Ω , e velocidades de rotação V_0 e V , respetivamente.

As componentes da velocidade na linha de visão (V_r) e da velocidade transversal (V_t) da nuvem, tal como observadas a partir do Sol, podem ser expressas como

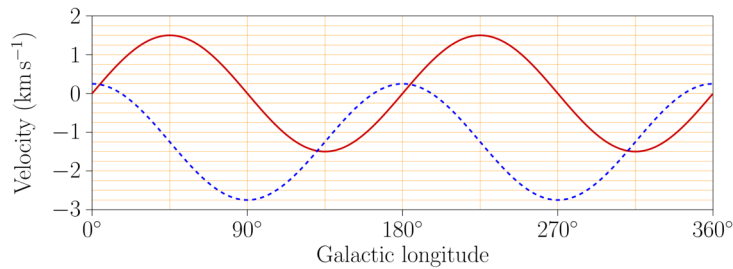
$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Visto do Polo Norte da Galáxia, o movimento de rotação da Galáxia é no sentido dos ponteiros do relógio. Ao longo deste problema, vamos considerar que a velocidade na linha de visão é positiva quando o movimento é de afastamento e as nuvens podem ser tratadas como objectos pontuais.

- (T06.1) No gráfico fornecido na Folha de Respostas, esboça qualitativamente V_r em função de D , de $D = 0$ a $D = 2R_0$, para duas linhas de visão definidas por (i) $l = 45^\circ$ e (ii) $l = 135^\circ$. Identifica cada uma das tuas linhas/curvas com o valor de l . [5]

- (T06.2) O gráfico abaixo mostra as componentes médias da velocidade radial (curva contínua a vermelho) e da velocidade transversal (curva tracejada a azul) de estrelas a uma distância de 100 pc do Sol, representadas em função da longitude galáctica.



Usando o gráfico, estima o período orbital do Sol (P) em torno do CG em mega-anos (Myr). [3]

- (T06.3) Jan Oort observou que, na vizinhança solar ($D \ll R_0$), a diferença entre as velocidades angulares ($\Omega - \Omega_0$) será pequena e, por isso, deduziu a seguinte aproximação de primeira ordem para as componentes da velocidade na linha de visão e da velocidade transversal:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD,$$

onde A e B são conhecidas como constantes de Oort.

Vamos considerar dois casos:

(I) a curva de rotação da Galáxia atualmente observada e

(II) a curva de rotação correspondente a um cenário hipotético em que a galáxia não tem matéria escura e em que se supõe que toda a massa da galáxia está concentrada no seu centro.

(T06.3a) Deriva expressões para o gradiente radial da velocidade de rotação na posição do Sol, [2]

$$\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}, \text{ para os dois casos.}$$

(T06.3b) Expressa A e B em função de V_0 , R_0 e do gradiente radial da velocidade de rotação na [8]

$$\text{posição do Sol, } \left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}.$$

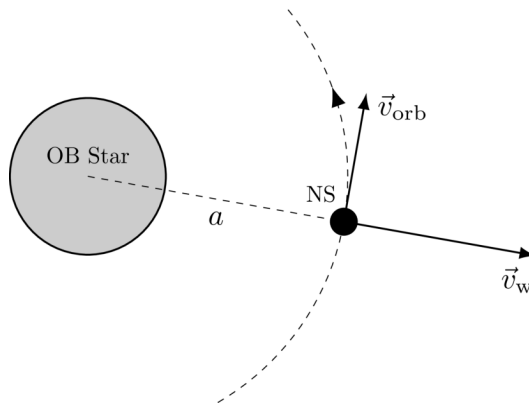
(T06.3c) A razão (A/B) das constantes de Oort para os dois casos dados, (I) e (II), é definida [2]
como F_I e F_{II} , respetivamente. Determina F_I e F_{II} .

(T07) Estrela de neutrões binária

[20 pontos]

Num sistema binário que envolve uma estrela compacta, em que a estrela companheira não preenche o seu lóbulo de Roche, a principal fonte de acreção para a estrela compacta é o vento estelar proveniente da estrela companheira. Esta acreção alimentada pelo vento é especialmente relevante em sistemas que incluem uma estrela de tipo jovem (como uma estrela O ou B, referida a partir daqui como estrela OB), juntamente com um objeto compacto como uma estrela de neutrões (EN) numa órbita próxima.

Considere um sistema binário EN–estrela OB em que uma estrela de neutrões com uma massa $M_{NS} = 2,0 M_{\odot}$ e um raio $R_{NS} = 11 \text{ km}$ orbita numa órbita circular de raio a em torno do centro da estrela OB, com velocidade $v_{orb} = 1,5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (vê a figura abaixo). Ao longo deste problema, assume que a perda de massa da estrela OB é esfericamente simétrica e que a sua taxa é $\dot{M}_{OB} = 1,0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.



(T07.1) O raio de acreção, R_{acc} , é definido como a distância máxima a partir da EN na qual o vento estelar [3]
pode ser capturado pela EN. Se a velocidade do vento estelar à distância orbital da EN é $v_w = 3,0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, determina R_{acc} para o sistema acima, em km, usando o cálculo padrão da velocidade de escape.

(T07.2) Assumindo que todo o material capturado é acretado pela EN, estima a taxa de acreção de massa, [3]
 $\dot{M}_{acc}$, do vento estelar para a ES em unidades de $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ se $a = 0,5 \text{ au}$. Negligencia os efeitos da pressão de radiação e do tempo de arrefecimento finito do gás acretado.

(T07.3) Considera agora a situação em que a velocidade do vento estelar à distância orbital a (próximo da EN) se torna comparável à velocidade orbital da EN. A taxa de acreção de massa do vento estelar para a EN, neste caso, será dada por uma expressão da forma $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} f(\tan \beta, q)$, onde $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$ é a razão de massas do sistema binário e β é o ângulo, no referencial da EN, entre a direção da velocidade do vento e a direção radial afastando-se da estrela OB. Obtém a expressão para $f(\tan \beta, q)$ assumindo que $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$.

(T07.4) Considera que o material totalmente ionizado acreta radialmente e é dificultado devido ao forte campo magnético $\vec{B}$ da EN. Este efeito pode ser modelado como uma pressão, dada por $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Vamos assumir que a EN tem um campo magnético dipolar cuja magnitude no plano equatorial varia com a distância r à EN para $r \gg R_{\text{NS}}$ como

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

onde B_0 é o campo magnético no equador da EN. Assume que o eixo do dipolo magnético se alinha com o eixo de rotação da EN.

(T07.4a) Obtém a pressão magnética, $P_{\text{eq, mag}}$, no plano equatorial em termos de B_0 , R_{NS} , r , e de [1]
outras constantes adequadas.

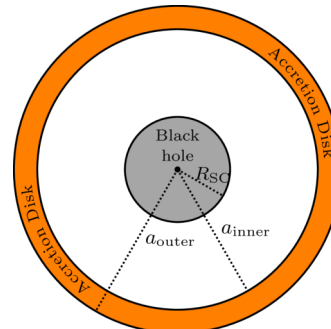
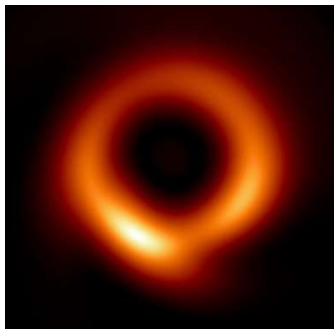
(T07.4b) A distância máxima em que o fluxo de acreção é parado pelo campo magnético no plano equatorial é chamado de raio magnetosférico R_m . Este fluxo de matéria exercerá uma pressão devido ao movimento relativo entre o vento estelar incidente e a EN. Obtém uma expressão aproximada para o campo magnético crítico $B_{0, c}$ para o qual R_m coincide com R_{acc} e calcula o seu valor em Tesla. Os efeitos magnéticos devem ser negligenciados para $r > R_m$ e deve considerar-se $v_w \gg v_{\text{orb}}$. [7]

(T08) Sombra de um buraco negro

[20 pontos]

O "Event Horizon Telescope" (EHT) divulgou uma imagem de um buraco negro supermassivo no centro da galáxia M87, como apresentado no lado esquerdo da figura abaixo.

Para entender algumas características dessa imagem, consideraremos um modelo simplificado de um buraco negro não rotativo, estático e isotrópico $M = 6,5 \times 10^9 M_{\odot}$, rodeado por um disco de acreção plano, fino e sem massa, com raios interno e externo, $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ e $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, respectivamente, onde R_{SC} é o raio de Schwarzschild. Um esboço visto de cima é mostrado no lado direito da figura abaixo (fora de escala).



Assumimos que o disco de acreção é a única fonte de luz a ser considerada. Cada ponto no disco emite luz em todas as direções. Essa luz viaja sob a influência do campo gravitacional do buraco negro. A trajetória dos raios de luz é governada pelas duas equações dadas abaixo (que são semelhantes às de um objeto ao redor do Sol):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

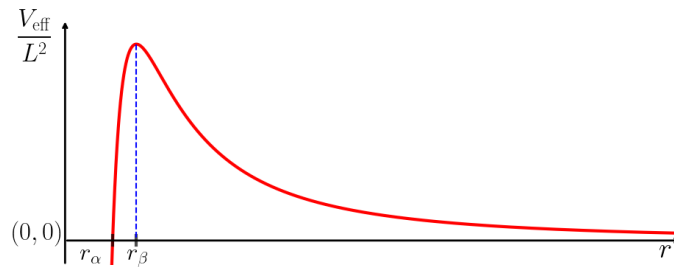
onde $r \in (R_{SC}, \infty)$ é a coordenada radial, $\phi \in [0, 2\pi)$ é o ângulo azimutal, e E e L são constantes relacionadas à conservação de energia e momento angular, respectivamente.

Aqui $v_r \equiv dr/dt$ é a magnitude da velocidade radial, v_ϕ é a magnitude da velocidade tangencial, e $\omega \equiv d\phi/dt$ é a velocidade angular. Definimos o parâmetro de impacto b de uma trajetória como $b = L/\sqrt{2E}$. A dilatação do tempo é negligenciada neste problema.

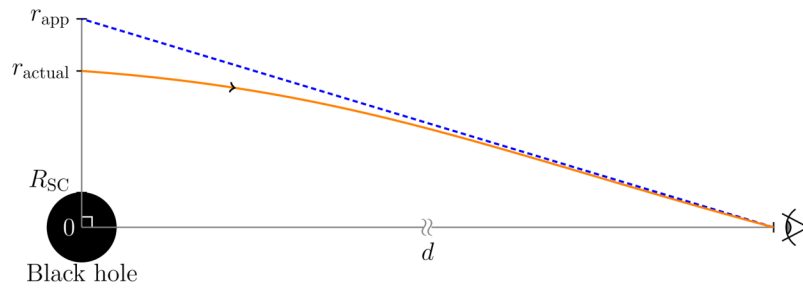
Outra equação útil é obtida diferenciando a primeira equação:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

- (T08.1) Podem existir trajetórias circulares de luz em torno do buraco negro. Determina o raio, r_{ph} , e o parâmetro de impacto, b_{ph} , para essas trajetórias de fótons em função de M e das constantes relevantes. [4]
- (T08.2) Calcula o tempo, T_{ph} , necessário para completar uma órbita completa da trajetória circular da luz, em segundos. [2]
- (T08.3) A equação da velocidade radial apresentada acima (a primeira equação desta questão) pode ser comparada com uma equação da forma $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$ para trajetórias de luz. Um gráfico esquemático de V_{eff}/L^2 em função de r é apresentado abaixo.



- (T08.3a) O gráfico indica duas distâncias especiais, r_α e r_β . Obtém expressões para r_α e r_β , em termos de M e constantes relevantes. [2]
- (T08.3b) Um fóton viajando para dentro, a partir do disco de acreção em direção ao buraco negro, ainda pode escapar para o infinito em alguns casos. Determina a menor distância a partir da qual não é mais possível o retorno, r_t , em termos de M e constantes relevantes. Determine o valor mínimo do parâmetro de impacto, b_{min} para este fóton. [3]
- (T08.4) Considera um raio de luz que parte do plano do céu, e seja r_{actual} a distância real entre sua trajetória e o centro do buraco negro. Esse raio sofrerá uma forte curvatura devido à gravidade do buraco negro e, eventualmente, alcançará um observador (denotado por um olho) a uma grande distância d do sistema, como mostrado abaixo.



Para este observador, o raio aparenta surgir num ponto diferente do plano, a uma distância $r_{\text{app}} \approx b$ do centro do buraco negro, onde b é o parâmetro de impacto. Para pontos no disco de acreção em $r = r_{\text{actual}}$, pode-se assumir a seguinte relação:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

Para observadores distantes, como nós, com uma visão frontal do disco de acreção, a imagem do sistema parecerá ser simetricamente circular no plano do céu. Determine o raio aparente mais externo, r_{outer} , e o raio aparente mais interno, r_{inner} , da imagem em unidades de au. [5]

- (T08.5) Considera um buraco negro supermassivo isolado de massa $M = 6,5 \times 10^9 M_{\odot}$ sem qualquer disco de acreção. Um breve e intenso fluxo de radiação electromagnética ocorre durante 5s num ponto Z a uma distância, digamos, de $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ do buraco negro, como se mostra na figura. O fluxo no ponto Z emite luz em todas as direções. Um observador num ponto muito distante do buraco negro (representado por um olho na figura abaixo) capta uma imagem de longa exposição da região em torno do buraco negro durante 60s.



Escolhe a opção correta para cada uma das afirmações abaixo.

- (T08.5a) O número de percursos possíveis para a luz viajar de Z até ao observador é: [2]
- (A) No máximo um
(B) Exatamente um
(C) Exatamente dois
(D) Superior a dois.
- (T08.5b) O número de imagens da explosão EM em Z que serão vistas na imagem de longa exposição é: [2]
- (A) No máximo uma
(B) Exatamente uma
(C) Exatamente duas
(D) Superior a duas.

(T09) Turbulência atmosférica

[35 pontos]

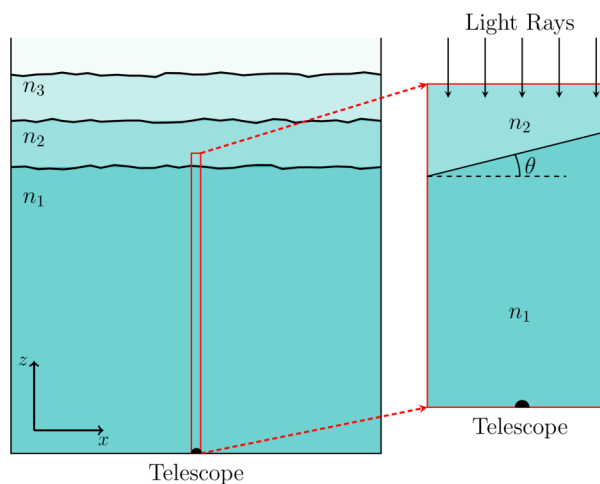
Um telescópio com uma lente objetiva convexa acromática de diâmetro $D = 15$ cm e distância focal $f = 200$ cm está apontado para uma estrela no zénite.

- (T09.1) Determina o diâmetro (em m), d_{image} , da imagem de uma fonte pontual produzida pela lente objetiva no seu plano focal para luz verde ($\lambda = 550 \text{ nm}$), considerando apenas os efeitos da difração. [1]

A imagem de uma fonte astronômica também é afetada pelo chamado “seeing atmosférico”.

Os limites entre as camadas na atmosfera, bem como os índices de refração das camadas, mudam continuamente devido à turbulência, variação de temperatura, entre outros fatores. Isso leva a pequenas mudanças na posição da imagem no plano focal do telescópio, conhecido como o “efeito de cintilação”. Para o restante do problema, além de usar o tamanho aparente da estrela limitado pela difração (como usado acima), nenhum outro efeito de interferência será considerado.

Na figura abaixo, a imagem à esquerda mostra uma seção transversal vertical da atmosfera com múltiplas camadas de diferentes índices de refração ($n_1, n_2, n_3, \dots$). A imagem à direita mostra a visão ampliada de um segmento vertical fino da atmosfera e a fronteira entre as duas camadas atmosféricas mais baixas de índices de refração n_1 e n_2 ($n_1 > n_2$). Para este problema, consideramos apenas essas duas camadas e sua fronteira. Os diagramas não estão em escala.

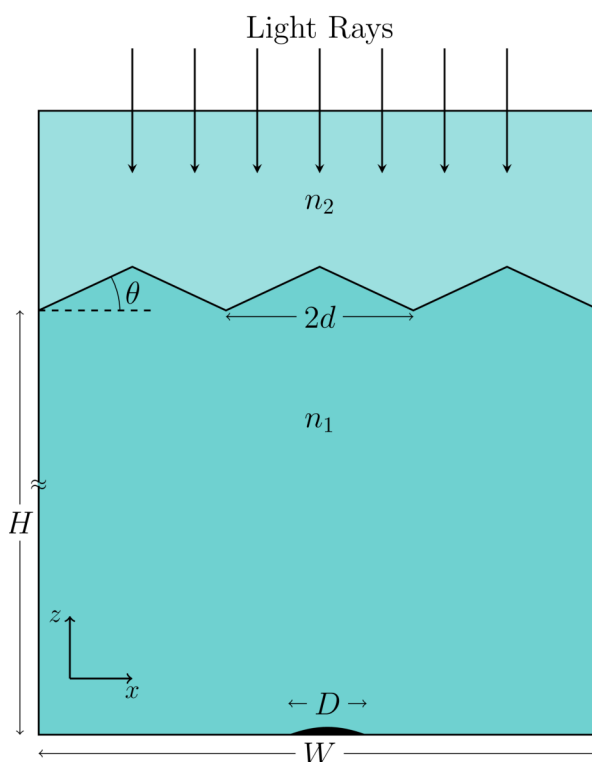


- (T09.2) Considera uma fronteira entre as duas camadas a uma altura $H = 1 \text{ km}$ diretamente acima da objetiva do telescópio, com uma inclinação de $\theta = 30^\circ$ em relação ao plano horizontal. Em todas as partes deste problema, θ é considerado positivo no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Para uma fonte de luz monocromática, $n_1 = 1,00027$ e $n_2 = 1,00026$. Admite também que o desvio angular da imagem no plano focal do telescópio, para uma estrela no zênite, seja α .
- (T09.2a) Desenha um diagrama de raios na interface, com identificação adequada, mostrando n_1 , n_2 , θ e α . [2]
- (T09.2b) Encontra a expressão para α em termos de θ , n_1 e n_2 . Use as aproximações para ângulos pequenos: $\sin \alpha \approx \alpha$ e $\cos \alpha \approx 1$. [2]
- (T09.2c) Calcula o deslocamento Δx_θ , em metros, na posição da imagem, se θ aumentar em 1% (mantendo n_1 e n_2 fixos). [3]
- (T09.2d) Calcula o deslocamento Δx_n , em metros, na posição da imagem se n_2 aumentar em 0,0001% (mantendo n_1 e θ fixos). [3]
- (T09.3) Para uma luz branca proveniente de uma estrela no zênite, escolhe qual das seguintes opções descreve melhor a forma e a cor da imagem, assinalando com um certo ($\checkmark$) a caixa com a opção mais apropriada (apenas uma) na Folha de Respostas. Nota que x aumenta da esquerda para a direita na figura. [2]

	Cor da imagem	Forma da imagem	Margem esquerda	Margem direita
A	Branca	Circular		
B	Branca	Elíptica		
C	Colorida	Circular	Azul	Vermelho
D	Colorida	Circular	Vermelho	Azul
E	Colorida	Elíptica	Azul	Vermelho
F	Colorida	Elíptica	Vermelho	Azul

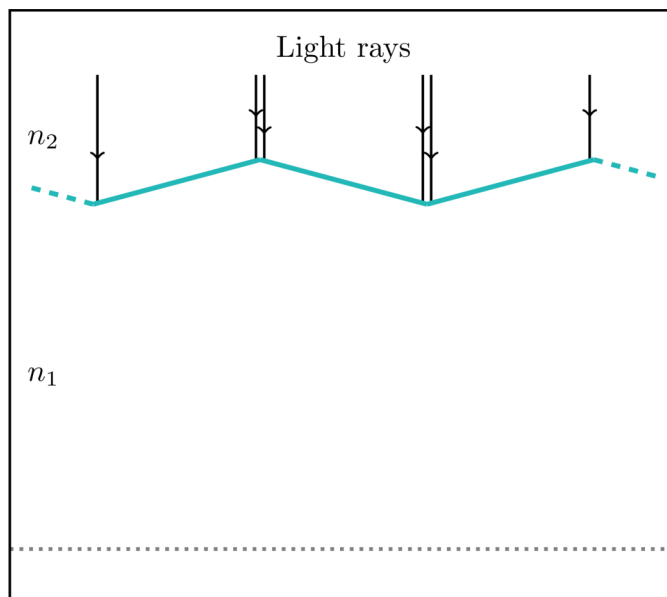
Para todas as partes restantes dessa questão, consideramos luz verde monocromática com $\lambda = 550$ nm. Modelamos a interface entre as camadas como um conjunto de planos em zigue-zague infinitos (orientados perpendicularmente ao plano da página) separados por $d = 10$ cm ao longo do eixo x , com $\theta = 10^\circ$ ou $\theta = -10^\circ$.

A figura abaixo (fora de escala) mostra uma seção transversal deste modelo da atmosfera com largura W ($W \ll H$). Para telescópios com grande abertura, essa natureza em zigue-zague da interface resulta na formação de manchas ("speckles") no plano focal.



(T09.4) Considera uma atmosfera modelada conforme a descrição acima.

(T09.4a) Uma seção da atmosfera com planos em zigue-zague consecutivos, com os mesmos parâmetros mencionados acima, é mostrada no diagrama abaixo (fora de escala).



Neste diagrama, reproduzido na Folha de Respostas, desenha os caminhos dos raios de luz incidentes até o plano onde está colocada a objetiva do telescópio, mostrado pela linha pontilhada cinza.

Marca com um "X" no diagrama a(s) região(ões), se houver, onde nenhum raio de luz irá alcançar. [4]

(T09.4b) Calcula a largura W_X de tal(is) região(ões). [3]

(T09.4c) Encontra o maior diâmetro, $D_{\max}$, da objetiva do telescópio com a qual será possível obter uma única imagem de uma estrela, escolhendo apropriadamente a localização do telescópio em relação à estrutura da interface. [4]

(T09.5) Considera o caso em que a forma em ziguezague da fronteira é permitida em ambas as direções x e y (como um campo de pirâmides), e $D = 100$ cm (com $f = 200$ cm). [6]

Desenha o padrão qualitativo das manchas resultantes na caixa fornecida na Folha de Respostas.

(T09.6) Para uma atmosfera turbulenta, considera novamente a mesma forma de ziguezague entre a interface das camadas, mas correndo apenas ao longo da direção x , e com o ângulo entre os dois planos mudando a uma taxa uniforme de 10° para -10° em 1,0 s. Aproxima que isso ocasiona uma taxa uniforme de deslocamento da posição da imagem. [5]

Considera um telescópio com $D = 8$ cm e $f = 1$ m. Estime o maior tempo de exposição $t_{\max}$ permitido para a câmera CCD de modo que se obtenha apenas uma única imagem do objeto, e qualquer possível desvio em sua posição permaneça inferior a 1% do diâmetro limitado por difração da imagem.

(T10) Nucleossíntese do Big Bang

[35 pontos]

No início do Universo, durante a era dominada pela radiação, o fator de escala do Universo varia como $a(t) \sim t^{1/2}$, onde t é o tempo desde o Big Bang. Durante a maior parte dessa era, nêutrons (n) e prótons (p) permanecem em equilíbrio térmico entre si por meio de interações fracas. A densidade numérica (N) de nêutrons ou prótons livres está relacionada à temperatura T e suas massas correspondentes m de tal forma que

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

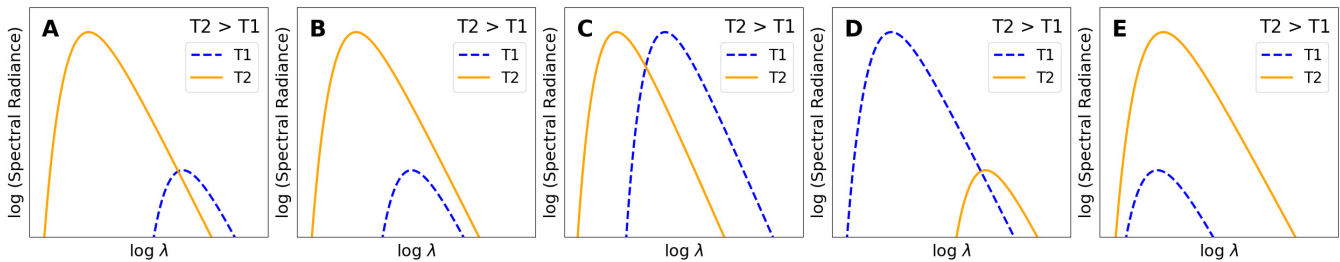
enquanto o tempo $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70$ s, quando $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. Após t_{wk} , as interações fracas não conseguem mais manter tal equilíbrio, e neutrões livres decaem em prótons com um tempo de meia-vida de 610,4 s.

(T10.1) Seja a densidade numérica de prótons N_p e a de neutrões N_n . Calcula a abundância relativa de neutrões dada pela razão $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ no tempo t_{wk} . [4]

(T10.2) Fótons mantêm o equilíbrio térmico e retêm um espectro de corpo negro em todas as épocas.

(T10.2a) Encontra o índice β , tal que $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Identifica qual dos gráficos a seguir mostra o comportamento correto da densidade de energia espectral para duas temperaturas T_1 e T_2 . Marca com um visto (✓) a opção correta na Folha de Respostas. [2]



(T10.3) Após t_{wk} , o processo de formação de Deutério a partir de prótons e neutrões é regido pela equação de Saha, dada pelo físico indiano Prof. Meghnad Saha, que pode ser simplificada para

$$\frac{N_D}{N_n} = 6,5 \eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n) c^2}{k_B T} \right).$$

Aqui, a razão de bárions para fótons η é $6,1 \times 10^{-10}$, e N_D é a densidade numérica de Deutério.

(T10.3a) Esquematiza a razão N_D/N_n no modelo que está na Folha de Respostas para pelo menos 4 valores de temperatura razoavelmente espaçados e que estejam no domínio $k_B T = [60, 70]$ keV. Desenha uma curva suave que passe por esses pontos. [5]

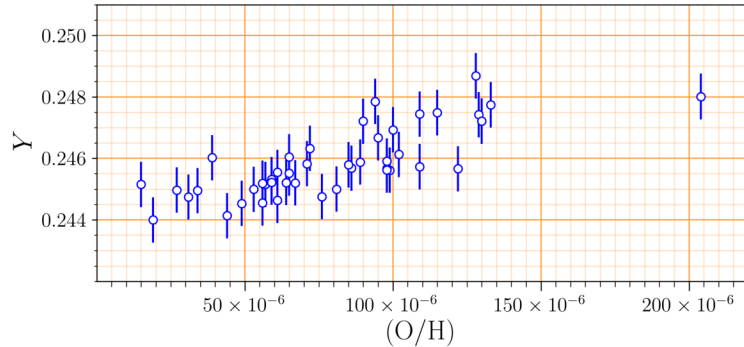
(T10.3b) A partir do gráfico, encontra $k_B T_{\text{nuc}}$ (em keV) quando $N_D = N_n$. [1]

(T10.3c) Em vez disso, assume agora que todos os neutrões livres se combinam instantaneamente com os prótons em $k_B T_{\text{nuc}}$ para formar Deutério, e todos eles são imediatamente convertidos em Hélio (${}^4_2\text{He}$). Calcula a época ou tempo correspondente de nucleossíntese, t_{nuc} (em s), para a formação de Hélio. [4]

(T10.4) Calcula o valor de $X_{n, \text{nuc}}$ imediatamente antes de t_{nuc} . [5]

(T10.5) A abundância primordial de Hélio, Y_{prim} , é definida como a fração da massa bariónica total no Universo que está ligada em Hélio logo após t_{nuc} . Obtém uma estimativa teórica para o valor de Y_{prim} . Para o propósito deste cálculo apenas, assume $m_p \approx m_n$ e que a massa do Hélio, $m_{\text{He}} \approx 4m_n$. [3]

- (T10.6) A abundância primordial de Hélio é muito difícil de medir, pois as estrelas convertem continuamente Hidrogénio em Hélio no Universo. A contaminação de Hélio por estrelas em uma galáxia pode ser caracterizada pela densidade numérica, em relação ao Hidrogénio, de Oxigénio (que é produzido apenas por estrelas), denotada como (O/H) . Uma compilação das medições de (O/H) e da abundância de Hélio, Y , para diferentes galáxias é esquematizado abaixo.



Usa todos os pontos neste gráfico (que é reproduzido na Folha de Resposta) para responder ao seguinte.

- (T10.6a) Estima Y para uma galáxia anã azul compacta com um valor de $(O/H)=1,75 \times 10^{-4}$. [2]
- (T10.6b) Obtém a inclinação $dY/d(O/H)$ do ajuste de linha reta aos dados acima. [2]
- (T10.6c) Estima a abundância primordial de Hélio, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, com base nas observações acima. [2]
- (T10.7) A diferença entre Y_{prim} e $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ pode ser reconciliada alterando a razão barião-fotão η . Quando η é diminuída, conforme indicado por $\downarrow$ na Folha de Respostas, indica o aumento ($\uparrow$) ou diminuição ($\downarrow$) em $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (quando $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$, e Y_{prim} nos espaços correspondentes na Folha de Respostas. [3]

(T11) Estrelas através de gráficos

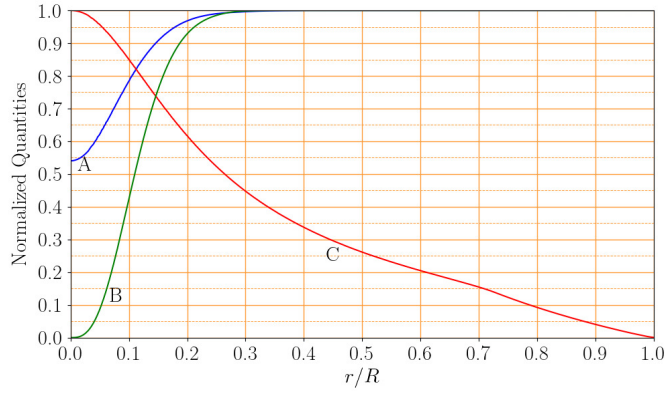
[50 pontos]

As estrelas podem ser bem aproximadas como objetos esfericamente simétricos, e, portanto, a distância radial r a partir do centro pode ser escolhida como a única variável independente na modelagem dos interiores estelares. A massa contida dentro de uma esfera de raio r é denotada por $m(r)$. A luminosidade $l(r)$ é definida como a energia líquida que flui para fora através de uma superfície esférica de raio r por unidade de tempo. Outras quantidades de interesse, por exemplo, a densidade $\rho(r)$, temperatura $T(r)$, fração de massa de Hidrogénio $X(r)$, fração de massa de Hélio $Y(r)$, e a energia nuclear gerada por unidade de massa por unidade de tempo $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, são consideradas funções de r . Ao longo deste problema, vamos negligenciar os efeitos de difusão e sedimentação gravitacional dos elementos dentro da estrela.

O símbolo "log" refere-se ao logaritmo na base 10. O problema consiste em três partes independentes.

(T11.1) Parte 1: Dentro de uma estrela

O gráfico abaixo mostra a variação de três quantidades estruturais, A, B e C, como funções da razão entre os raios r/R em um modelo estelar de massa $1 M_{\odot}$ e idade 4 GYr, onde R é o raio fotosférico da estrela. Os valores da fração de massa de Hélio na superfície (fotosférica), Y_s , e da metalicidade (fração de massa de todos os elementos mais pesados que o Hélio) na superfície (fotosférica), Z_s , da estrela são dados por $(Y_s; Z_s) = (0,28; 0,02)$. Todas as quantidades mostradas nos gráficos são normalizadas por seus respectivos valores máximos.



(T11.1a) Identifica, de maneira única, as três quantidades A, B e C entre as cinco possibilidades: [6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Escreve A/B/C nas caixas ao lado das quantidades apropriadas na Folha de Respostas. Não é necessário justificar a tua resposta.)

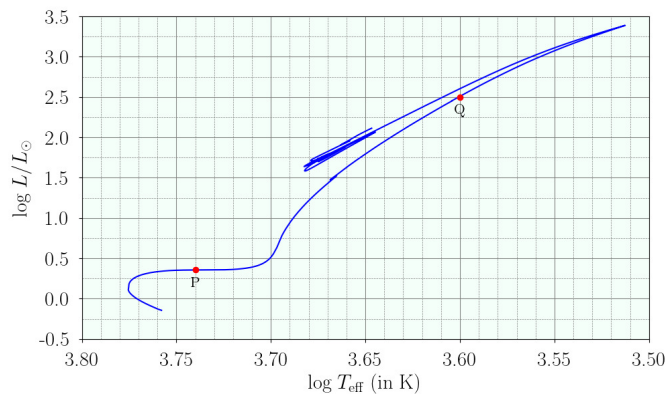
(T11.1b) Qual é a fração de massa de Hélio no centro, Y_c , da estrela? [3]

(T11.1c) Esboça as duas quantidades restantes da lista de cinco (que não foram identificadas como curvas A, B ou C) dadas em (T11.1a), como funções de r/R no mesmo gráfico na Folha de Respostas e rotula com as tuas respectivas quantidades. [5]

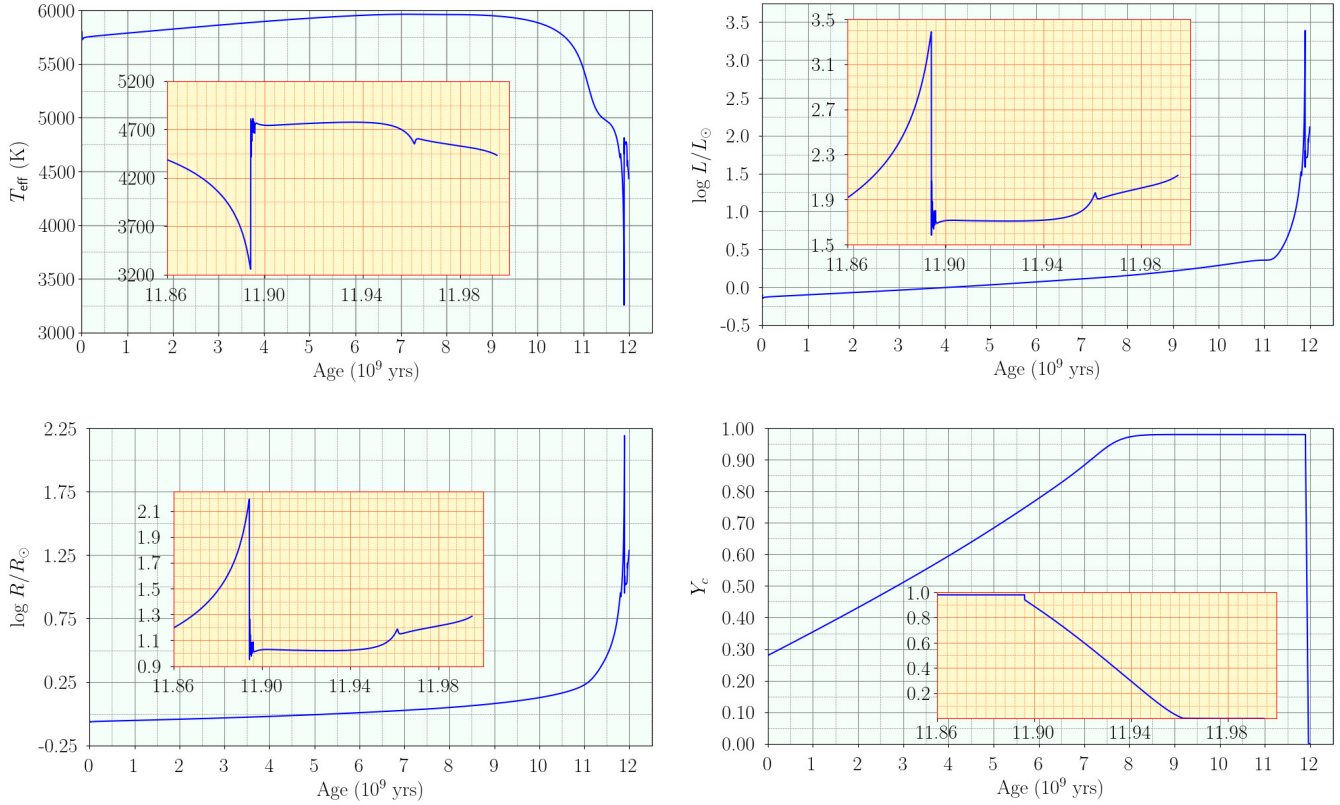
(T11.2) **Parte 2: Estrelas em evolução**

Considera a evolução de uma estrela de $1M_{\odot}$ cuja composição inicial uniforme é dada pelas frações de massa de hélio, $Y_0 = 0,28$, e metais, $Z_0 = 0,02$. As figuras abaixo mostram a variação de diferentes quantidades globais dessa estrela à medida que ela evolui desde a ZAMS (Sequência Principal de Idade Zero) até o final da queima de hélio em seu núcleo.

O gráfico abaixo mostra a trajetória evolutiva da estrela no diagrama HR (gráfico de $\log L/L_{\odot}$ vs $\log T_{\text{eff}}$, onde L é a luminosidade superficial e T_{eff} é a temperatura efetiva).



A figura abaixo possui quatro gráficos que mostram a variação de T_{eff} (em K), L (plotado como $\log L/L_{\odot}$), R (plotado como $\log R/R_{\odot}$), e Y_c com a idade (em 10^9 anos) da mesma estrela. Em cada um desses quatro gráficos, os detalhes mostram as variações das respectivas quantidades entre as idades de $11,86 \times 10^9$ anos a $12,00 \times 10^9$ anos, para maior clareza.



Usa esses gráficos para responder às perguntas abaixo.

- (T11.2a) Qual é o tempo aproximando de vida na sequência principal, t_{MS} (em anos), da estrela? [1]
- (T11.2b) Qual é a duração aproximada, Δt_{He} (em anos), durante a qual a estrela queima Hélio [1] em seu núcleo?
- (T11.2c) Qual fração, f_{H} , da quantidade inicial de Hidrogénio em seu centro foi queimada [3] quando a luminosidade da estrela é $1 L_{\odot}$?
- (T11.2d) Qual é o raio da estrela, R_1 (em unidades de $R_{\odot}$) quando 60% da quantidade inicial de [3] Hidrogénio em seu centro foi queimada?
- (T11.2e) Quais são os raios da estrela, R_P e R_Q (em unidades de $R_{\odot}$), correspondentes às suas [4] posições P e Q, respectivamente, conforme marcado no diagrama HR?

(T11.3) **Parte 3: Distribuição de massa dentro de uma estrela**

A equação que governa a distribuição de massa dentro de uma estrela é dada por

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Seria conveniente expressar esta equação em termos de três variáveis adimensionais a saber: a massa fracionária, q , o raio fracionário, x , e a densidade relativa, σ , que definimos como

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

onde M e R são a massa total e o raio da estrela, respectivamente, e $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ é a densidade média da estrela. Para a estrela específica que consideraremos nesta parte, as seguintes informações são fornecidas:

- A densidade central $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$
- Metade da massa da estrela está contida dentro dos 25% internos de seu raio total, e 70% de sua massa está contida dentro dos 35% internos de seu raio total.

Em todas as partes subsequentes desta questão, será suficiente arredondar todos os coeficientes numéricos derivados para dentro de 0,005.

- (T11.3a) Expressa a equação acima, que descreve a dependência da massa em relação ao raio, [2]
em termos de x , $\frac{dq(x)}{dx}$ e $\sigma(x)$.

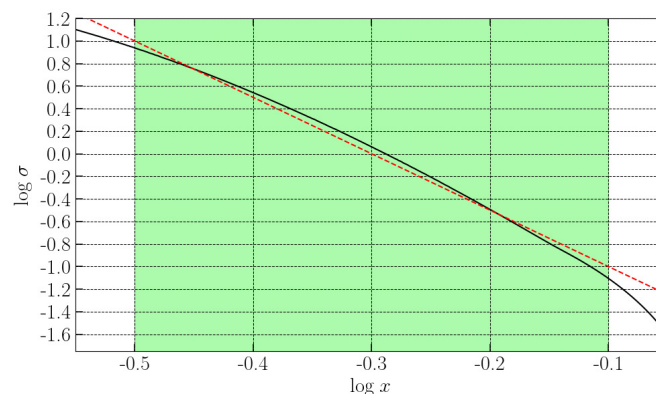
Para obter a distribuição de massa com o raio, precisamos conhecer o perfil de densidade dentro da estrela. Para o propósito deste problema, descreveremos a variação da densidade com o raio por formas aproximadas em dois domínios de x :

- a parte interna da estrela: $0 \leq x \leq 0,32$
- a parte intermediária da estrela: $0,32 < x < 0,80$

Não fazemos nenhuma aproximação para a parte mais externa, ou seja, $0,80 \leq x \leq 1,00$.

- (T11.3b) **Aproximação para a parte intermediária:**

A variação de $\log \sigma$, como uma função de $\log x$ na parte intermediária da estrela é mostrada (pela curva preta) no gráfico abaixo. Faremos uma aproximação linear (mostrada como uma linha vermelha tracejada no gráfico) para $\log \sigma$ como uma função de $\log x$ no domínio $-0,5 < \log x < -0,1$, ou seja, $0,32 \lesssim x \lesssim 0,80$ (mostrado pelo domínio sombreado em verde). Além disso, aproximaremos a inclinação desta linha pelo inteiro mais próximo.



Usa esta aproximação para escrever uma expressão para $\sigma(x)$ como uma função de x [4]
no domínio $0,32 < x < 0,80$.

- (T11.3c) Usa o resultado de (T11.3b) para derivar uma expressão para $q(x)$ no domínio [6]
 $0,32 < x < 0,80$.

- (T11.3d) **Aproximação para a parte interna:**

Na parte interna da estrela ($0 \leq x \leq 0,32$), a densidade pode ser aproximada como [8]
uma função linear do raio, ou seja, $\sigma(x) = Ax + B$, onde A, B são constantes. Determina A e B , e assim obtenha uma expressão para $q(x)$ no domínio $0 \leq x \leq 0,32$. Nota que as aproximações adotadas na parte anterior e nesta parte podem levar a pequenas descontinuidades na densidade ou massa em $x = 0,32$.

- (T11.3e) As expressões para $q(x)$ obtidas nas partes (T11.3c) e (T11.3d) são aproximações que [4]
descrevem muito bem a variação da massa com o raio, mas apenas em regiões específicas da estrela. Para o domínio $0, 80 \leq x \leq 1$ (para o qual não derivamos nenhuma expressão), é possível usar extrapolação apropriada da região vizinha. Use essas expressões aproximadas e os dados fornecidos para esboçar uma curva suave (sem descontinuidades em $q(x)$ ou em sua derivada) para $q(x)$ vs x para toda a estrela ($0 \leq x \leq 1$) que represente a variação da massa com o raio.

(T12) Radiação de Hawking de Buracos Negros

[50 pontos]

- (T12.1) Um buraco negro (BH) tipicamente se forma pelo colapso gravitacional de uma estrela massiva no final de seu ciclo de vida até um ponto chamado singularidade. Devido à gravidade extrema de tal objeto, nada que entre no chamado horizonte de eventos (uma superfície esférica com $r = R_{SC}$, onde r é a distância à singularidade) é capaz de escapar dele. Aqui, R_{SC} é referido como o raio de Schwarzschild.

- (T12.1a) **Modelando a origem da radiação de Hawking:** Considera um par de partículas, cada uma com massa m , produzidas em cada lado do horizonte do BH. Uma partícula está ligeiramente fora do horizonte em $r \approx R_{SC}$, enquanto a outra partícula está dentro do horizonte em $r = \kappa R_{SC}$. Assume que a energia total de uma partícula é a soma de sua energia de massa de repouso mc^2 e a energia potencial gravitacional devido ao BH.

Determina o valor de κ para o qual o par de partículas tem energia total zero.

[4]

- (T12.1b) **Temperatura de um buraco negro:** Se a partícula produzida fora do horizonte no processo acima tiver energia cinética suficiente, ela pode escapar do BH em um processo chamado radiação de Hawking. A que está dentro do horizonte, que tem energia negativa, é absorvida e diminui a massa do BH.

Assume que toda a radiação de Hawking é composta por fótons com um espectro de corpo negro que atinge o pico no comprimento de onda $\lambda_{bb} \approx 16R_{SC}$. Sabe-se que, para um BH de uma massa solar, $R_{SC, \odot} = 2,952$ km.

Obtém uma expressão para a temperatura, T_{bh} , do BH correspondente a essa radiação de corpo negro, em termos de sua massa M_{bh} e constantes físicas. Calcule o raio de Schwarzschild, $R_{SC, 10\odot}$, e a temperatura, $T_{bh, 10\odot}$, para um BH com massa $10 M_{\odot}$. [4]

- (T12.1c) **Perda de massa de um buraco negro:** Assume que a radiação de Hawking é emitida a partir do horizonte de eventos.

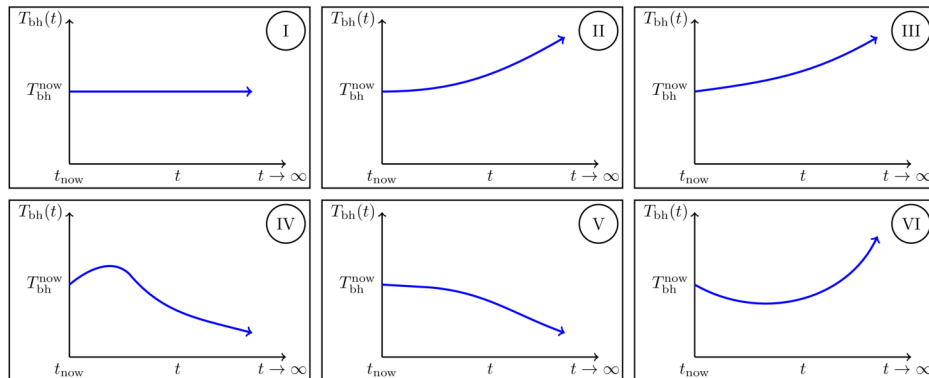
Usando a equivalência massa-energia, obtém uma expressão para a taxa de perda de massa, $dM_{bh}(t)/dt$, em termos da massa $M_{bh}(t)$ do BH e constantes físicas.

Assim, obtém uma expressão para $M_{bh}(t)$ para um BH com massa inicial M_0 . Esboça $M_{bh}(t)$ como uma função de t de $M_{bh} = M_0$ a $M_{bh} = 0$. [8]

- (T12.1d) **Tempo de vida de um buraco negro:** Obtém uma expressão para o tempo de vida τ_{BH} em que um buraco negro com massa inicial M_0 evapora completamente devido à radiação de Hawking, em termos de M_0 e constantes físicas. Calcule o tempo de vida $\tau_{BH, 10\odot}$ (em segundos) para um buraco negro com $M_0 = 10 M_{\odot}$. [3]

- (T12.1e) **Buraco negro em um banho de radiação CMB:** Considera um buraco negro isolado no espaço, longe de outros corpos, com uma temperatura atual T_{bh}^{now} , cercado pela radiação cósmica de fundo de micro-ondas (CMB) com uma temperatura atual $T_{cmb}^{now} = 2,7$ K. O buraco negro pode aumentar sua massa ao absorver a radiação CMB e perder sua massa por radiação de Hawking.

Levando em conta a expansão acelerada do Universo, identifica qual das seguintes figuras mostra a evolução temporal a longo prazo de T_{bh} nos três casos seguintes: (X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Indica a tua resposta marcando a caixa apropriada (apenas uma) para cada caso X, Y ou Z na Tabela fornecida na Folha de Respostas correspondente ao número da figura apropriada. [6]

(T12.2) Buracos negros primordiais (PBHs) de massas muito menores podem se formar no Universo muito primitivo. Todas as perguntas a seguir estão relacionadas aos PBHs. Aqui, quaisquer processos que aumentem a massa do buraco negro podem ser negligenciados.

(T12.2a) **PBH evaporando na época atual:** Como podes ter notado pelas respostas às perguntas anteriores, buracos negros de massa solar levariam muito tempo para evaporar. No entanto, como os PBHs podem ter uma massa muito menor, podemos ser capazes de vê-los evaporando nos tempos atuais.

Encontra a massa inicial $M_{0, PBH}$ (em kg), o raio de Schwarzschild $R_{SC, PBH}$ (em m) e a temperatura T_{PBH} (em K) de um buraco negro que pode estar evaporando completamente na época atual, ou seja, aqueles com tempo de vida $\tau_{PBH} = 14$ bilhões de anos. [4]

(T12.2b) **Formação de um PBH:** No início do Universo dominado por radiação, o fator de escala varia como $a(t) \sim t^{1/2}$. Nesta era, PBHs se formam devido ao colapso de toda a energia contida em uma região de tamanho físico ct , onde t é a idade do Universo naquele momento.

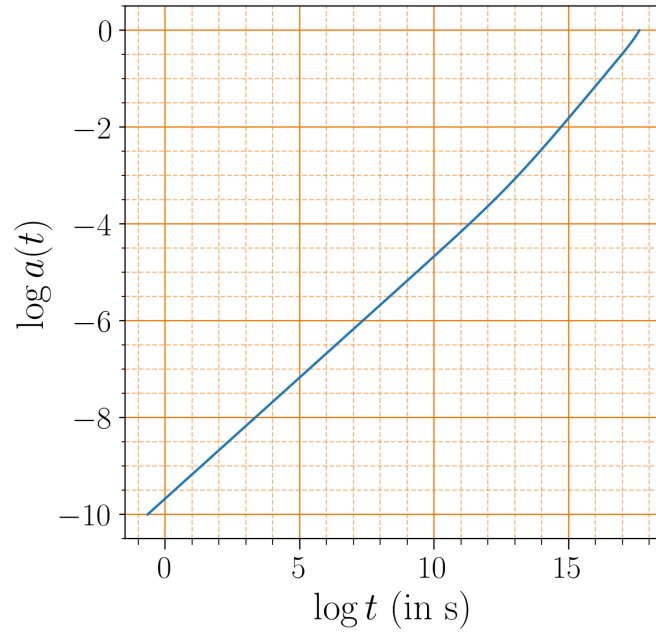
Um PBH com massa de 1×10^{12} kg se forma quando a idade do Universo é cerca de 1×10^{-23} s. Calcula a idade do Universo, t_{20} , quando um PBH de massa 1×10^{20} kg se forma. [6]

(T12.2c) **Espectro observado da radiação de Hawking de PBH:** Considere um PBH de massa inicial 1×10^{10} kg que evapora completamente ao final de sua vida útil τ_{PBH} . Para esta parte, assume, para simplificar, que a maior parte da radiação de Hawking é emitida nesse momento, com uma temperatura correspondente à sua massa inicial. Além disso, considera que o fator de escala do Universo está evoluindo como $a(t) \sim t^{2/3}$.

Calcula o comprimento de onda de pico dessa radiação de Hawking conforme observado na Terra, λ_{earth} , na época atual (em $t = 14$ mil milhões de anos). [5]

(T12.2d) **Radiação cósmica de alta energia de PBH:** Agora assume que a radiação de Hawking emitida em um dado momento t corresponde a fótons emitidos com uma energia $k_B T_{bh}(t)$. Além disso, a temperatura mais alta possível para um buraco negro é a temperatura de Planck, T_{Planck} , onde $k_B T_{Planck} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

A evolução do fator de escala ao longo de escalas de tempo relevantes é dada na figura a seguir. O fator de escala hoje é definido como unidade. $t(s)$ no eixo do tempo representa a idade do universo em segundos.



Se um fóton com uma energia de $E_{\text{det}} = 3,0 \times 10^{20}$ eV for observado na Terra, [10]
determine os maiores e menores valores possíveis da massa inicial do PBH (M_0^{max} e
 M_0^{min} , respectivamente) que poderiam ser responsáveis por este fóton.