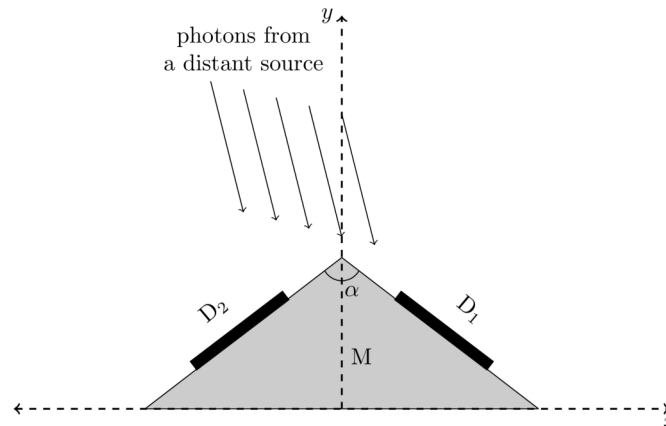


(T01) Misja Daksha
[10 punktów]

"Daksha" to proponowana indyjska misja składająca się z dwóch satelitów S_1 i S_2 krążących wokół Ziemi po tej samej orbicie kołowej o promieniu $r = 7000$ km, ale z różnicą faz 180° . Satelity te obserwują Wszechświat w zakresie wysokich energii (promieniowanie rentgenowskie i gamma). Każdy z satelitów Daksha wykorzystuje kilka płaskich, prostokątnych detektorów.

Aby zrozumieć, jak zlokalizować źródło na niebie, użyjemy uproszczonego modelu misji Daksha. Załóżmy, że S_1 ma tylko dwa identyczne detektory D_1 i D_2 , każdy o powierzchni $A = 0,50$ m², przymocowane do nieprzezroczystego uchwyty M , jak pokazano na poniższym rysunku. Detektory leżą symetrycznie względem osi y w płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny xy i tworzą ze sobą kąt $\alpha = 120^\circ$.



- (T01.1) Obserwując odległe źródło znajdujące się w płaszczyźnie $x-y$, detektor D_1 rejestruje moc $P_1 = 2,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹, a detektor D_2 rejestruje moc $P_2 = 4,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹.

Oszacuj kąt η między wektorem położenia źródła a dodatnią osią y , przy czym kąt przeciwny do [5]
ruchu wskazówek zegara od dodatniej osi y jest uważany za dodatni.

Rozważmy pojedynczy impuls z odległego źródła (niekoniecznie w płaszczyźnie $x-y$) zarejestrowany przez oba satelity (S_1 i S_2) Daksha. Czasy maksimów impulsów zarejestrowanych przez S_1 i S_2 to odpowiednio t_1 i t_2 .

- (T01.2) Przyjmując, że $t_1 - t_2$ zostało zmierzone jako $10,0 \pm 0,1$ ms, oblicz wielkość części powierzchni [5]
sfery niebieskiej f , w którym może znajdować się źródło.

(T02) Makar-Sankranti
[10 punktów]

Święto "Makar-Sankranti" obchodzone jest w Indiach, gdy Słońce wchodzi w pewien region zodiakalnego Koziorożca (Makar = Koziorożec, Sankranti = Wejście). Obecnie obchodzone jest każdego roku około 14 stycznia. Wiele lat temu święto to zbiegało się również z przesileniem zimowym na półkuli północnej, które, jak zakładamy, ma miejsce 21 grudnia.

- (T02.1) Na podstawie powyższych informacji, znajdź rok, y_c , kiedy obchody tego festiwalu ostatnio zbiegły [3]
się z przesileniem zimowym na półkuli północnej.

- (T02.2) Wiedząc, że w Mumbaju dnia 14 stycznia 2006 roku Słońce wchodziło w rejon [3]
Koziorożca o godzinie 11:50:13 czasu lokalnego, oblicz datę, D_{enter} , i lokalny czas, t_{enter} ,
jego wejścia w Koziorożca w roku 2013.

- (T02.3) Festiwal Makar-Sankranti jest obchodzony w danym miejscu w dniu pierwszego zachodu Słońca po [3]
wejściu w region Koziorożca. Można założyć, że lokalny czas zachodu Słońca w Mumbaju w styczniu
to 18:30:00.

Wskaż datę obchodów festiwalu każdego roku między 2006 a 2013 (zaznaczając (✓) odpowiednie pole w tabeli podanej w Arkuszu Odpowiedzi). [4]

(T03) Fale grawitacyjne

[15 punktów]

Orbitujące podwójne czarne dziury generują fale grawitacyjne. Rozważmy dwie czarne dziury w naszej Galaktyce o masach $M = 36 M_{\odot}$ i $m = 29 M_{\odot}$, obiegające się po orbitach kołowych z orbitalną częstością kątową ω wokół ich środka masy.

(T03.1) Zakładając grawitację newtonowską, wyprowadź wzór na częstość kołową, ω_{ini} , orbitowania czarnych dziur w momencie t_{ini} , gdy odległość między czarnymi dziurami wynosiła 4,0 razy suma ich promieni Schwarzschilda, wyrażony tylko w funkcji M , m i stałych fizycznych.

Oblicz wartość ω_{ini} (w rad s^{-1}).

[5]

(T03.2) W ogólnej teorii względności, orbitujące czarne dziury emitują fale grawitacyjne o częstotliwości f_{GW} , takiej że $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. To powoduje kurczenie się orbit czarnych dziur, co z kolei zwiększa f_{GW} . Tempo zmiany f_{GW} wynosi

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

gdzie $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ nazywana jest "masą ćwierku".

Znajdź wartości α , β i δ .

[4]

(T03.3) Załóż, że fale grawitacyjne związane z tym zdarzeniem zostały po raz pierwszy wykryte w czasie $t_{\text{ini}} = 0$. [6]

Wyprowadź wyrażenie na obserwowany czas połączenia czarnych dziur, t_{merge} , gdy f_{GW} staje się bardzo duże, jako funkcję ω_{ini} , M_{chirp} i stałych fizycznych. Oblicz wartość t_{merge} (w sekundach).

(T04) Dekrement Balmera

[15 punktów]

Rozważmy gwiazdę ciągu głównego otoczoną mgławicą. Obserwowana jasność gwiazdy w paśmie V wynosi 11,315 mag. Zjonizowany obszar mgławicy w pobliżu powierzchni gwiazdy emituje linie $H\alpha$ i $H\beta$; ich długości fal wynoszą odpowiednio $0,6563 \mu\text{m}$ i $0,4861 \mu\text{m}$. Teoretycznie przewidywany stosunek strumieni w liniach $H\alpha$ do $H\beta$ wynosi $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2.86$. Jednak gdy to promieniowanie przechodzi przez zewnętrzną część zimnej, pylistej mgławicy, obserwowane strumienie emisji linii $H\alpha$ i $H\beta$ wynoszą odpowiednio $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ i $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

Ekstynkcja A_{λ} jest zależna od długości fali i wyrażona jest jako

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Gdzie $\kappa(\lambda)$ to współczynnik ekstynkcji, a $E(B - V)$ oznacza nadwyżkę barwy w pasmach filtrów B i V. Zależność ekstynkcji od długości fali (λ w μm) jest następująca.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

gdzie $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ to stosunek ekstynkcji całkowitej do selektywnej.

(T04.1) Znajdź wartości $\kappa(H\alpha)$ i $\kappa(H\beta)$. [3]

(T04.2) Znajdź wartość stosunku nadwyżki barwnej $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$. [4]

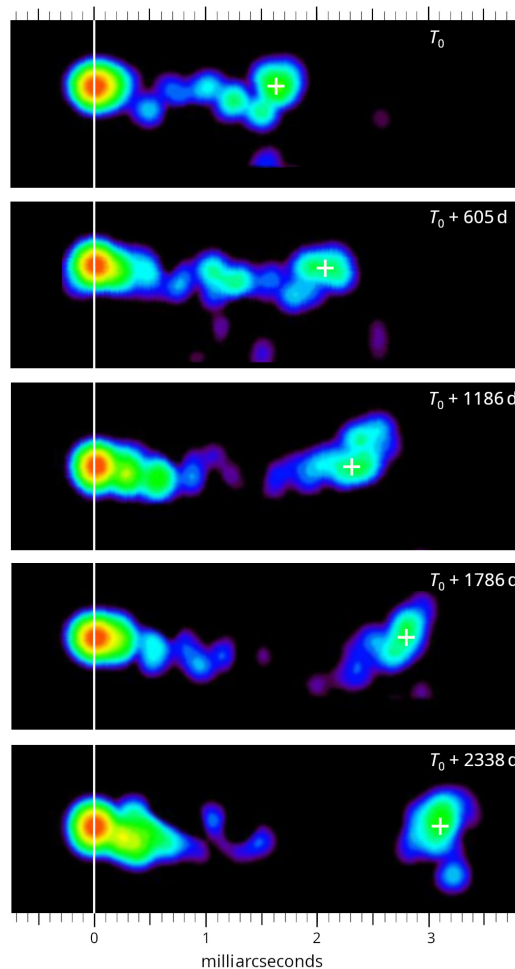
(T04.3) Oszacuj ekstynkcję spowodowaną przez mgławicę, $A_{H\alpha}$ i $A_{H\beta}$, odpowiednio dla długości fal $H\alpha$ i $H\beta$. [6]

(T04.4) Oszacuj wielkość ekstynkcji mgławicy (A_V) oraz wielkość gwiazdową samej gwiazdy w paśmie V, m_{V0} , gdyby mgławicy nie było. [2]

(T05) Kwazary

[20 punktów]

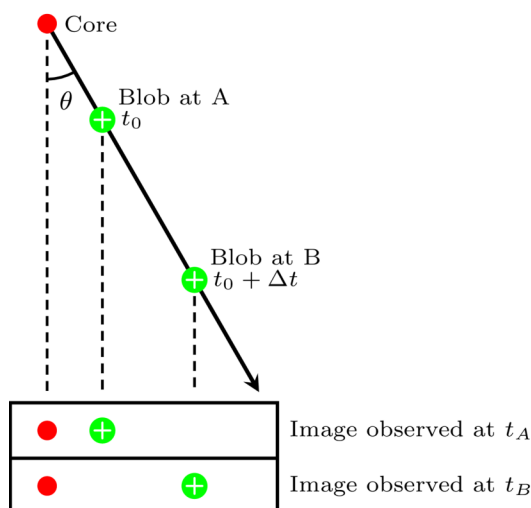
Kwazar to niezwykle jasna aktywna galaktyka zasilana przez supermasywną czarną dziurę, która emituje relatywistyczne dżety. Rysunek przedstawia serię obrazów radiowych kwazara (o przesunięciu ku czerwieni $z = 0.53$ i odległości jasnościowej $D_L = 1,00 \times 10^{10}$ lat świetlnych) w różnych chwilach. "Jądro" jest oznaczone pionową białą linią, podczas gdy dżet, widoczny jako "plamka" (oznaczony +), oddala się od niego. Na każdym panelu podano czas obserwacji (począwszy od T_0 dla pierwszego obrazu), a skala kątowna jest wskazana na górze i dole rysunku.



- (T05.1) Wyznacz odległość kątową plamki od jądra, ϕ_{blob} (w milisekundach łuku), oraz jej odległość [5]
poprzeczną, l_{blob} (w latach świetlnych), od jądra kwazara dla każdej obserwacji. Następnie oblicz
pozorną prędkość plamki w kierunku poprzecznym (v_{app}) jako ułamek prędkości światła, $\beta_{\text{app}} (=$
 $v_{\text{app}}/c)$ używając kolejnych obserwacji. Również oblicz średnią pozorną prędkość $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$.

Dżet kwazara porusza się z prędkością relatywistyczną $v \equiv \beta c$, ale niekoniecznie w płaszczyźnie nieba; np. trajektoria tworzy kąt θ ("kąt obserwacji") względem linii widzenia odległego obserwatora (oznaczonej liniami przerywanymi), jak pokazano na poniższym szkicu.

Dla tej i dla wszystkich kolejnych części zadania zignoruj przesunięcie ku czerwieni kwazara i wszelkie efekty relatywistyczne.



- (T05.2) Światło wyemitowane przez plamkę w dwóch różnych momentach t_0 (odpowiadającym pozycji A) i $t_0 + \Delta t$ (odpowiadającym pozycji B) dociera do obserwatora odpowiednio w momentach t_A i t_B . Zatem obserwowana różnica czasu wynosi $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

- (T05.2a) Znajdź wyrażenie na stosunek $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ w funkcji β i θ . [2]

- (T05.2b) Używając tego stosunku, wyraż β_{app} w funkcji β i θ . [2]

- (T05.3) Ruch nazywany jest nadświetlnym, jeśli jego pozorna prędkość przekracza prędkość światła ($\beta_{\text{app}} > 1$), a podświetlnym, jeśli jej nie przekracza ($\beta_{\text{app}} < 1$).

- (T05.3a) Dla $\beta_{\text{app}} = 1$, narysuj gładką krzywą β jako funkcję od θ , aby oznaczyć granicę między [4]
ruchem podświetlnym i nadświetlnym. Zacieniuj obszar nadświetlny na wykresie
ukośnymi liniami (///).

- (T05.3b) Znajdź najniższą rzeczywistą prędkość dżetu ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$), przy której może [2]
wystąpić ruch nadświetlny, a także odpowiadający jej kąt obserwacji θ_{low} .

- (T05.4) Znajdź wyrażenie na maksymalny kąt obserwacji, θ_{max} , dla którego dana wartość β_{app} będzie [2]
możliwa.

Jądro kwazara, jego centralny obiekt zwarty, wykazuje zmienność emisji spowodowaną wewnętrznymi procesami. Procesy te przebiegają w obszarze o rozmiarach ograniczonych przez możliwość zachodzenia w nim związków przyczynowo-skutkowych. Rozmiar (= promień) tego obszaru jest zazwyczaj przyjmowany jako około pięciokrotność promienia Schwarzschilda jądra.

- (T05.5) Stwierdzono, że jądro pewnego kwazara zmienia się w skali czasowej około 1 godziny. Wyznacz [3]
górną granicę, $\dot{M}_{c, \text{max}}$, masy centralnego obiektu zwartego, w jednostkach masy Słońca.

(T06) Rotacja Galaktyki

[20 punktów]

Krzywą rotacji naszej Galaktyki bada się za pomocą pomiarów prędkości radialnych dla obłoków neutralnego wodoru (HI) obserwowanych w pasmie 21 cm. Wyznaczana się ich prędkość radialną wzdłuż linii widzenia dla poszczególnych długości galaktycznych. Rozważmy obłok HI o długości galaktycznej l , znajdujący się w odległości R od Centrum Galaktyki (GC) i w odległości D od Słońca. Przyjmijmy, że Słońce znajduje się w odległości $R_0 = 8,5$ kpc od GC. Załóżmy, że zarówno Słońce, jak i obłok HI poruszają się po orbitach kołowych wokół GC w płaszczyźnie Galaktyki, z prędkościami kątowymi odpowiednio Ω_0 i Ω , oraz prędkościami rotacji V_0 i V .

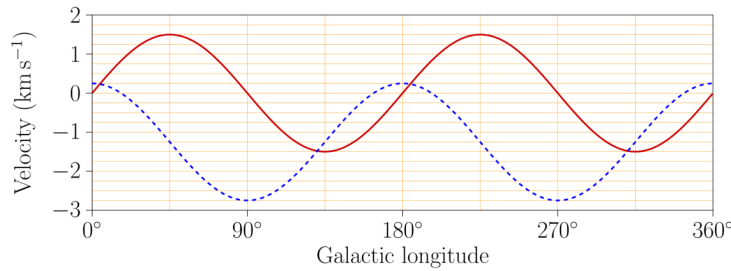
Składowe prędkości radialnej (V_r) i prędkości poprzecznej (V_t) obłoku, obserwowane ze Słońca, można wyrazić jako

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Patrząc z Północnego Bieguna Galaktycznego, rotacja Galaktyki odbywa się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. W całym tym zadaniu będziemy przyjmować, że prędkość radialna jest dodatnia, gdy obiekt się oddala, a obłoki wodoru będą traktowane jako obiekty punktowe.

- (T06.1) W arkuszu zbiorczym odpowiedzi naszkicuj wykres zależności V_r od odległości D , w zakresie od $D = 0$ do $D = 2R_0$ dla dwóch linii widzenia zdefiniowanych przez (i) $l = 45^\circ$ i (ii) $l = 135^\circ$. Oznacz każdą z twoich krzywych jej wartością l . [5]
- (T06.2) Poniższy wykres przedstawia średnie składowe prędkości gwiazd: radialną (ciągła, czerwona krzywa) i poprzeczną (przerywana, niebieska krzywa) w odległości 100 pc od Słońca, przedstawione w funkcji długości galaktycznej.



Korzystając z wykresu, oszacuj okres orbitalny Słońca (P) wokół centrum Galaktyki (GC) w milionach lat (Myr). [3]

- (T06.3) Na podstawie obserwacji Jan Oort zauważył, że w sąsiedztwie Słońca ($D \ll R_0$), różnica w prędkościach kątowych ($\Omega - \Omega_0$) będzie mała, i dlatego wyprowadził następujące przybliżenie pierwszego rzędu dla składowych prędkości radialnej i poprzecznej:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

gdzie A i B są znane jako stałe Oorta.

Rozważmy dwa przypadki:

(I) rzeczywistą obserwowaną krzywą rotacji Galaktyki, oraz

(II) krzywą rotacji dla hipotetycznego scenariusza, w którym Galaktyka jest pozbawiona ciemnej materii, a cała masa Galaktyki jest skupiona w jej centrum.

- (T06.3a) Wyprowadź wyrażenia dla gradientu radialnego prędkości rotacyjnej w miejscu położenia Słońca, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$, dla tych dwóch przypadków. [2]

- (T06.3b) Wyraż A i B za pomocą V_0 , R_0 oraz gradientu radialnego prędkości rotacyjnej w miejscu położenia Słońca, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$. [8]

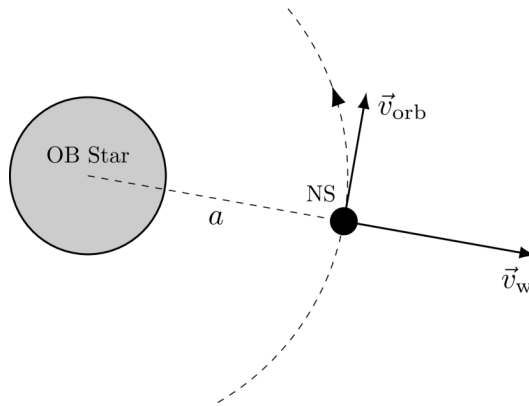
- (T06.3c) Stosunek (A/B) stałych Oorta dla dwóch podanych przypadków, (I) i (II), jest [2] zdefiniowany jako F_I i F_{II} , odpowiednio. Wyznacz F_I i F_{II} .

(T07) Układ podwójny z gwiazdą neutronową

[20 punktów]

W układzie podwójnym składnika zwartego z gwiazdą, która nie przelewa się przez swoją powierzchnię Roche'a, głównym źródłem akrecji dla zwartej gwiazdy jest wiatr gwiazdowy od gwiazdy towarzyszącej. Taka akrecja z wiatru jest szczególnie istotna w układach, które obejmują gwiazdę wczesnego typu (taką jak gwiazda typu O lub B, dalej oznaczana jako gwiazda OB), wraz ze zwartym obiektem, takim jak gwiazda neutronowa (NS) na ciasnej orbicie.

Rozważmy układ podwójny gwiazd NS-OB, gdzie gwiazda neutronowa o masie $M_{NS} = 2,0 M_{\odot}$ i promieniu $R_{NS} = 11$ km krąży po orbicie kołowej o promieniu a wokół centrum gwiazdy OB z prędkością $v_{orb} = 1,5 \times 10^5$ m s⁻¹ (patrz rysunek poniżej). W całym tym zadaniu zakłada się, że utrata masy z gwiazdy OB jest sferycznie symetryczna, a jej tempo wynosi $\dot{M}_{OB} = 1,0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$.



- (T07.1) Promień akrecji, R_{acc} , jest zdefiniowany jako maksymalna odległość od NS, dla której wiatr gwiazdowy może zostać przechwycony przez NS. Przyjmij, że prędkość wiatru gwiazdowego w odległości orbitalnej NS wynosi $v_w = 3,0 \times 10^6$ m s⁻¹ i znajdź R_{acc} dla powyższego układu w km, używając standardowego wyrażenia na prędkość ucieczki. [3]
- (T07.2) Zakładając, że cały przechwycony materiał opada na NS, oszacuj tempo akrecji masy, $\dot{M}_{acc}$, z wiatru gwiazdowego w jednostkach $M_{\odot} \text{yr}^{-1}$, jeśli $a = 0,5$ au. Zaniedbaj wpływ ciśnienia promieniowania i skończonego czasu chłodzenia akreującego gazu. [3]
- (T07.3) Rozważmy teraz sytuację, w której prędkość wiatru gwiazdowego w odległości orbitalnej a (blisko NS) staje się porównywalna z prędkością orbitalną NS. W takim przypadku tempo akrecji masy z wiatru gwiazdowego na NS będzie dane wyrażeniem w postaci $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$, gdzie $q = M_{NS}/M_{OB}$ jest stosunkiem mas składników układu podwójnego, a β to kąt w układzie odniesienia NS między kierunkiem prędkości wiatru a kierunkiem radialnym od gwiazdy OB. Wyprowadź wyrażenie dla $f(\tan \beta, q)$ zakładając, że $M_{OB} \gg M_{NS}$. [6]
- (T07.4) Rozważmy całkowicie zjonizowaną materię akreującą radialnie, która jest hamowana z powodu silnego pola magnetycznego $\vec{B}$ gwiazdy NS. Efekt ten można modelować jako ciśnienie o wartości $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Załóżmy, że NS ma dipolowe pole magnetyczne, którego wartość w płaszczyźnie równikowej zmienia się z odległością r od NS dla $r \gg R_{NS}$ jak

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{NS}}{r} \right)^3$$

gdzie B_0 jest polem magnetycznym na równiku NS. Załóżmy, że oś dipola magnetycznego jest zgodna z osią obrotu NS.

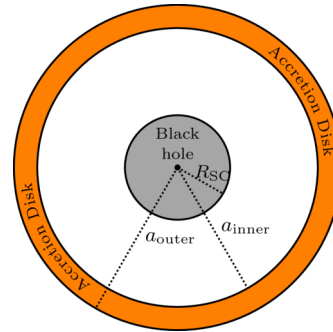
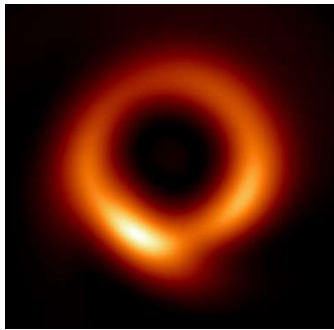
- (T07.4a) Jakie będzie ciśnienie magnetyczne, $P_{\text{eq, mag}}$, w płaszczyźnie równikowej w zależności od B_0 , R_{NS} , r i innych odpowiednich stałych? [1]
- (T07.4b) Maksymalna odległość, na której przepływ akrecji jest zatrzymywany przez pole magnetyczne w płaszczyźnie równika, nazywana jest promieniem magnetosferycznym R_m . Przepływ materii wywiera ciśnienie z powodu względnego ruchu między nadchodzącym wiatrem gwiazdowym a NS. Podaj przybliżone wyrażenie dla krytycznego pola magnetycznego $B_{0, c}$, dla którego R_m pokrywa się z R_{acc} i oblicz jego wartość w Teslach. Efekty magnetyczne są pomijane dla $r > R_m$ i rozważ $v_w \gg v_{\text{orb}}$. [7]

(T08) Cień Czarnej Dziury

[20 punktów]

Teleskop Event Horizon Telescope (EHT) uzyskał zdjęcie supermasywnej czarnej dziury, znajdującej się w centrum galaktyki M87, jak pokazano na lewym panelu poniższego rysunku.

Aby zrozumieć niektóre proste cechy tego obrazu, rozważymy uproszczony model nierotującej, statycznej, sferycznie symetrycznej czarnej dziury o masie $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$, otoczonej bezmasowym, ciekim, płaskim dyskiem akrecyjnym o promieniach wewnętrznym i zewnętrznym, odpowiednio $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ i $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, gdzie R_{SC} to promień Schwarzschilda. Widok z góry przedstawiono na prawym panelu poniższego rysunku (rysunek nie jest w skali).



Zakładamy, że dysk akrecyjny jest jedynym źródłem światła, które należy uwzględnić. Każdy punkt na dysku emituje światło we wszystkich kierunkach. To światło porusza się w polu grawitacyjnym czarnej dziury. Trajektorie promieni świetlnych jest określona przez dwa poniższe równania (które są podobne do równań ruchu stosowanych dla obiektów w pobliżu Słońca):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

gdzie $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ to współrzędna radialna, $\phi \in [0, 2\pi)$ to kąt azymutalny, a E i L są stałymi związanymi odpowiednio z zachowaną energią i zachowanym momentem pędu.

Niech $v_r \equiv dr/dt$ oznacza wartość prędkości radialnej, v_ϕ to wartość prędkości stycznej, a $\omega \equiv d\phi/dt$ to prędkość kątowna. Definiujemy parametr zderzenia b dla trajektorii jako $b = L/\sqrt{2E}$. Dylatację czasu w tym zadaniu pomijamy.

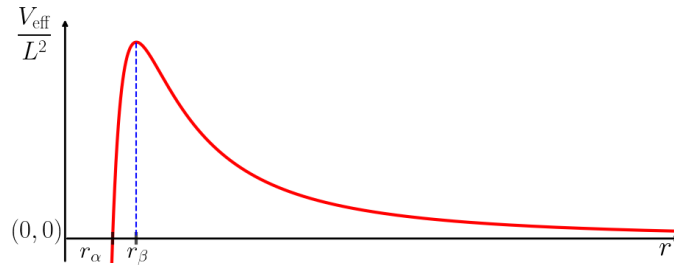
Inne przydatne równanie otrzymujemy przez zróżniczkowanie pierwszego równania:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

- (T08.1) Wokół czarnej dziury mogą istnieć kołowe trajektorie światła. Znajdź promień, r_{ph} , i parametr zderzenia, b_{ph} , dla takich trajektorii fotonów w funkcji M i odpowiednich stałych. [4]

(T08.2) Oblicz czas, T_{ph} , potrzebny do wykonania przez światło pełnego obiegu po kołowej orbicie, [2]
wyrażony w sekundach.

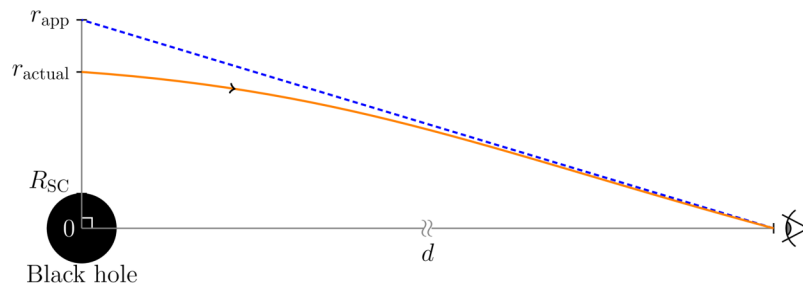
(T08.3) Powyższe równanie dla prędkości radialnej (pierwsze równanie w tym pytaniu) można porównać do równania postaci $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$. Poniżej przedstawiono schematyczny wykres V_{eff}/L^2 jako funkcji r .



(T08.3a) Na wykresie można zidentyfikować dwie charakterystyczne wartości dla promienia, r_α [2]
i r_β . Wyznacz r_α i r_β w funkcji M i odpowiednich stałych.

(T08.3b) Foton poruszający się z dysku akrecyjnego do centrum w kierunku czarnej dziury [3]
może w niektórych przypadkach nadal uciec w nieskończoność. Wyprowadź wzór na najmniejszą wartość promienia punktu zwrotnego, r_t , dla takiego fotonu, w funkcji M i odpowiednich stałych. Znajdź wyrażenie na minimalną wartość parametru zderzenia, b_{min} , dla tego fotonu.

(T08.4) Jak pokazano poniżej, promień światła wychodzący z punktu w płaszczyźnie nieba i oddległego od środka układu o r_{actual} ulegnie silnemu zakrzywieniu z powodu grawitacji czarnej dziury i ostatecznie dotrze do obserwatora (oznaczonego okiem) znajdującego się w dużej odległości d od układu,

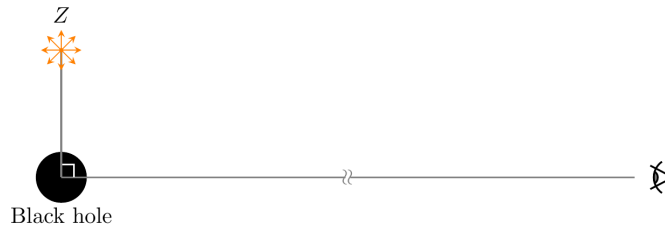


Dla tego obserwatora promień wydaje się pochodzić z innego punktu leżącego w płaszczyźnie nieba i znajdującego się w odległości $r_{app} \approx b$ od środka czarnej dziury, gdzie b jest parametrem zderzenia dla tej trajektorii fotonu. Dla punktów na dysku akrecyjnym przy $r = r_{actual}$, można założyć następującą relację:

$$b(r_{actual}) \approx r_{actual} (1 + R_{SC}/r_{actual})^{1/2}$$

Dla oddległego obserwatora, takiego jak my, z widokiem dysku akrecyjnego na wprost, obraz [5]
układu będzie wydawał się kołowo symetryczny w płaszczyźnie nieba. Wyznacz zewnętrzny i wewnętrzny pozorny promień, r_{outer} oraz r_{inner} , obrazu w jednostkach au .

(T08.5) Rozważmy izolowaną supermasywną czarną dziurę o masie $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$ bez dysku akrecyjnego. Krótki (5 sekundowy), silny wybuch promieniowania elektromagnetycznego następuje w punkcie Z oddległym o $r_Z = 6R_{SC}$ od czarnej dziury, jak pokazano na rysunku. Wybuch emituje światło we wszystkich kierunkach. Obserwator znajdujący się w punkcie oddległym od czarnej dziury (oznaczony na rysunku poniżej symbolem oka) wykonuje długą ekspozycję obrazu obszaru wokół czarnej dziury przez 60 s.



Wybierz poprawną odpowiedź dla każdego z poniższych stwierdzeń:

- (T08.5a) Liczba możliwych trajektorii, którymi światło może przemieszczać się od Z do obserwatora to [2]
(A) Co najwyżej jedna, (B) Dokładnie jedna, (C) Dokładnie dwie, (D) Więcej niż dwie.
- (T08.5b) Liczba obrazów rozbłysku promieniowania w punkcie Z, które będą widoczne na zdjęciu z długim czasem naświetlania to: [2]
(A) Co najwyżej jeden, (B) Dokładnie jeden, (C) Dokładnie dwa, (D) Więcej niż dwa.

(T09) Seeing atmosferyczny

[35 punktów]

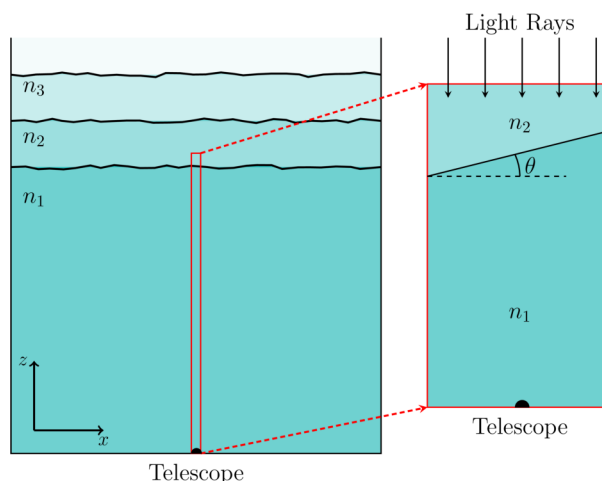
Teleskop z wypukłą, achromatyczną soczewką obiektywu o średnicy $D = 15$ cm i ogniskowej $f = 200$ cm jest skierowany na gwiazdę w zenicie.

- (T09.1) Wyznacz średnicę (w m), d_{image} , obrazu punktowego źródła, jaką tworzy soczewka obiektywu w swojej płaszczyźnie ogniskowej dla światła zielonego ($\lambda = 550$ nm), uwzględniając jedynie efekty dyfrakcji. [1]

Na obraz źródła astronomicznego ma wpływ tak zwany „seeing atmosferyczny”.

Granice między warstwami w atmosferze, jak również współczynniki załamania tych warstw, zmieniają się ciągle z powodu turbulencji, zmian temperatury i innych czynników. Prowadzi to do drobnych zmian w położeniu obrazu w płaszczyźnie ogniskowej teleskopu, znanych jako „efekt migotania”. W dalszej części zadania żadne efekty interferencyjne, poza użyciem ograniczonego dyfrakcją rozmiaru obrazu gwiazdy (jak użyto powyżej), nie będą brane pod uwagę.

Lewy panel poniższego rysunku pokazuje pionowy przekrój atmosfery z wieloma warstwami o różnych współczynnikach załamania ($n_1, n_2, n_3, \dots$). Prawy panel pokazuje powiększony widok cienkiego pionowego segmentu atmosfery i granicę między dwiema najniższymi warstwami atmosferycznymi o współczynnikach załamania n_1 i n_2 ($n_1 > n_2$). Rozważamy w tym zadaniu tylko te dwie warstwy i ich granicę. Diagramy nie są w skali.

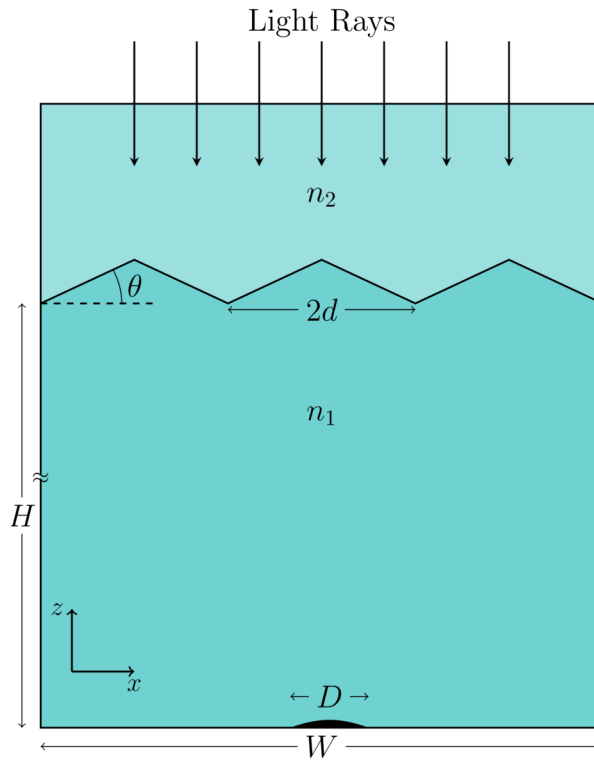


- (T09.2) Załóżmy, że granica między dwiema warstwami leży na wysokości $H = 1$ km bezpośrednio nad obiektywem teleskopu, i jest nachylona pod kątem $\theta = 30^\circ$ względem płaszczyzny poziomej. We wszystkich częściach tego zadania θ jest przyjmowane jako dodatnie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Dla monochromatycznego źródła światła, $n_1 = 1.00027$ i $n_2 = 1.00026$. Niech kątowe przesunięcie obrazu w płaszczyźnie ogniskowej teleskopu dla gwiazdy w zenicie będzie oznaczona jako α .
- (T09.2a) Naskicuj diagram przedstawiający przejście promienia przez granicę warstw i opisz go odpowiednimi oznaczeniami n_1, n_2, θ i α . [2]
- (T09.2b) Znajdź wyrażenie dla α w zależności od θ, n_1 i n_2 . Użyj przybliżeń dla małych kątów: $\sin \alpha \approx \alpha$ i $\cos \alpha \approx 1$. [2]
- (T09.2c) Oblicz przesunięcie, Δx_θ (w m), w pozycji obrazu, jeśli θ wzrasta o 1% (utrzymując n_1 i n_2 stałe). [3]
- (T09.2d) Oblicz przesunięcie, Δx_n (w m), w pozycji obrazu, jeśli n_2 wzrasta o 0.0001% (utrzymując n_1 i θ stałe). [3]
- (T09.3) Dla białego światła pochodzącego z gwiazdy w zenicie, wybierz, który z poniższych opisów obrazu poprawnie opisuje jego kształt i kolor, zaznacz znakiem ($\checkmark$) odpowiednie pole (tylko jedno) w arkuszu odpowiedzi. Zauważ, że x zwiększa się od lewej do prawej na rysunku. [2]

	Kolor obrazu	Kształt obrazu	Lewa krawędź	Prawa krawędź
A	Biały	Okragły		
B	Biały	Eliptyczny		
C	Kolorowy	Okragły	Niebieski	Czerwony
D	Kolorowy	Okragły	Czerwony	Niebieski
E	Kolorowy	Eliptyczny	Niebieski	Czerwony
F	Kolorowy	Eliptyczny	Czerwony	Niebieski

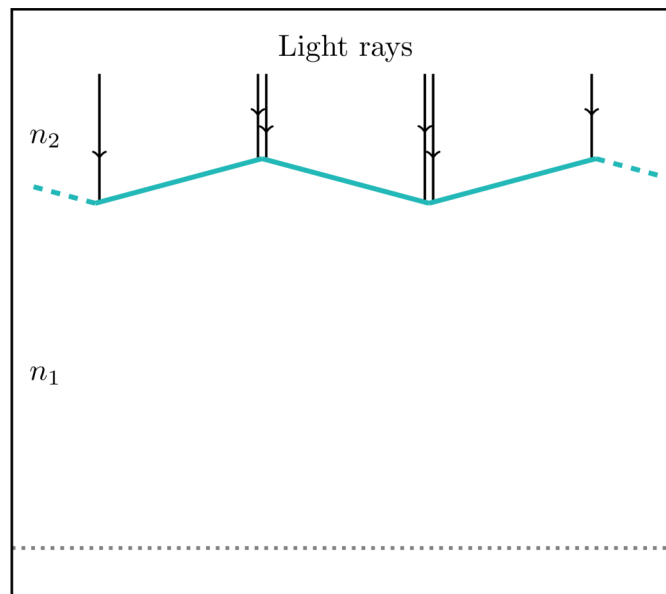
Dla wszystkich pozostałych części tego pytania rozważamy monochromatyczne zielone światło o $\lambda = 550$ nm. Modelujemy granicę między warstwami jako zbiór nieskończonych zygzakowatych płaszczyzn (prostopadłych do płaszczyzny rysunku) Odległości granic to $d = 10$ cm wzdłuż osi x , a nachylenie wynosi $\theta = 10^\circ$ lub $\theta = -10^\circ$.

Poniższy rysunek (nie w skali) pokazuje przekrój tego modelu atmosfery o szerokości W ($W \ll H$). Dla teleskopów z dużą aperturą ta zygzakowata natura granicy skutkuje powstawaniem plamek w płaszczyźnie ogniskowej.



(T09.4) Rozważ model atmosfery taki jak powyżej.

(T09.4a) Na poniższym diagramie (nie w skali) jest przedstawiona sekcja atmosfery z kolejnymi zygzakowatymi płaszczyznami, z tymi samymi parametrami jak podano powyżej.



Na diagramie w arkuszu odpowiedzi, narysuj ścieżki promieni światła docierającego do płaszczyzny, gdzie umieszczony jest obiektyw teleskopu, (pokazanej przez szarą przerywaną linię).

Zaznacz obszar(y), jeśli taki(e) istnieje(ją), na diagramie literą „X”, gdzie żadne [4]
promienie światła nie dotrą.

(T09.4b) Oblicz szerokość W_X takiego(ich) obszaru(ów).

[3]

(T09.4c) Znajdź największą średnicę, $D_{\max}$, obiektywu teleskopu, z którą możliwe będzie uzyskanie pojedynczego obrazu gwiazdy, odpowiednio wybierając lokalizację teleskopu względem struktury granicy. [4]

(T09.5) Rozważ przypadek, gdy kształt zygzakowaty granicy jest przyjmowany w obu kierunkach x i y (jak pole piramid), oraz $D = 100$ cm (z $f = 200$ cm). [6]

Narysuj jakościowy układ powstałych plamek w polu podanym w arkuszu odpowiedzi.

(T09.6) Dla turbulentnej atmosfery ponownie rozważ ten sam równolegle biegnący zygzakowaty kształt warstwy granicznej tylko wzdłuż kierunku x , ale teraz kąt między dwoma płaszczyznami zmienia się w jednolitym tempie od 10° do -10° w ciągu 1,0 s. Załóż, że prowadzi to do jednolitego tempa przesunięcia pozycji obrazu. [5]

Mamy teleskop o $D = 8$ cm i $f = 1$ m. Oszacuj najdłuższy czas ekspozycji $t_{\max}$ dozwolony dla jego kamery CCD, aby uzyskać tylko jeden obraz, aby wszelkie możliwe odchylenia w jego pozycji pozostawały mniejsze niż 1% dyfrakcyjnej średnicy obrazu.

(T10) Nukleosynteza Wielkiego Wybuchu

[35 punktów]

Podczas ery dominacji promieniowania we wczesnym Wszechświecie, czynnik skali Wszechświata $a \propto t^{1/2}$, gdzie t to czas od Wielkiego Wybuchu. Przez większość tej ery neutrony (n) i protony (p) pozostają w równowadze termicznej ze sobą poprzez oddziaływania słabe. Gęstość liczbowa (N) wolnych neutronów lub protonów jest związana z temperaturą T i ich odpowiednimi masami m w taki sposób, że

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

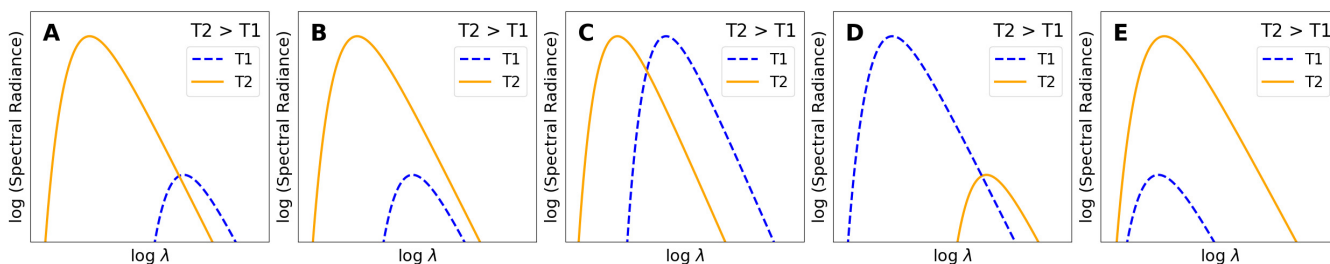
dla czasów $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70$ s, kiedy $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. Po t_{wk} oddziaływania słabe nie mogą już utrzymać takiej równowagi, a wolne neutrony rozpadają się do protonów z czasem połowicznego rozpadu wynoszącym 610,4 s.

(T10.1) Niech gęstość liczbowa protonów wynosi N_p , a neutronów N_n . Oblicz względną gęstość liczbową neutronów daną przez stosunek $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ w momencie t_{wk} . [4]

(T10.2) Fotony znajdują się w równowadze termicznej i zachowują widmo ciała doskonale czarnego w każdej chwili.

(T10.2a) Znajdź wykładnik β , taki że $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Wskaż, który z poniższych wykresów pokazuje prawidłowe zachowanie widmowej gęstości energii dla dwóch temperatur T_1 i T_2 . Zaznacz (✓) prawidłową opcję w zbiorczym arkuszu odpowiedzi. [2]

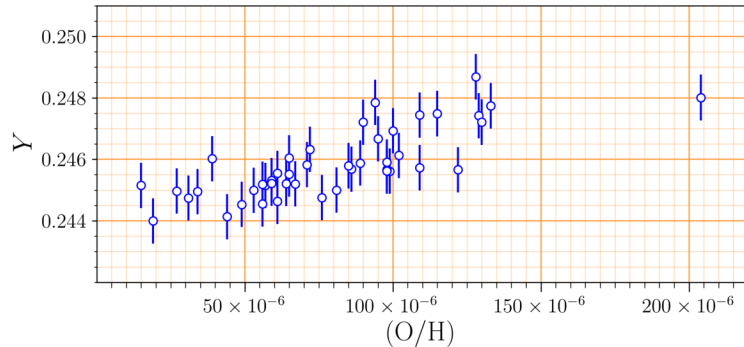


- (T10.3) Po t_{wk} proces formowania deuteru z protonów i neutronów jest opisywany równaniem Sahy, podanym przez indyjskiego fizyka prof. Meghnada Sałę, które można uprościć do

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n) c^2}{k_B T} \right).$$

Tutaj stosunek barionów do fotonów η wynosi 6.1×10^{-10} , a N_D to gęstość liczbowa deuteru.

- (T10.3a) Narysuj stosunek N_D/N_n na wykresie logarytmicznym w zbiorczym arkuszu odpowiedzi dla co najmniej 4 rozsądnie rozłożonych wartości temperatury, które mieszczą się w zakresie $k_B T = [60, 70]$ keV, i narysuj gładką krzywą przechodzącą przez te punkty. [5]
- (T10.3b) Z wykresu odczytaj $k_B T_{\text{nuc}}$ (w keV), gdy $N_D = N_n$. [1]
- (T10.3c) Zamiast tego, załóż teraz, że wszystkie wolne neutrony łączą się natychmiastowo z protonami przy $k_B T_{\text{nuc}}$, tworząc deuter, który natychmiast zostaje przekształcony w hel (${}^4_2\text{He}$). Oblicz odpowiadającą epokę lub czas nukleosyntezy, t_{nuc} (w s), dla formowania się helu. [4]
- (T10.4) Oblicz wartość $X_{n, \text{nuc}}$ bezpośrednio przed t_{nuc} . [5]
- (T10.5) Pierwotna obfitość helu, Y_{prim} , jest zdefiniowana jako ułamek całkowitej masy barionowej we Wszechświecie, która jest związana w helu tuż po t_{nuc} . Wyprowadź teoretyczne oszacowanie wartości Y_{prim} . Wyłącznie na potrzeby tego obliczenia załóż, że $m_p \approx m_n$ oraz że masa helu, $m_{\text{He}} \approx 4m_n$. [3]
- (T10.6) Pierwotną obfitość helu jest bardzo trudno zmierzyć, ponieważ gwiazdy nieustannie przekształcają wodór w hel we Wszechświecie. Część przetwarzaną przez gwiazdy w galaktyce opisuje się względną gęstością liczbową tlenu (który jest produkowany tylko przez gwiazdy) do wodoru, oznaczoną jako (O/H), w galaktyce. Poniżej przedstawiono zestawienie pomiarów (O/H) i obfitości helu, Y , dla różnych galaktyk.



Użyj wszystkich punktów z tego wykresu (który jest skopiowany do zbiorczego arkusza odpowiedzi) przy odpowiedzi na następujące pytania.

- (T10.6a) Oszacuj Y dla niebieskiej karłowatej galaktyki zwartej o wartości (O/H) = 1.75×10^{-4} . [2]
- (T10.6b) Wyznacz nachylenie $dY/d(\text{O}/\text{H})$ prostej dopasowanej do powyższych danych. [2]
- (T10.6c) Oszacuj pierwotną obfitość helu, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, na podstawie powyższych obserwacji. [2]
- (T10.7) Odchylenie między Y_{prim} a $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ można pogodzić, zmieniając stosunek barionów do fotonów η . [3]
Dla zmniejszonego η , jak wskazano przez $\downarrow$ w zbiorczym arkuszu odpowiedzi, wskaż wzrost ($\uparrow$) lub spadek ($\downarrow$) dla $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (gdy $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$ i Y_{prim} w polach przewidzianych w zbiorczym arkuszu odpowiedzi.

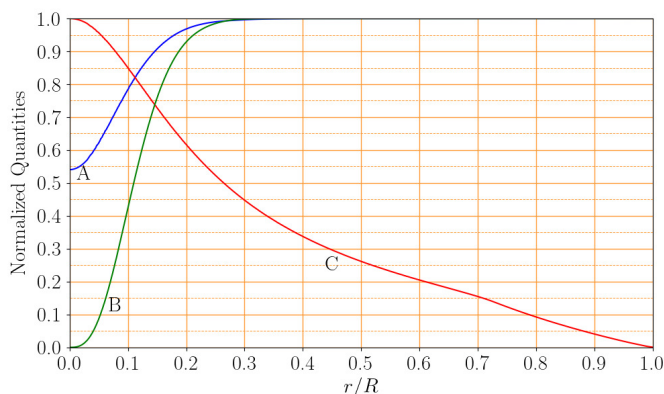
(T11) Gwiazdne wykresy
[50 punktów]

Gwiazdę można dobrze przybliżyć obiektem sferycznie symetrycznym, dlatego odległość radialna r od centrum może być wybrana jako jedyna niezależna zmienna w modelowaniu wnętrza gwiazd. Masa zawarta w kuli o promieniu r jest oznaczana jako $m(r)$. Jasność $l(r)$ jest definiowana jako energia (netto) przepływająca na zewnątrz przez sferyczną powierzchnię o promieniu r na jednostkę czasu. Inne interesujące wielkości, na przykład gęstość $\rho(r)$, temperatura $T(r)$, względne masowe zawartości wodoru $X(r)$ i helu $Y(r)$, oraz energia jądrowa generowana na jednostkę masy na jednostkę czasu $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, są traktowane jako funkcje r . W całym tym zadaniu pomijamy efekty dyfuzji i opadania grawitacyjnego pierwiastków ku wnętrzu gwiazdy.

Symbol "log" odnosi się do logarytmu o podstawie 10. Zadanie składa się z trzech niezależnych części.

(T11.1) Część 1: Wewnątrz gwiazdy

Wykres poniżej przedstawia zmienność trzech wielkości strukturalnych, A, B i C, jako funkcje promienia ułamkowego r/R w modelu gwiazdy o masie $1 M_{\odot}$ i wieku 4 miliardów lat (Gyr), gdzie R jest promieniem fotosferycznym gwiazdy. Wartości względnej zawartości masowej helu na powierzchni (fotosferycznej), Y_s , oraz metaliczności (względna zawartość wszystkich pierwiastków cięższych niż hel) na powierzchni, Z_s , gwiazdy przyjmują wartości: $(Y_s, Z_s) = (0.28, 0.02)$. Wszystkie wielkości pokazane na wykresach są znormalizowane przez ich odpowiednie wartości maksymalne.



(T11.1a) Zidentyfikuj trzy wielkości A, B i C spośród pięciu możliwości:

[6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Zapisz A/B/C w polach obok odpowiednich wielkości w zbiorczym arkuszu odpowiedzi. Nie jest potrzebne uzasadnienie odpowiedzi.)

(T11.1b) Jaka jest względna zawartość masowa helu w centrum, Y_c , gwiazdy?

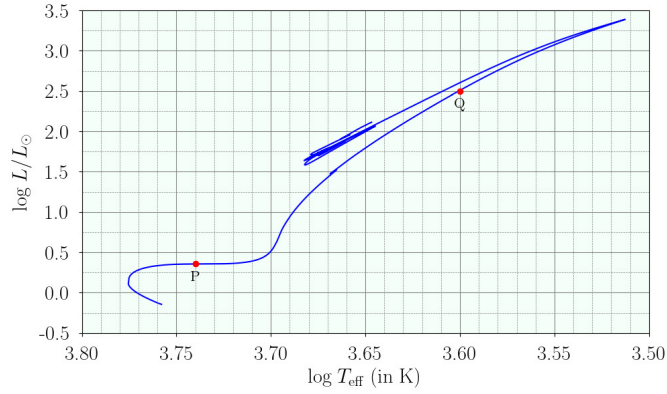
[3]

(T11.1c) Dorzysuj pozostałe dwie wielkości z listy pięciu (które nie zostały zidentyfikowane jako krzywe A, B lub C) podanych w (T11.1a), jako funkcje r/R na tym samym wykresie w zbiorczym arkuszu odpowiedzi i oznacz je odpowiednimi wielkościami.

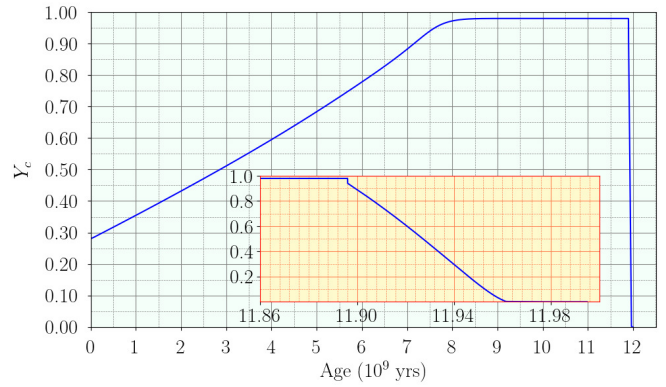
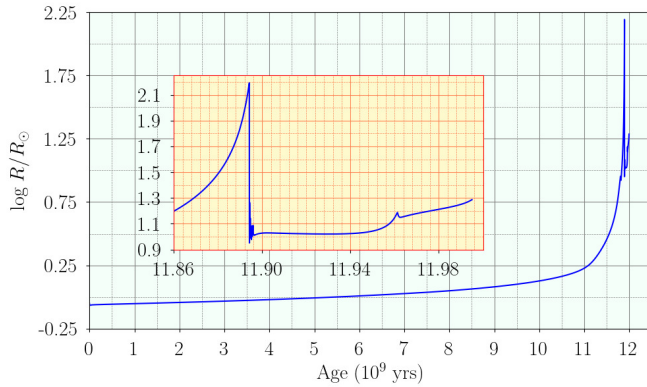
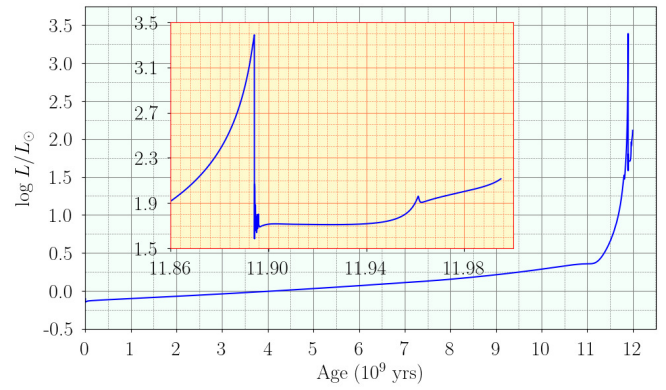
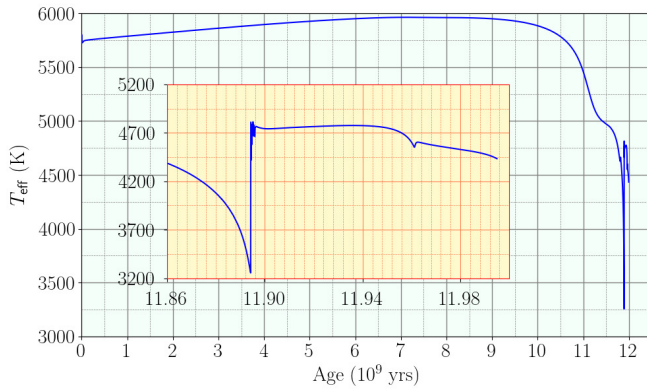
[5]
(T11.2) Część 2: Ewolucja gwiazd

Rozważ ewolucję gwiazdy o masie $1 M_{\odot}$, której początkowy jednolity skład określony jest przez względną obfitość helu, $Y_0 = 0.28$, i metali, $Z_0 = 0.02$. Poniższe rysunki pokazują zmiany różnych globalnych wielkości tej gwiazdy w miarę jej ewolucji od ZAMS (Ciąg główny wieku zerowego) do końca spalania helu w jej jądrze.

Wykres poniżej pokazuje ścieżkę ewolucyjną gwiazdy na diagramie H-R (wykres $\log L/L_{\odot}$ w zależności od $\log T_{\text{eff}}$, gdzie L to jasność powierzchniowa, a T_{eff} to temperatura efektywna).



Rysunek poniżej zawiera cztery wykresy, które pokazują zmiany T_{eff} (w K), L (wykres $\log L/L_{\odot}$), R (wykres $\log R/R_{\odot}$) oraz Y_c w zależności od wieku (w 10^9 lat) dla tej samej gwiazdy. W każdym z tych czterech wykresów, dla większej przejrzystości, umieszczono wstawki pokazujące szczegółowe zmiany odpowiednich wielkości w przedziale wiekowym od $11,86 \times 10^9$ lat do $12,00 \times 10^9$ lat.



Użyj tych wykresów, aby odpowiedzieć na poniższe pytania.

- (T11.2a) Jaki jest przybliżony czas życia gwiazdy na ciągu głównym, t_{MS} (w latach), gwiazdy? [1]
- (T11.2b) Jaki jest przybliżony czas trwania okresu, Δt_{He} (w latach), podczas którego gwiazda spala hel w swoim jądrze? [1]
- (T11.2c) Jaka część, f_{H} , początkowej ilości wodoru w jej centrum została spalona, gdy jasność gwiazdy wynosi $1 L_{\odot}$? [3]
- (T11.2d) Jaki jest promień gwiazdy, R_1 (w jednostkach $R_{\odot}$), gdy 60% początkowej ilości wodoru w jej centrum zostało spalane? [3]
- (T11.2e) Jakie są promienie gwiazdy, R_P i R_Q (w jednostkach $R_{\odot}$), odpowiadające jej pozycjom P i Q, zaznaczonym na diagramie HR? [4]

(T11.3) **Część 3: Rozkład masy wewnątrz gwiazdy**

Równanie opisujące rozkład masy wewnątrz gwiazdy jest dane przez

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Wygodnie byłoby wyrazić to równanie w funkcji trzech bezwymiarowych zmiennych, mianowicie, ułamkowej masy, q , ułamkowego promienia, x , oraz względnej gęstości, σ , które definiujemy jako

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

gdzie M i R są całkowitą masą i promieniem gwiazdy, odpowiednio, a $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ jest średnią gęstością gwiazdy. Dla konkretnej gwiazdy, którą będziemy rozważać w tej części, podane są następujące informacje:

- Gęstość centralna $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$
- Połowa masy gwiazdy zawarta jest w wewnętrznych 25% jej całkowitego promienia, a 70% jej masy zawarte jest w wewnętrznych 35% jej całkowitego promienia.

We wszystkich kolejnych częściach tego pytania wystarczy zaokrąglić wszystkie wyprowadzone współczynniki numeryczne do 0,005.

(T11.3a) Wyraż powyższe równanie opisujące zależność masy od promienia w funkcji x , $\frac{dq(x)}{dx}$ i $\sigma(x)$. [2]

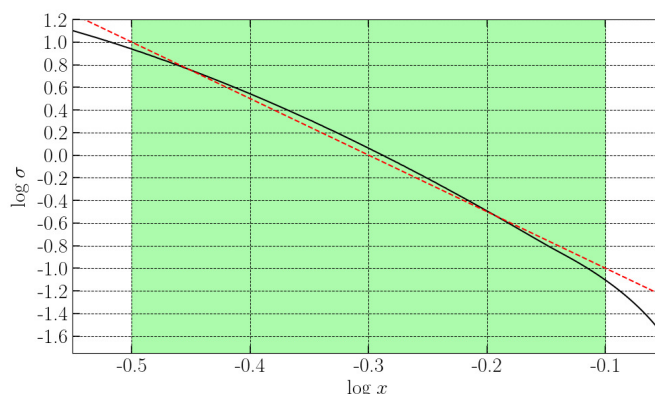
Aby uzyskać rozkład masy względem promienia, musimy znać profil gęstości wewnątrz gwiazdy. Na potrzeby tego zadania opiszemy zmienność gęstości względem promienia za pomocą przybliżonych wzorów w dwóch obszarach x :

- wewnętrzna część gwiazdy: $0 \leq x \leq 0.32$
- środkowa część gwiazdy: $0.32 < x < 0.80$

Nie dokonujemy żadnych przybliżeń dla najbardziej zewnętrznej części, tj. $0.80 \leq x \leq 1.00$.

(T11.3b) **Przybliżenie dla środkowej części:**

Zmienność $\log \sigma$ jako funkcji $\log x$ w środkowej części gwiazdy jest pokazana (czarną krzywą) na wykresie poniżej. Dokonamy liniowego przybliżenia (pokazanego jako przerywana czerwona linia na wykresie) dla $\log \sigma$ jako funkcji $\log x$ w obszarze $-0.5 < \log x < -0.1$, tj. $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (pokazany przez zielony zacieniony obszar). Ponadto przybliżymy nachylenie tej linii do najbliższej liczby całkowitej.



Użyj tego przybliżenia, aby napisać wyrażenie dla $\sigma(x)$ jako funkcji x w obszarze $0.32 < x < 0.80$. [4]

(T11.3c) Użyj wyniku z (T11.3b), aby wyprowadzić wyrażenie dla $q(x)$ w obszarze $0.32 < x < 0.80$. [6]

(T11.3d) **Przybliżenie dla wewnętrznej części:**

W wewnętrznej części gwiazdy ($0 \leq x \leq 0.32$), gęstość można przybliżyć jako liniową funkcję promienia, tj. $\sigma(x) = Ax + B$, gdzie A, B są stałymi. Określ A i B , a następnie uzyskaj wyrażenie dla $q(x)$ w obszarze $0 \leq x \leq 0.32$. Zauważ, że przybliżenia przyjęte w poprzedniej części i tej części mogą prowadzić do małych nieciągłości w gęstości lub masie przy $x = 0.32$. [8]

(T11.3e) Wyrażenia dla $q(x)$ uzyskane w częściach (T11.3c) i (T11.3d) są przybliżeniami, które dobrze opisują zmienność masy względem promienia, ale tylko w określonych obszarach gwiazdy. Dla obszaru $0.80 \leq x \leq 1$ (dla którego nie wyprowadziliśmy żadnego wyrażenia), możliwe jest użycie odpowiedniej ekstrapolacji z sąsiedniego obszaru. Użyj tych przybliżonych wyrażeń i podanych danych, aby naszkicować gładką krzywą (bez żadnych nieciągłości ani w $q(x)$, ani w jego pochodnej) dla $q(x)$ względem x dla całej gwiazdy ($0 \leq x \leq 1$), która reprezentuje zmienność masy względem promienia. [4]

(T12) Promieniowanie Hawkinga z czarnych dziur

[50 punktów]

(T12.1) Czarna dziura (BH) zazwyczaj powstaje w wyniku grawitacyjnego zapadania się masywnej gwiazdy pod koniec jej cyklu życia do punktu zwanego osobliwością. Ze względu na ekstremalną grawitację takiego obiektu, nic, co wejdzie do tzw. horyzontu zdarzeń (powierzchni sferycznej z $r = R_{\text{SC}}$, gdzie r jest odległością od osobliwości) nie jest w stanie się z niego wydostać. Gdzie R_{SC} jest nazywany promieniem Schwarzschilda.

(T12.1a) **Modelowanie pochodzenia promieniowania Hawkinga:** Rozważ parę cząstek, każda o masie m , produkowaną po obu stronach horyzontu zdarzeń BH. Jedna cząstka znajduje się nieco poza horyzontem przy $r \approx R_{\text{SC}}$, podczas gdy druga cząstka jest wewnątrz horyzontu przy $r = \kappa R_{\text{SC}}$. Załóż, że całkowita energia cząstki jest sumą jej energii spoczynkowej mc^2 i energii potencjalnej grawitacyjnej w polu BH.

Określ wartość κ , dla której para cząstek ma zerową całkowitą energię. [4]

(T12.1b) **Temperatura czarnej dziury:** Jeśli cząstka wytworzona poza horyzontem w powyższym procesie ma wystarczającą energię kinetyczną, może uciec z czarnej dziury w procesie prostym promieniowaniu Hawkinga. Ta wewnątrz horyzontu, która ma energię ujemną, zostaje pochłonięta i zmniejsza masę czarnej dziury.

Założmy, że całe promieniowanie Hawkinga składa się z fotonów o widmie ciała doskonale czarnego, którego natężenie osiąga maksimum przy długości fali $\lambda_{\text{bb}} \approx 16R_{\text{SC}}$. Wiadomo, że dla czarnej dziury o masie słonecznej, $R_{\text{SC}, \odot} = 2,952 \text{ km}$.

Podaj wyrażenie na temperaturę, T_{bh} , czarnej dziury odpowiadające temu promieniowaniu ciała doskonale czarnego, w zależności od jej masy M_{bh} i stałych fizycznych. Oblicz promień Schwarzschilda, $R_{\text{SC}, 10\odot}$, oraz temperaturę, $T_{\text{bh}, 10\odot}$, dla czarnej dziury o masie $10 M_{\odot}$. [4]

(T12.1c) **Utrata masy czarnej dziury:** Założmy, że promieniowanie Hawkinga jest emitowane z horyzontu zdarzeń.

Korzystając z równoważności masy i energii, wyprowadź wyrażenie na tempo utraty masy, $dM_{\text{bh}}(t)/dt$, w zależności od masy $M_{\text{bh}}(t)$ czarnej dziury i stałych fizycznych.

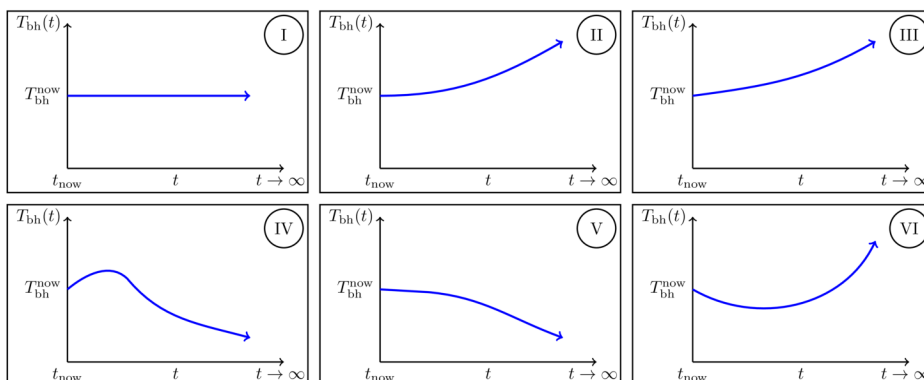
Następnie podaj wyrażenie dla $M_{bh}(t)$ dla czarnej dziury o początkowej masie M_0 . [8]
Naszkicuj $M_{bh}(t)$ jako funkcję t od $M_{bh} = M_0$ do $M_{bh} = 0$.

(T12.1d) **Czas życia czarnej dziury:** Uzyskaj wyrażenie na czas życia τ_{BH} , w którym czarna dziura o początkowej masie M_0 całkowicie wyparowuje z powodu promieniowania Hawkinga, w zależności od M_0 i stałych fizycznych. Oblicz czas życia $\tau_{bh,10\odot}$ (w sekundach) dla czarnej dziury z $M_0 = 10 M_\odot$. [3]

(T12.1e) **Czarna dziura w kąpiele promieniowania CMB:** Rozważmy izolowaną czarną dziurę w przestrzeni, z dala od innych ciał, o obecnej temperaturze T_{bh}^{now} , otoczoną przez kosmiczne mikrofalowe promieniowanie tła (CMB) o obecnej temperaturze $T_{cmb}^{now} = 2,7$ K. Czarna dziura może zwiększać swoją masę poprzez absorpcję promieniowania CMB i tracić masę poprzez promieniowanie Hawkinga.

Biorąc pod uwagę przyspieszającą ekspansję Wszechświata, określ, które z poniższych wykresów pokazują długoterminową ewolucję czasową T_{bh} w następujących trzech przypadkach:

(X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Wskaż swoją odpowiedź, zaznaczając odpowiednie pole (tylko jedno) dla każdego przypadku X, Y lub Z w tabeli podanej w Arkuszu Odpowiedzi, odpowiadającej odpowiedniemu numerowi wykresu. [6]

(T12.2) Pierwotne czarne dziury (PBH) o znacznie mniejszych masach mogą powstać we wczesnym Wszechświecie. Wszystkie poniższe pytania dotyczą PBH. Tutaj można pominąć wszelkie procesy zwiększające masę czarnej dziury.

(T12.2a) **PBH parujące w obecnej epoce:** Jak mogłeś zauważyć z odpowiedzi na poprzednie pytania, czarne dziury o masie słonecznej potrzebowałyby dużo czasu na wyparowanie. Jednakże, ponieważ PBH mogą mieć znacznie mniejszą masę, możemy być w stanie zobaczyć je wyparowujące w obecnych czasach.

Znajdź początkową masę $M_{0, PBH}$ (w kg), promień Schwarzschilda $R_{SC, PBH}$ (w m) oraz temperaturę T_{PBH} (w K) czarnej dziury, która może całkowicie wyparować w obecnej epoce, tj. te z czasem życia $\tau_{PBH} = 14$ miliardów lat. [4]

(T12.2b) **Formowanie PBH:** W zdominowanym przez promieniowanie wczesnym Wszechświecie, czynnik skali zmienia się jak $a(t) \sim t^{1/2}$. W tej erze PBH powstają w wyniku zapadania się całej energii zawartej w obszarze o rozmiarze fizycznym ct , gdzie t jest wiekiem Wszechświata w tym czasie.

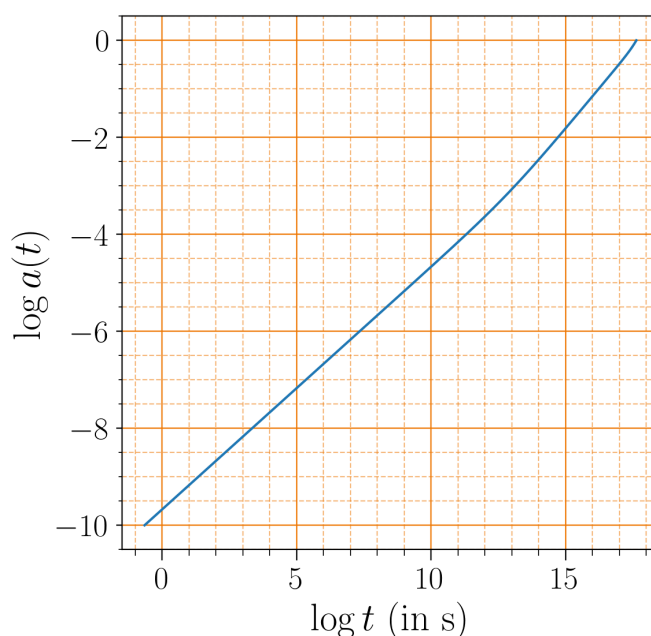
PBH o masie 1×10^{12} kg formuje się, gdy wiek Wszechświata wynosi około 1×10^{-23} s. [6]
Oblicz wiek Wszechświata, t_{20} , kiedy formuje się PBH o masie 1×10^{20} kg.

- (T12.2c) **Zaobserwowane widmo promieniowania Hawkinga z PBH:** Rozważ PBH o początkowej masie 1×10^{10} kg, która całkowicie wyparowuje pod koniec swojego życia τ_{PBH} . Dla tej części, załóżmy dla uproszczenia, że większość promieniowania Hawkinga jest emitowana w obecnym czasie, z temperaturą odpowiadającą jego początkowej masie. Przyjmij również, że czynnik skali Wszechświata ewoluuje jako $a(t) \sim t^{2/3}$.

Oblicz długość fali maksimum tego promieniowania Hawkinga, jak zaobserwowano na Ziemi, λ_{earth} , w obecnej epoce (przy $t = 14$ miliardów lat). [5]

- (T12.2d) **Wysokoenergetyczne promieniowanie kosmiczne z PBH:** Załóżmy teraz, że promieniowanie Hawkinga emitowane w danym czasie t odpowiada fotonom emitowanym z energią $k_B T_{\text{bh}}(t)$. Ponadto, najwyższa możliwa temperatura dla czarnej dziury to temperatura Plancka T_{Planck} , gdzie $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Ewolucja współczynnika skali w odpowiednich skalach czasowych jest przedstawiona na poniższym rysunku. Współczynnik skali dzisiaj jest przyjmowany jako równy jeden. $t(s)$ na osi czasu reprezentuje wiek wszechświata w sekundach.



- Jeśli na Ziemi zostanie zaobserwowany foton o energii $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$ eV, określ największe i najmniejsze możliwe wartości początkowej masy PBH (M_0^{max} i M_0^{min} , odpowiednio), które mogłyby być odpowiedzialne za ten foton. [10]