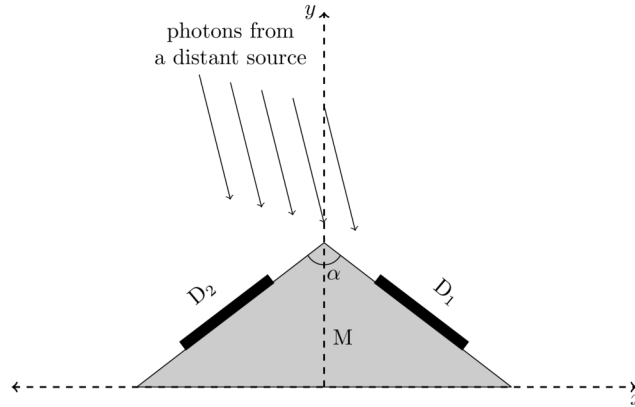


[10 نقاط]

(T01) بعثة داكشا

"داكشا" هي بعثة هندية مقترحة تتكون من قمرين صناعيين S_1 و S_2 يدوران حول الأرض في نفس المدار الدائري ذي نصف القطر $r = 7000 \text{ km}$ ولكن بفرق طور مقداره 180° . يرصد هذان القمران الصناعتان الكون في نطاق الطاقة العالية (أشعة X وأشعة γ). كل قمر من أقمار داكشا يستخدم عدة كواشف مسطحة ومستطيلة.

لفهم كيفية تحديد موقع مصدر الأشعة في السماء، سنستخدم نموذجًا مبسطًا لبعثة داكشا. لنفترض أن القمر الصناعي S_1 يحتوي فقط على كاشفين متطابقين D_1 و D_2 ، مساحة كل منهما $A = 0.50 \text{ m}^2$ ، مثبتين على قاعدة مقعنة M كما هو موضح في الشكل أدناه. يقع الكاشفان بشكل متناظر حول المحور y في مستويات عمودية على المستوى $y-x$ ، وبينهما زاوية $\alpha = 120^\circ$.



(T01.1) عند رصد مصدر بعيد يقع في المستوى $y-x$ ، يسجل الكاشف D_1 قدرة مقدارها $P_1 = 2.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$ ، ويسجل الكاشف D_2 قدرة مقدارها $P_2 = 4.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$.

[5] قدّر الزاوية η التي يصنعها متجه موقع المصدر مع المحور y الموجب، بحيث تُعتبر الزاوية عكس اتجاه عقارب الساعة من المحور y الموجب زاوية موجبة.

خذ مثالاً نبضة واحدة من مصدر بعيد (ليس بالضرورة في المستوى $y-x$) تم تسجيلها بواسطة القمرين الصناعيين (S_1 و S_2) لبعثة داكشا. الزمن عند رصد قمم النبضات المسجلة بواسطة S_2 و S_1 هو t_2 و t_1 على التوالي.

(T01.2) إذا كانت قيمة $t_1 - t_2$ قد قيست لتكون $10.0 \pm 0.1 \text{ ms}$ ، فاحسب الجزء f من الكرة السماوية الذي قد يقع فيه المصدر.

[10 علامات]

(T02) مكر-سانكرانتي

يُحتفل بمهرجان "مكر-سانكرانتي" في الهند عندما تبدو الشمس وكأنها تدخل منطقة برج الجدي (مكر = الجدي، سانكرانتي = الدخول) كما تُرى من الأرض. يُحتفل بالمهرجان حاليًا حوالي 14 يناير من كل عام. قبل سنوات عديدة، تزامن هذا المهرجان أيضًا مع الانقلاب الشتوي في نصف الكرة الشمالي والذي نفترض حصوله في 21 ديسمبر.

(T02.1) بناءً على المعلومات المذكورة أعلاه، حدد السنة، y_c ، التي تزامن فيها آخر مرة الاحتفال بهذا المهرجان مع الانقلاب الشتوي في نصف الكرة الشمالي.

(T02.2) إذا بدت الشمس تدخل المنطقة البروجية لبرج الجدي حسب التوقيت المحلي لمومباي في تمام الساعة 11:50:13 في 14 يناير 2006، احسب التاريخ، D_{enter} ، والوقت المحلي، t_{enter} ، لدخولها برج الجدي في عام 2013.

(T02.3) يحتفل بمهرجان ماكار-سانكرانتي في مكان معين في يوم أول غروب للشمس في المنطقة البروجية لبرج الجدي. يمكنك افتراض أن وقت غروب الشمس المحلي في ممباي في يناير هو الساعة 18:30:00.

حدد تاريخ الاحتفال بالمهرجان في كل عام بين 2006 و 2013 (بوضع علامة (✓) في المربع [4] المناسب في الجدول المعطى في ورقة ملخص الإجابة).

[15 علامة]

(T03) الموجات الثقالية

تولد الثقوب السوداء الثنائية المدارية موجات ثقالية. ضع في اعتبارك ثقيين أسودين في مجرتنا بكتلتين $M = 36 M_{\odot}$ و $m = 29 M_{\odot}$ ، يدوران في مدارات دائرية بتردد زاوي مداري ω حول مركز كتلتها.

(T03.1) بافتراض الجاذبية النيوتونية، اشتق تعبيراً للتردد الزاوي، ω_{ini} ، لمدارات الثقب الأسود في وقت، t_{ini} ، عندما كانت المسافة بين الثقوب السوداء 4.0 أضعاف مجموع نصف قطر شفارتزشيلد الخاص بهما، بدلالة M و m ، والثوابت الفيزيائية فقط.

[5] احسب قيمة ω_{ini} (بوحدة rad s^{-1}).

(T03.2) في النسبية العامة، تصدر الثقوب السوداء المدارية موجات جاذبية بتردد f_{GW} ، بحيث $2\pi f_{GW} = \omega_{GW} = 2\omega$. هذا يؤدي إلى انكماش مدارات الثقوب السوداء، مما يزيد بدوره من f_{GW} . معدل تغير f_{GW} هو

$$\frac{df_{GW}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{chirp}^{\alpha/3} f_{GW}^{\delta/3},$$

$$M_{chirp} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}} \text{ حيث } M_{chirp} \text{ تسمى "الكتلة النبضية".}$$

[4] أوجد قيم α ، β و δ .

[6] (T03.3) افترض أن موجات الجاذبية المرتبطة بالحدث تم اكتشافها لأول مرة عند الزمن $t_{ini} = 0$.

اشتق تعبيراً للزمن المرصود لاندماج الثقب الأسود، t_{merge} ، عندما تصبح f_{GW} كبيرة جداً، بدلالة ω_{ini} و M_{chirp} ، والثوابت الفيزيائية فقط. احسب قيمة t_{merge} (بالثواني).

[15 علامة]

(T04) تناقص بالمر

اعتبر نجم من النسق الأساسي محاط بسديم. المقدار المرصود في النطاق V للنجم هو 11.315 mag. تبعت المنطقة المتأينة من السديم القريبة من النجم خطوط $H\alpha$ و $H\beta$ ، حيث أطوالها الموجية هي $0.6563 \mu\text{m}$ و $0.4861 \mu\text{m}$ على التوالي. نظرياً، النسبة المتوقعة للنسبة بين تدفق $H\alpha$ إلى تدفق $H\beta$ هي $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2.86$. ومع ذلك، عند مرور هذا الإشعاع عبر الجزء الخارجي البارد من السديم، كانت التدفقات المرصودة لخطوط $H\alpha$ و $H\beta$ تساوي $6.80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ و $1.06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ على التوالي.

يُعبر عن الإعتام A_{λ} (Extinction) كدالة في الطول الموجي كما يلي:

$$A_\lambda = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

حيث إن $\kappa(\lambda)$ هو منحني الإعتام، و $E(B - V)$ هو الفرق اللوني في مرشحي B و V. يُعطى منحني الإطفاء (حيث λ بوحدة ميكرومتر) كما يلي:

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

حيث إن $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ هو نسبة الإعتام الكلي إلى الانتقائي.

[3] (T04.1) أوجد قيم $\kappa(H\beta)$ و $\kappa(H\alpha)$.

[4] (T04.2) أوجد قيمة نسبة الفرق اللوني $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$.

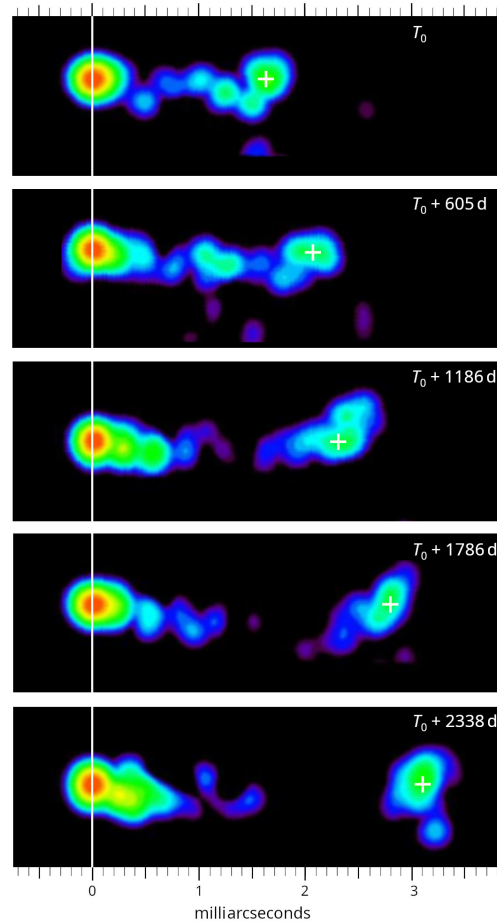
[6] (T04.3) قَدِّر قيمة الإعتام الناتج عن السديم، $A_{H\beta}$ و $A_{H\alpha}$ ، عند الأطوال الموجية $H\beta$ و $H\alpha$ على التوالي.

[2] (T04.4) قَدِّر قيمة الإعتام الناتج عن السديم (A_V) والقدر الظاهري للنجم في النطاق V، m_{V0} ، في حالة غياب السديم.

[20 علامة]

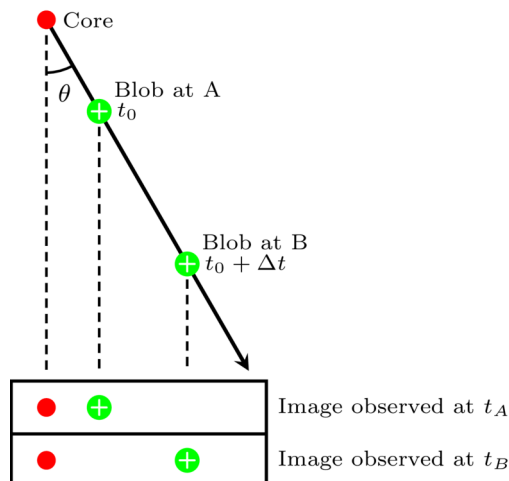
(T05) الكوازارات

الكوازار هو مجرة نشطة شديدة اللمعان بسبب ثقب أسود فائق الكتلة ينبعث منه نفاثات سرعتها قريبة من سرعة الضوء. يوضح الشكل سلسلة من اللوحات لصور راديوية لكوازار (ذو انزياح أحمر $z = 0.53$ ومسافة اللمعان $1.00 \times 10^{10} D_L$ سنة ضوئية) في أزمنة مختلفة. ثبتت "النواة" على الخط الأبيض العمودي، بينما تتحرك نفاثة مكونة من "فقاعة مشعة" (مشار إليها بـ + أبيض) مبتعدة عن النواة بمرور الوقت. تُظهر كل لوحة زمن الرصد (بدءاً من T_0 للصورة الأولى)، ويتم الإشارة إلى المقياس الزاوي في أعلى وأسفل الشكل.



- [5] احسب المسافة الزاوية للفقاعة المشعة ϕ_{blob} (بوحدة الميللي ثانية قوسية) والمسافة الفعلية لها l_{blob} (transverse distance) (بوحدة السنة الضوئية) عن نواة الكوازار لكل عملية رصد. بعد ذلك، احسب السرعة الظاهرية للكتلة في اتجاه الحركة (v_{app}) كنسبة من سرعة الضوء β_{app} (= c/v_{app}) باستخدام المشاهدات المتتالية. واحسب ايضا متوسط السرعة الظاهرية $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ خلال كامل فترة الرصد.

يندفع نفاث الكوازار بسرعة عالية جدا $v \equiv \beta c$ ، ولكنه لا يتحرك بالضرورة في مستوى السماء؛ يعني أنه يصنع زاوية θ (وهي "زاوية الرؤية") مع خط الرؤية لراصد بعيد (كما هو موضح بالخطوط المتقطعة) في الرسم التخطيطي أدناه. في هذا الجزء وجميع الأجزاء اللاحقة، تجاهل الانزياح نحو الأحمر للكوازار وأي تأثيرات نسبية.



(T05.2) يصل الضوء المنبعث من الفقاعة المشعة عند زمنيين مختلفين t_0 (ويقابل الموقع A) و $t_0 + \Delta t$ (ويقابل الموقع B) إلى الراصد عند t_A و t_B على التوالي. وبالتالي تكون الفترة الزمنية بين الرصدين هي $\Delta t_{app} = t_B - t_A$.

[2] (T05.2a) أوجد تعبيراً للنسبة $\frac{\Delta t_{app}}{\Delta t}$ بدلالة β و θ .

[2] (T05.2b) باستخدام هذه النسبة، عبّر عن β_{app} بدلالة β و θ .

(T05.3) تُسمى الحركة "فوق ضوئية" إذا تجاوزت السرعة الظاهرية سرعة الضوء ($\beta_{app} > 1$)، وتُسمى "تحت ضوئية" إذا لم تتجاوزها ($\beta_{app} < 1$).

[4] (T05.3a) $\beta_{app} = 1$ ، ارسم منحنى انسيابي لـ β كدالة في θ لتحديد الحد الفاصل بين الحركات "تحت ضوئية" و"فوق ضوئية". ظل منطقة الحركة "فوق ضوئية" في الرسم بخطوط مائلة (///).

[2] (T05.3b) أوجد أقل سرعة حقيقية للنفاث ($\beta_{low} = v_{low}/c$) التي تسمح بحدوث الحركة "فوق ضوئية"، وكذلك زاوية الرؤية عند تلك الحالة θ_{low} .

[2] (T05.4) أوجد صيغة رياضية لإيجاد أعلى قيمة ممكنة لزاوية الرؤية θ_{max} عند قيمة معينة للسرعة الظاهرية β_{app} .

تظهر نواة الكوازار (وهي الجسم المدمج المركزي فيه)، تغيرات في انبعاثاتها بسبب العمليات الداخلية التي تحدث ضمن منطقة متراصة سببياً. ويُعتبر نصف قطر هذه المنطقة عادةً حوالي خمسة أضعاف نصف قطر شفارتزشيلد للنواة.

[3] (T05.5) وُجد أن نواة كوازار معيّن تتغير على مقياس زمني يقارب ساعة واحدة. احسب حدًا أعلى، $M_{c,\backslash,max}$ ، لكتلة الجسم المدمج المركزي، بوحدات كتلة الشمس.

[20 علامة]

(T06) دوران المجرة

يتم تحديد منحنى دوران مجرتنا باستخدام قياسات السرعة على طول خط الرؤية لسحب الهيدروجين الأحمادي (HI) على طول خطوط الطول المجرية المختلفة، والتي تلاحظ من خلال خط 21 سم من الهيدروجين الأحادي. اعتبر سحابة HI بخط طول مجري l ، تقع على مسافة R من مركز المجرة (GC) وعلى مسافة D من الشمس. اعتبر أن الشمس تقع على مسافة $R_0 = 8.5 kpc$ من مركز المجرة. افترض أن كل من الشمس وسحابة HI في مدارات دائرية حول مركز المجرة في المستوى المجري، مع سرعات زاوية Ω_0 و Ω ، وسرعات دورانية V_0 و V ، على التوالي.

يمكن التعبير عن مكونات السرعة على طول خط الرؤية (V_r) والسرعة العرضية (V_t) للسحابة، كما تلاحظ من الشمس، على النحو التالي:

$$V_r = (\Omega - \Omega_0) R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0) R_0 \cos l - \Omega D$$

عند النظر من القطب المجري الشمالي، يكون دوران المجرة في اتجاه عقارب الساعة. طوال هذه المسألة، سنعتبر السرعة على طول خط الرؤية موجبة عندما تكون مبنعة، وستعامل السحب كجسام نقطية.

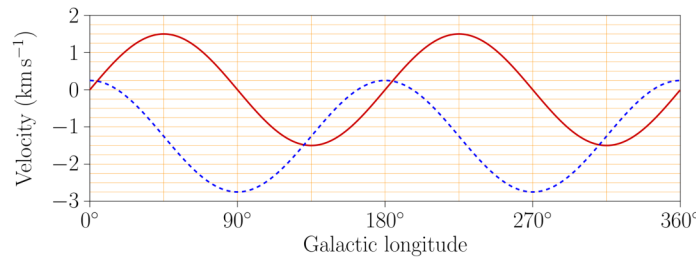
(T06.1) في الرسم البياني المقدم في ورقة الإجابات الملخصة، ارسم V_r كدالة لـ D من $D = 0$ إلى $D = 2R_0$ لخطين من خطوط الرؤية المحددة بواسطة

i) $l = 45^\circ$

.ii) $l = 135^\circ$

قم بتسمية كل من خطوطك/منحنياتك بقيمة l .

(T06.2) يُظهر الرسم البياني أدناه متوسط المكونات الشعاعية (المنحنى الأحمر المتصل) والمستعرضة (المنحنى الأزرق المتقطع) للسرعة للنجوم على بُعد 100 فرسخ فلكي من الشمس، مرسومة كدالة لطول المجرة



باستخدام الرسم البياني، قم بتقدير فترة دوران الشمس (P) حول مركز المجرة بالميجا سنة [3] (Myr).

(T06.3) لاحظ جان أورت أنه في جوار النظام الشمسي ($D \ll R_0$), سيكون الفرق في السرعات الزاوية ($\Omega - \Omega_0$) صغيراً، وبالتالي، استنتج التقريب من الدرجة الأولى للمكونات السرعة على خط الرؤية والسرعة العرضية:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

حيث A و B يُعرفان بثوابت أورت.

دعونا نعتبر حالتين:

- (I) منحنى الدوران الفعلي المرصود للمجرة، و
- (II) منحنى الدوران لسيناريو افتراضي حيث تكون المجرة خالية من المادة المظلمة ويفترض أن تكون كتلة المجرة كلها مركزة في مركزها.

(T06.3a) استنتج التعبيرات الخاصة بتدرج السرعة الدورانية الشعاعية عند موقع الشمس، [2]

$$\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}, \text{ للحالتين.}$$

(T06.3b) عبر عن A و B بدلالة R_0, V_0 ، وتدرج السرعة الدورانية الشعاعية عند موقع الشمس، [8]

$$\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$$

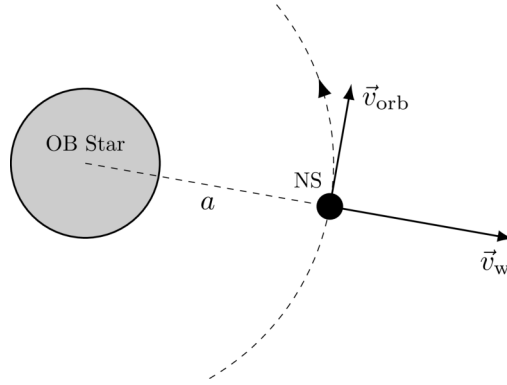
(T06.3c) نسبة (A/B) لثوابت أورت للحالتين المعطيتين، (I) و (II)، تُعرف بـ F_I و F_{II} ، على [2] التوالي. حدد F_I و F_{II} .

[20 علامة]

(T07) نظام ثنائي لنجم نيوتروني

في نظام ثنائي يتضمن نجمًا مضغوطًا، حيث لا يفيض النجم المرافق عن فوهة ريش، يكون المصدر الرئيسي للتراكم للنجم المضغوط هو الرياح النجمية من النجم المرافق. يكون هذا التراكم المعتمد على الرياح ذا أهمية خاصة في الأنظمة التي تشمل نجمًا من النوع المبكر (مثل نجم O أو B، المشار إليه فيما بعد كنجم OB)، إلى جانب جسم مضغوط مثل نجم نيوتروني (NS) في مدار قريب.

اعتبر نظامًا ثنائيًا من نوع NS-OB حيث يدور نجم نيوتروني بكتلة $M_{NS} = 2.0 M_{\odot}$ ونصف قطر R_{NS} 11 كم في مدار دائري بنصف قطر a حول مركز نجم OB بسرعة $v_{orb} = 1.5 \times 10^5$ م ث⁻¹ (انظر الشكل أدناه). طوال هذه المسألة، يُفترض أن فقدان الكتلة من نجم OB يكون متماثلًا كرويًا ومعدل فقدانه هو $\dot{M}_{OB} = 1.0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$.



[3] (T07.1) يُعرّف نصف قطر التراكم، R_{acc} ، على أنه أقصى مسافة من النجم النيوتروني (NS) يمكن عندها التقاط الرياح النجمية بواسطة النجم النيوتروني. إذا كانت سرعة الرياح النجمية عند المسافة المدارية للنجم النيوتروني هي $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ للنظام المذكور أعلاه بالكيلومترات باستخدام حساب سرعة الهروب القياسية.

[3] (T07.2) بافتراض أن كل المادة الملتقطة تتراكم بواسطة النجم النيوتروني، قم بتقدير معدل تراكم الكتلة، $\dot{M}_{acc}$ ، من الرياح النجمية إلى النجم النيوتروني بوحدات $M_{\odot} \text{yr}^{-1}$ إذا كان $a = 0.5 \text{ au}$. تجاهل تأثيرات ضغط الإشعاع ووقت التبريد المحدود للغاز المتراكم.

[6] (T07.3) الآن، ضع في اعتبارك الحالة التي تصبح فيها سرعة الرياح النجمية عند المسافة المدارية a (بالقرب من النجم النيوتروني) قابلة للمقارنة مع سرعة النجم النيوتروني المدارية. سيكون معدل تراكم الكتلة من الرياح النجمية على النجم النيوتروني في هذه الحالة معطى بتعبير من الشكل $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$ ، حيث $q = M_{NS}/M_{OB}$ هو نسبة الكتلة للنظام الثنائي و β هو الزاوية في إطار النجم النيوتروني بين اتجاه سرعة الرياح والاتجاه الشعاعي إلى النجم OB. احصل على التعبير لـ $f(\tan \beta, q)$ بافتراض $M_{OB} \gg M_{NS}$.

(T07.4) اعتبر أن المادة المؤينة بالكامل تتراكم بشكل شعاعي وتُعيق بسبب المجال المغناطيسي القوي $\vec{B}$ للنجم النيوتروني. يمكن نمذجة هذا التأثير كضغط، يُعطى بواسطة $\frac{B^2}{2\mu_0}$. سنفترض أن النجم النيوتروني لديه مجال مغناطيسي ثنائي القطب تتغير قوته في المستوى الاستوائي مع المسافة r من النجم النيوتروني لـ $r \gg R_{NS}$ كالتالي

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{NS}}{r} \right)^3$$

حيث B_0 هو المجال المغناطيسي عند خط الاستواء للنجم النيوتروني. افترض أن محور ثنائي القطب المغناطيسي يتماشى مع محور دوران النجم النيوتروني.

(T07.4a) احسب الضغط المغناطيسي، $P_{eq,mag}$ ، في المستوى الاستوائي من حيث B_0 ، R_{NS} ، r ، وثوابت أخرى مناسبة.

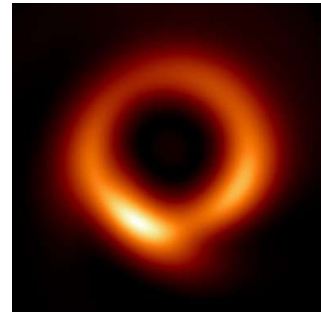
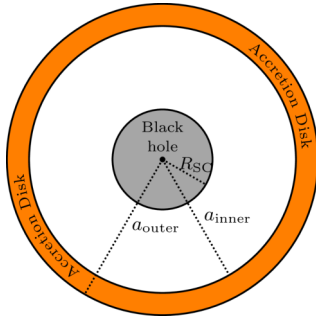
(T07.4b) أقصى مسافة حيث يتوقف تدفق التراكم بواسطة المجال المغناطيسي عند خط الاستواء تُسمى نصف القطر المغناطيسي R_m . هذا التدفق للمادة سيؤدي إلى ضغط بسبب الحركة النسبية بين الرياح النجمية القادمة والنجم النيوتروني. احصل على تعبير تقريبي للمجال المغناطيسي الحرج $B_{0,c}$ الذي يتزامن فيه R_m مع R_{acc} واحسب قيمته بوحدة تسلا. يتم إهمال التأثيرات المغناطيسية لـ $r > R_m$ واعتبر $v_w \gg v_{orb}$.

[20 علامة]

(T08) ظل الثقب الأسود

نشر تلسكوب أفق الحدث (EHT) صورة للثقب الأسود فائق الكتلة في مركز مجرة M87 كما هو موضح في اللوحة اليمنى من الشكل أدناه.

لفهم بعض الخصائص البسيطة لهذه الصورة، سنعتبر نموذجًا مبسطًا لثقب أسود غير دوار و ساكن و كروي التماثل بكتلة $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$ ، محاط بقرص تراكمي رقيق مستوي عديم الكتلة بنصفي قطر داخلي وخارجي، $a_{inner} = 6R_{SC}$ و $a_{outer} = 10R_{SC}$ ، على التوالي، حيث R_{SC} هو نصف قطر شفارتزشيلد. في اللوحة اليسرى من الشكل أدناه يظهر رسم تخطيطي للمنظر من الأمام (الشكل ليس بمقياس رسم دقيق).



نفترض أن قرص التراكم هو المصدر الوحيد للضوء الذي سيتم اعتباره، كل نقطة على القرص تبعث الضوء في جميع الاتجاهات. يسير هذا الضوء تحت تأثير المجال الجاذبي للثقب الأسود. يحكم مسار أشعة الضوء معادلتان معطتان أدناه (وهما مشابهتان لمعادلات جسم حول الشمس):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

حيث $r \in (R_{SC}, \infty)$ هو الإحداثي الشعاعي، $\phi \in [0, 2\pi)$ هي الزاوية السميتية، و E و L هما ثابتان مرتبطتان بالطاقة المحفوظة والزخم الزاوي المحفوظ، على التوالي.

هنا $v_r \equiv dr/dt$ هي مقدار السرعة الشعاعية و v_ϕ هي مقدار السرعة المماسية، و $\omega \equiv d\phi/dt$ هي السرعة الزاوية. نعرّف معامل التأثير b للمسار بأنه $b = L/\sqrt{2E}$. تم إهمال تمدد الزمن في هذه المسألة.

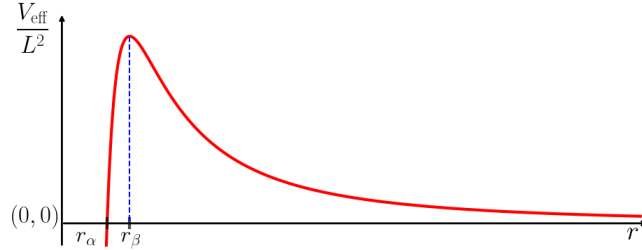
معادلة مفيدة أخرى يتم الحصول عليها من خلال تفاضل المعادلة الأولى:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

(T08.1) يمكن أن توجد مسارات ضوئية دائرية حول الثقب الأسود. أوجد نصف القطر، r_{ph} ، ومعامل التأثير، b_{ph} ، لمثل هذه المسارات الفوتونية بدلالة M والثوابت ذات الصلة.

[2] (T08.2) احسب الزمن، T_{ph} ، المستغرق لإكمال مدار كامل للمسار الضوئي الدائري بالثواني.

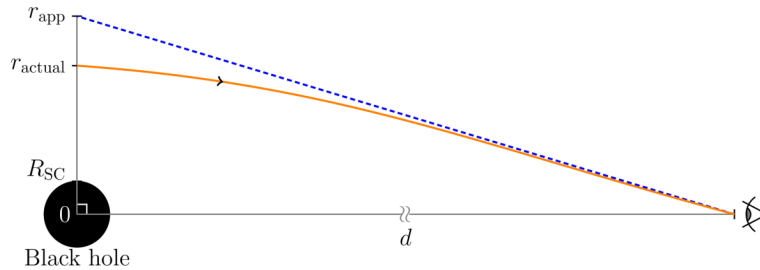
(T08.3) يمكن مقارنة معادلة السرعة الشعاعية المذكورة أعلاه (المعادلة الأولى في هذا السؤال) مع معادلة من الشكل $\frac{v^2}{2} + V_{eff}(r) = E$ لمسارات الضوء. يظهر أدناه رسم تخطيطي لـ V_{eff}/L^2 كدالة لـ r .



[2] (T08.3a) يشير الرسم البياني إلى نصف قطر خاصين هما r_α و r_β . استنتج تعبيرات لـ r_α و r_β بدلالة M والثوابت ذات الصلة.

[3] (T08.3b) يمكن للفوتون المتجه للداخل من قرص التراكم نحو الثقب الأسود أن يهرب إلى ما لا نهاية في بعض الحالات. جد التعبير لأصغر قيمة لنصف قطر نقطة الانعطاف، r_t ، لمثل هذا الفوتون، بدلالة M والثوابت ذات الصلة. جد التعبير للقيمة الدنيا لمعامل التأثير، b_{min} ، لهذا الفوتون.

(T08.4) شعاع من الضوء قادم من نصف قطر r_{actual} من مركز النظام في مستوى السماء سيعاني من انحناء شديد بسبب جاذبية الثقب الأسود، وسيصل في النهاية إلى راصد (مشار إليه برسمه عين) على مسافة كبيرة d من النظام، كما هو موضح أدناه.

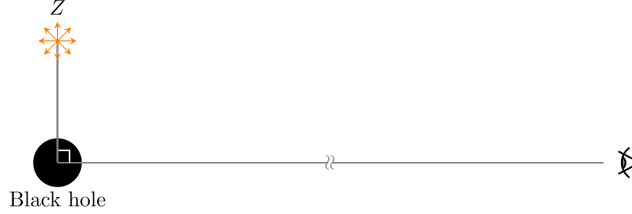


بالنسبة لهذا الراصد، سيبدو أن الشعاع قد نشأ من نقطة مختلفة على مسافة $b \approx r_{app}$ من مركز الثقب الأسود في مستوى السماء، حيث b هو معامل التأثير لمسار الفوتون. للنقاط على قرص التراكم عند $r = r_{actual}$ ، يمكن افتراض العلاقة التالية:

$$b(r_{actual}) \approx r_{actual} \left(1 + R_{SC}/r_{actual}\right)^{1/2}$$

[5] بالنسبة لراصد بعيد، مثلنا، مع رؤية مواجهة لقرص التراكم، ستظهر صورة النظام متماثلة دائريًا في مستوى السماء. حدد نصف القطر الظاهري الخارجي، r_{outer} ، ونصف القطر الظاهري الداخلي، r_{inner} ، للصورة بوحدات الوحدة الفلكية.

(T08.5) أفترض ثقب أسود معزول هائل الكتلة، كتلته $M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$ بدون أي قرص تراكمي. يحدث انفجار قوي وقصير من الإشعاع الكهرومغناطيسي لمدة 5 ثوانٍ عند نقطة Z على مسافة، لنقل، $r_Z = 6R_{SC}$ من الثقب الأسود كما هو موضح في الشكل. ينبعث من الانفجار عند النقطة Z ضوء في جميع الاتجاهات. يلتقط راصد عند نقطة بعيدة عن الثقب الأسود (يشار إليه بعين في الشكل أدناه) صورة ذات تعريض طويل للمنطقة المحيطة بالثقب الأسود لمدة 60 ثانية.



اختر الخيار الصحيح لكل من العبارات التالية:

- [2] (T08.5a) عدد المسارات المحتملة للضوء للانتقال من Z إلى الراصد هو
(A) واحد على الأكثر (B) واحد بالضبط (C) اثنان بالضبط (D) أكثر من اثنين.
- [2] (T08.5b) عدد صور انفجار الموجات الكهرومغناطيسية عند Z التي ستظهر في الصورة ذات التعريض الطويل هو
(A) واحدة على الأكثر (B) واحدة بالضبط (C) اثنان بالضبط (D) أكثر من اثنين.

[35 علامة]

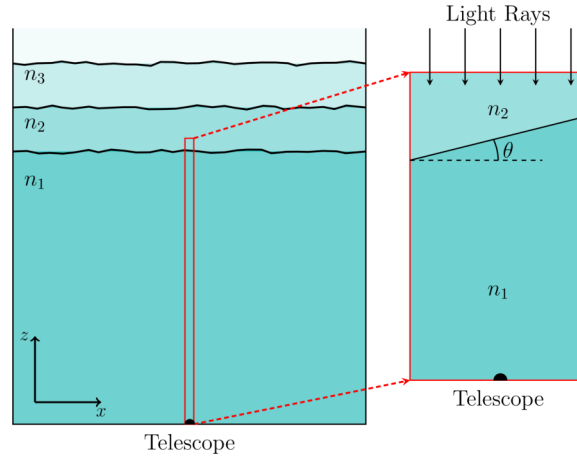
(T09) الرؤية الجوية

تم توجيه تلسكوب بعدسة هدف محدبة أكروماتية قطرها $D = 15 \text{ cm}$ وطول بؤري $f = 200 \text{ cm}$ نحو نجم في سمت الرأس.

- [1] (T09.1) أوجد قطر (بالمتر)، d_{image} ، لصورة مصدر نقطي كما تنتجها العدسة الشيئية في مستواها البؤري للضوء الأخضر ($\lambda = 550 \text{ nm}$)، مع الأخذ في الاعتبار تأثيرات الحيود فقط.
تتأثر صورة المصدر الفلكي أيضًا بما يسمى "الرؤية الجوية".

تتغير الحدود بين الطبقات في الغلاف الجوي وكذلك معاملات الانكسار للطبقات باستمرار بسبب الاضطرابات وتغير درجات الحرارة وعوامل أخرى. يؤدي هذا إلى تغييرات صغيرة في موضع الصورة في المستوى البؤري للتلسكوب، وهو ما يُعرف بـ "تأثير الوميض". بالنسبة لبقية المسألة، وبصرف النظر عن استخدام الحجم المحدود للصورة النجمية المحدود بالحيود (كما استخدم أعلاه)، لن يتم النظر في أي تأثيرات تداخل.

يوضح الجزء الأيسر من الشكل أدناه مقطعًا عموديًا للغلاف الجوي مع طبقات متعددة ذات معاملات انكسار مختلفة ($n_1, n_2, n_3, \dots$). يظهر الجزء الأيمن منظرًا مكبرًا لشريحة عمودية رقيقة من الغلاف الجوي والحد بين أدنى طبقتين جويتين بمعاملتي انكسار n_1 و n_2 ($n_1 > n_2$). نأخذ في الاعتبار فقط هاتين الطبقتين والحد بينهما لهذه المسألة. الرسومات ليست بمقياس دقيق.



(T09.2) لتكن الحدود بين الطبقتين على ارتفاع $H = 1km$ مباشرة فوق عدسة التلسكوب، مع ميل $\theta = 30^\circ$ بالنسبة للمستوى الأفقي. في جميع أجزاء هذه المسألة يتم اعتبار θ موجبة في الاتجاه عكس عقارب الساعة. بالنسبة لمصدر ضوء أحادي اللون، $n_1 = 1.00027$ و $n_2 = 1.00026$. ليكن الانزياح الزاوي للصورة في المستوى البؤري للتلسكوب لنجم في السميت هو α .

(T09.2a) ارسم مخططاً شعاعياً مناسباً مع وضع العلامات عند الحد الفاصل موضعاً n_1 و n_2 و θ و α . [2]

(T09.2b) أوجد تعبيراً لـ α بدلالة n_1, θ و n_2 . استخدم تقريبات الزاوية الصغيرة: $\sin \alpha \approx \alpha$ و $\cos \alpha \approx 1$. [2]

(T09.2c) احسب الإزاحة، Δx_θ (بالمتر)، في موضع الصورة إذا زادت θ بنسبة 1% (مع الحفاظ على n_1 و n_2 ثابتين). [3]

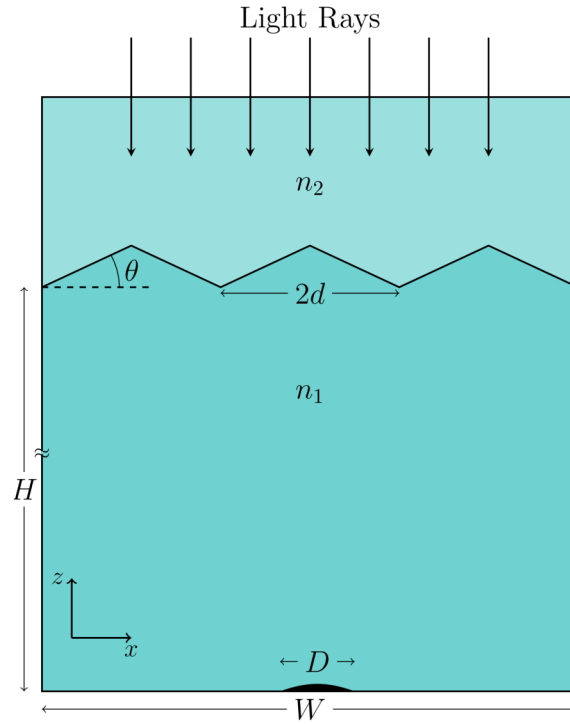
(T09.2d) احسب الإزاحة، Δx_n (بالمتر)، في موضع الصورة إذا زادت n_2 بنسبة 0.0001% (مع الحفاظ على n_1 و θ ثابتين). [3]

(T09.3) بالنسبة للضوء الأبيض القادم من نجم في سميت الرأس، اختر أيّاً مما يلي يصف بشكل أقرب شكل ولون الصورة عن طريق وضع علامة (✓) في المربع المناسب (واحد فقط) في ورقة ملخص الإجابة. لاحظ أن x يزداد من اليمين إلى اليسار في الشكل. [2]

لون الصورة	شكل الصورة	الحافة اليسرى	الحافة اليمنى
A أبيض	دائري		
B أبيض	بيضاوي		
C ملون	دائري	أزرق	أحمر
D ملون	دائري	أحمر	أزرق
E ملون	بيضاوي	أزرق	أحمر
F ملون	بيضاوي	أحمر	أزرق

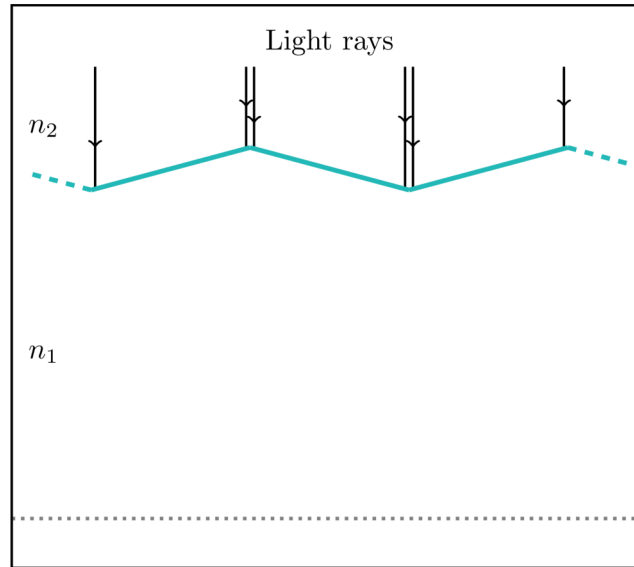
بالنسبة لجميع الأجزاء المتبقية من هذا السؤال، نعتبر ضوءاً أخضر أحادي اللون بطول موجي $\lambda = 550nm$. نقوم بنمذجة الحدود بين الطبقات كمجموعة من المستويات المتعرجة اللانهائية (تمتد عمودياً على مستوى الصفحة) مفصولة بمسافة $d = 10cm$ على طول المحور x ، مع إما $\theta = 10^\circ$ أو $\theta = -10^\circ$.

يوضح الشكل أدناه (ليس بمقياس رسم دقيق) مقطعاً عرضياً لهذا النموذج للغلاف الجوي بعرض W ($W \ll H$). بالنسبة للتلسكوبات ذات الفتحة الكبيرة، تؤدي هذه الطبيعة المتعرجة للحدود إلى تكوين بقع في المستوى البؤري.



(T09.4) فكر في الغلاف الجوي الذي تم نمذجته كما هو موضح أعلاه.

(T09.4a) يظهر في الرسم البياني أدناه (ليس بمقياس) قسم من الغلاف الجوي به مستويات متعرجة متتالية، بنفس المعلومات المذكورة أعلاه.



في هذا الرسم البياني، المستنسخ في ورقة ملخص الإجابة، ارسم مسارات أشعة الضوء الساقطة حتى المستوى الذي يوضع فيه عدسة التلسكوب، والمبين بالخط المنقط الرمادي.

[4] حدد المنطقة (المناطق)، إن وجدت، بعلامة "X" في الرسم البياني حيث لن تصل إليها أشعة الضوء.

[3] (T09.4b) احسب عرض W_X لهذه المنطقة (المناطق).

- [4] (T09.4c) جد أكبر قطر، $D_{\max}$ ، لعدسة التلسكوب والذي سيكون من الممكن به الحصول على صورة واحدة لنجم، من خلال اختيار موقع التلسكوب بشكل مناسب بالنسبة لبنية الحدود.
- [6] (T09.5) فكر في الحالة التي يُسمح فيها بالشكل المتعرج للحدود في كلا الاتجاهين x و y (مثل حقل من الأهرامات)، و $D = 100cm$ (مع $f = 200cm$).
- ارسم النمط النوعي للبقع الناتجة في المربع المعطى في ورقة ملخص الإجابة.
- [5] (T09.6) بالنسبة للغلاف الجوي المضطرب، ضع في اعتبارك مرة أخرى نفس الشكل المتعرج المتوازي لطبقة الحدود فقط على طول اتجاه x ، ولكن الآن تتغير الزاوية بين المستويين بمعدل منتظم من 10° إلى -10° في 1.0 ثانية. افترض أن هذا يؤدي إلى معدل منتظم لتحول موضع الصورة.
- ضع في اعتبارك تلسكوبًا بقطر $D = 8cm$ وبعد بؤري $f = 1m$. قدّر أطول وقت تعرض $t_{\max}$ مسموح به لكاميرا CCD الخاصة به بحيث يتم الحصول على صورة واحدة فقط، وأي انحراف محتمل في موضعها يبقى أقل من 1% من قطر الصورة المحدود بالحيود.

[35 علامة]

(T10) التكوين النووي للانفجار العظيم

خلال عصر غالبية الإشعاع في الكون المبكر، كان عامل مقياس الكون $a \propto t^{1/2}$ ، حيث t هو الوقت منذ الانفجار العظيم. خلال معظم هذا العصر، بقيت النيوترونات (n) والبروتونات (p) في توازن حراري مع بعضها البعض عبر التفاعلات الضعيفة. ترتبط الكثافة العددية (N) للنيوترونات أو البروتونات الحرة بدرجة الحرارة T وكتلتها المقابلة m بحيث

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

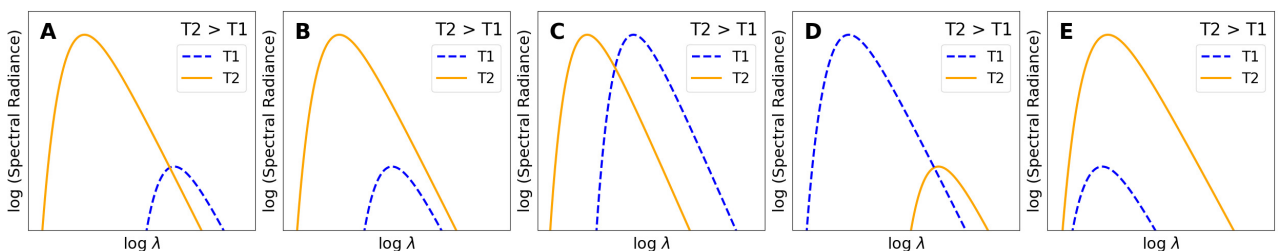
طالما أن الوقت $t \leq t_{\text{wk}} = 1.70 \text{ s}$ ، عندما $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800 \text{ keV}$. بعد t_{wk} ، لا يمكن للتفاعلات الضعيفة الحفاظ على هذا التوازن، وتنحل النيوترونات الحرة إلى بروتونات بعمر نصف قدره 610.4 ثانية.

- [4] (T10.1) لنفترض أن الكثافة العددية للبروتونات هي N_p ، وللنيوترونات هي N_n . احسب الوفرة النسبية للنيوترونات المعطاة بالنسبة $X_{n,\text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ عند الزمن t_{wk} .

(T10.2) تحافظ الفوتونات على التوازن الحراري وتحفظ بطيف الجسم الأسود في جميع العصور.

- [2] (T10.2a) أوجد المؤشر β ، بحيث $T(a) \propto a^\beta$.

- [2] (T10.2b) حدد أي من الرسوم البيانية التالية يظهر السلوك الصحيح للكثافة الطيفية للطاقة لدرجتين حرارة T_1 و T_2 . ضع علامة (✓) على الخيار الصحيح في ورقة ملخص الإجابة.



(T10.3) بعد مدة زمنية t_{wk} ، تخضع عملية تكوين الديوتيريوم من البروتونات والنيوترونات لمعادلة ساها، التي قدمها الفيزيائي الهندي البروفيسور ميغاندا ساها، والتي يمكن تبسيطها إلى

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

هنا، نسبة الباريون إلى الفوتون η هي 6.1×10^{-10} ، و N_D هي كثافة عدد الديوتيريوم.

[5] (T10.3a) مثل النسبة N_D/N_n على الرسم البياني في ورقة الإجابة الملخصة،

لما لا يقل عن 4 قيم متباعدة بشكل معقول من درجة الحرارة التي تقع في النطاق $k_B T = [60, 70] \text{ keV}$ ، وارسم منحنى سلس يمر عبر هذه النقاط.

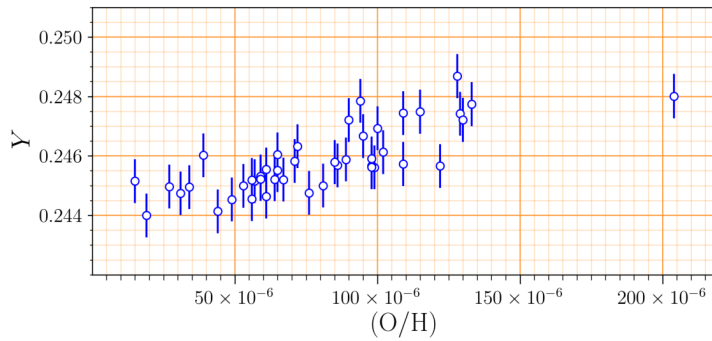
[1] (T10.3b) من الرسم البياني، أوجد $k_B T_{nuc}$ (بالكيلو إلكترون فولت) عندما $N_D = N_n$.

[4] (T10.3c) بدلاً من ذلك، افترض الآن أن جميع النيوترونات الحرة تتحد فوراً مع البروتونات عند $k_B T_{nuc}$ لتشكيل الديوتيريوم، والذي يتحول فوراً بالكامل إلى الهيليوم (${}^4_2\text{He}$). احسب الحقبة المقابلة أو وقت النووي، t_{nuc} (بالثانية)، لتكوين الهيليوم.

[5] (T10.4) احسب قيمة $X_{n,\backslash,nuc}$ مباشرة قبل t_{nuc} .

[3] (T10.5) وفرة الهيليوم البدائية، Y_{prim} ، تُعرّف بأنها نسبة الكتلة الباريونية الإجمالية في الكون المرتبطة في الهيليوم بعد t_{nuc} مباشرة. احصل على تقدير نظري لقيمة Y_{prim} . لغرض هذا الحساب فقط، افترض أن $m_p \approx m_n$ وأن كتلة الهيليوم، $m_{He} \approx 4m_n$.

(T10.6) من الصعب جداً قياس الوفرة البدائية للهيليوم، حيث تقوم النجوم باستمرار بتحويل الهيدروجين إلى هيليوم في الكون. يتم توصيف مقدار المعالجة بواسطة النجوم في المجرة من خلال الكثافة العددية النسبية للأكسجين (الذي تنتجه النجوم فقط) إلى الهيدروجين، ويرمز لها بـ (O/H) ، في المجرة. تم رسم جميع لقياسات (O/H) ووفرة الهيليوم، Y ، لمجرات مختلفة أدناه.



استخدم جميع النقاط في هذا الرسم البياني (المعاد إنتاجه في ورقة ملخص الإجابة) للإجابة على ما يلي.

[2] (T10.6a) قُدِّر Y لمجرة قزمية زرقاء مدمجة بقيمة $(O/H) = 1.75 \times 10^{-4}$.

[2] (T10.6b) احسب ميل $dY/d(O/H)$ للخط المستقيم الذي يناسب البيانات أعلاه.

[2] (T10.6c) قُدِّر الوفرة البدائية للهيليوم، Y_{prim}^{obs} ، بناءً على الملاحظات أعلاه.

- (T10.7) يمكن موازنة الانحراف بين Y_{prim} و $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ عن طريق تغيير نسبة الباريون إلى الفوتون η . عندما [3] تنخفض η ، كما هو مشار إليه بـ $\downarrow$ في ورقة الإجابة الملخصة، حدد الزيادة ($\uparrow$) أو النقصان ($\downarrow$) في $N_D/N_n(T)$ و T_{nuc} (عندما $N_D = N_n$) و t_{nuc} و $X_{n,\text{nuc}}$ و Y_{prim} في المربعات المتوفرة في ورقة الإجابة الملخصة.

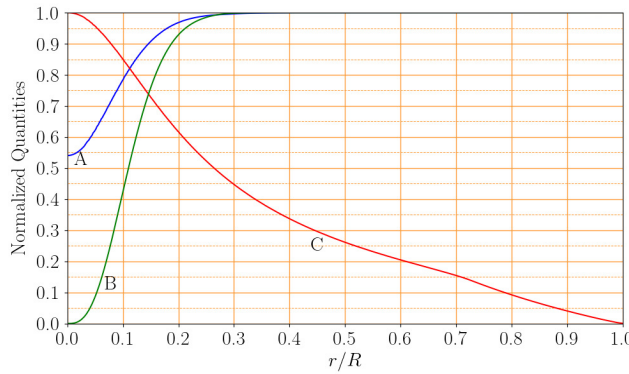
[50 علامة]

(T11) النجوم من خلال الرسوم البيانية

يمكن تقرب النجوم بشكل جيد كأجسام متناظرة كروياً، وبالتالي يمكن اختيار المسافة الشعاعية r من المركز كالمغير المستقل الوحيد في نمذجة بواطن النجوم. الكتلة المحتواة داخل كرة نصف قطرها r يرمز لها بـ $m(r)$. يتم تعريف اللمعان $l(r)$ على أنه صافي الطاقة المتدفقة إلى الخارج عبر سطح كروي نصف قطره r لكل وحدة زمنية. الكميات الأخرى ذات الاهتمام، على سبيل المثال، الكثافة $\rho(r)$ ، درجة الحرارة $T(r)$ ، نسبة كتلة الهيدروجين $X(r)$ ، نسبة كتلة الهيليوم $Y(r)$ ، والطاقة النووية المتولدة لكل وحدة كتلة لكل وحدة زمنية $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$ ، تعتبر دوالاً لـ r . طوال هذه المسألة سوف نهمل تأثيرات الانتشار والترسيب الجاذبي للعناصر داخل النجم.

(T11.1) الجزء 1: داخل نجم

يوضح الرسم البياني أدناه تباين ثلاث كميات هيكلية، A ، B ، و C ، كدوال لنصف القطر الكسري r/R في نموذج نجمي بكتلة $1 M_{\odot}$ وعمر 4 جيجا سنة، حيث R هو نصف قطر النجم الفوتوسفير. قيم نسبة كتلة الهيليوم على السطح، Y_s ، والمعدنية (نسبة كتلة جميع العناصر الأثقل من الهيليوم) على السطح، Z_s ، للنجم معطاة بـ $(Z_s, Y_s) = (0.02, 0.28)$. جميع الكميات الموضحة في الرسوم البيانية مُطَبَّعة بقيمتها القصوى الخاصة بها.



- [6] (T11.1a) حدد الكميات الثلاثة A و B و C بشكل فريد من بين الاحتمالات الخمسة:

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(اكتب A/B/C في المربعات بجانب الكميات المناسبة في ورقة الإجابات الملخصة. لا حاجة لتبرير إجابتك.)

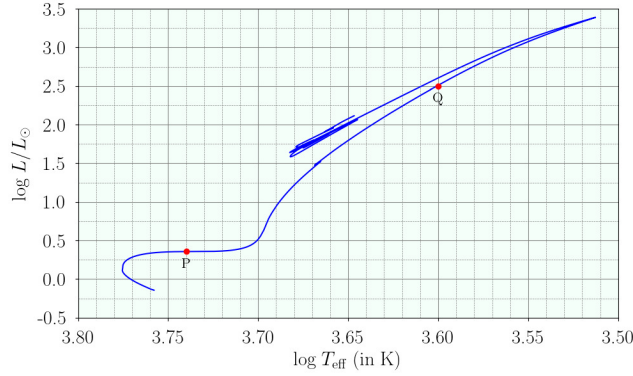
- [3] (T11.1b) ما هي الكتلة الجزئية للهيليوم في المركز، Y_c ، للنجم؟

- [5] (T11.1c) ارسم الكميتين المتبقيتين من القائمة الخماسية (التي لم تُحدد كمحنيات A أو B أو C) المذكورة في (T11.1a)، كدوال لـ r/R على نفس الرسم البياني في ورقة الإجابات الملخصة، وقم بتسميتها بالكميات الخاصة بها.

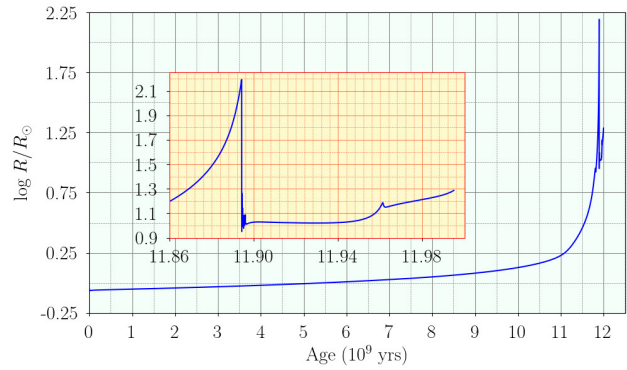
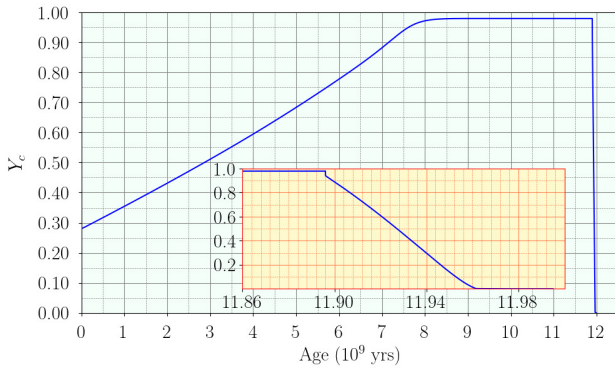
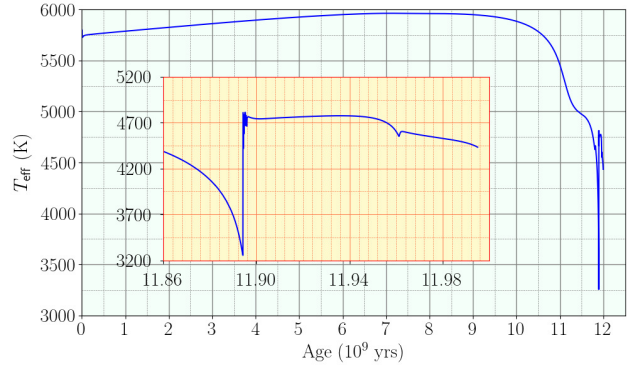
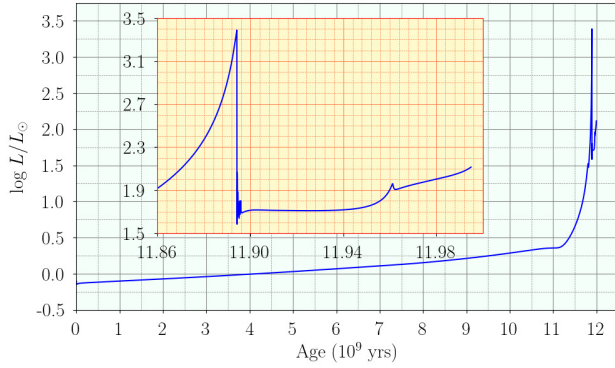
(T11.2) الجزء 2: تطور النجوم

اعتبر تطور نجم $1M_{\odot}$ الذي يتكون في البداية بشكل موحد من خلال الكسور الكتلية للهيليوم، $Y_0 = 0.28$ ، والمعادن، $Z_0 = 0.02$. تُظهر الأشكال أدناه تغير الكميات العالمية المختلفة لهذا النجم أثناء تطوره من ZAMS (التسلسل الرئيسي لعمر الصفر) حتى نهاية احتراق الهيليوم في نواته.

يوضح الرسم البياني أدناه مسار تطور النجم على مخطط HR (رسم $\log L/L_{\odot}$ مقابل $\log T_{\text{eff}}$). حيث L هو اللمعان السطحي و T_{eff} هو درجة الحرارة الفعالة).



الشكل أدناه يحتوي على أربعة رسوم بيانية تُظهر تغير T_{eff} (بالكلفن)، L (مرسوم كـ $\log L/L_{\odot}$)، R (مرسوم كـ $\log R/R_{\odot}$)، و Y_c مع العمر (بـ 10^9) لنفس النجم. في كل من هذه الرسوم البيانية الأربعة، تُظهر المربعات الصغيرة التغيرات في الكميات المعنية بالتفصيل بين الأعمار $10^9 \times 11.86$ سنة إلى $10^9 \times 12.00$ سنة، لمزيد من الوضوح.



استخدم هذه الرسوم البيانية للإجابة على الأسئلة أدناه.

- [11] (T11.2a) ما هو العمر التقريبي في التسلسل الرئيسي، t_{MS} (بالسنوات)، للنجم؟

(T11.2b) ما هي المدة التقريبية، Δt_{He} (بالسنوات)، التي يحرق فيها النجم الهيليوم في [1] نواته؟

(T11.2c) ما هي النسبة، f_H ، من الهيدروجين الأولي في مركزه الذي تم حرقه عندما يكون [3] لمعان النجم $1 L_{\odot}$ ؟

(T11.2d) ما هو نصف قطر النجم، R_1 (بوحدة R) عندما يتم حرق 60% من الكمية الأولية من [3] الهيدروجين في مركزه؟

(T11.2e) ما هي أنصاف أقطار النجم، R_P و R_Q (بوحدة $R_{\odot}$)، التي تتوافق مع مواقعه P و Q ، على التوالي، كما هو موضح في مخطط HR؟

(T11.3) الجزء 3: توزيع الكتلة داخل النجم

المعادلة التي تحكم توزيع الكتلة داخل النجم تُعطى بواسطة

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

سيكون من الملائم التعبير عن هذه المعادلة من حيث ثلاثة متغيرات بلا أبعاد، وهي الكتلة النسبية، q ، نصف القطر النسبي، x ، والكثافة النسبية، σ ، التي نعرفها كالتالي

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

حيث M و R هما الكتلة الكلية ونصف القطر الكلي للنجم، على التوالي، و $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ هي الكثافة المتوسطة للنجم. بالنسبة للنجم المحدد الذي سننظر فيه في هذا الجزء، تُعطى المعلومات التالية:

- الكثافة المركزية $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$
- نصف كتلة النجم موجودة داخل 25% من نصف قطره الكلي، و 70% من كتلته موجودة داخل 35% من نصف قطره الكلي.

في جميع الأجزاء اللاحقة من هذا السؤال، سيكون من الكافي تقريب جميع المعاملات العددية المستنتجة إلى 0.005.

(T11.3a) عبر عن المعادلة أعلاه التي تصف اعتماد الكتلة على نصف القطر من حيث x ، $\frac{dq(x)}{dx}$ و $\sigma(x)$. [2]

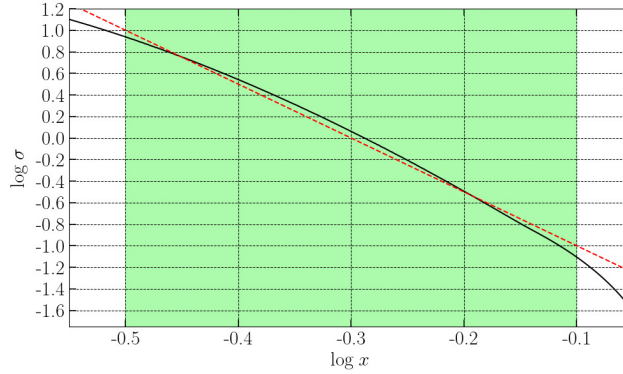
للحصول على توزيع الكتلة مع نصف القطر، نحتاج إلى معرفة توزيع الكثافة داخل النجم. من أجل هذه المسألة، سوف نصف تغير الكثافة مع نصف القطر بأشكال تقريبية في مجالين من x :

- الجزء الداخلي من النجم: $0 \leq x \leq 0.32$
- الجزء الأوسط من النجم: $0.32 < x < 0.80$

لا نقوم بأي تقريب للجزء الخارجي، أي $0.80 \leq x \leq 1.00$.

(T11.3b) التقريب للجزء الأوسط:

يظهر تغير $\log \sigma$ كدالة $\log x$ في الجزء الأوسط من النجم (بالمنحنى الأسود) في الرسم البياني أدناه. سنقوم بعمل تقريب خطي (يظهر كخط أحمر متقطع في الرسم البياني) $\log \sigma$ كدالة $\log x$ في المجال $-0.5 < \log x < -0.1$ ، أي $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (يظهر بالمجال المظلل بالأخضر). بالإضافة إلى ذلك، سنقوم بتقريب ميل هذا الخط إلى أقرب عدد صحيح.



[4] استخدم هذا التقريب لكتابة تعبير لـ $\sigma(x)$ كدالة لـ x في المجال $0.32 < x < 0.80$.

[6] (T11.3c) استخدم نتيجة (T11.3b) لاشتقاق تعبير لـ $q(x)$ في المجال $0.32 < x < 0.80$.

(T11.3d) **التقريب للجزء الداخلي:**

[8] في الجزء الداخلي من النجم ($0 \leq x \leq 0.32$)، يمكن تقريب الكثافة كدالة خطية لنصف القطر، أي $\sigma(x) = Ax + B$ ، حيث A, B هما ثوابت. حدد A و B ، ومن ثم احصل على تعبير لـ $q(x)$ في المجال $0 \leq x \leq 0.32$. لاحظ أن التقريبات المتبناة في الجزء السابق وهذا الجزء قد تؤدي إلى انقطاعات صغيرة في الكثافة أو الكتلة عند $x = 0.32$.

[4] (T11.3e) التعابير $q(x)$ التي تم الحصول عليها في الأجزاء (T11.3c) و (T11.3d) هي تقريبات تصف تغير الكتلة مع نصف القطر بشكل جيد، ولكن فقط في مناطق محددة من النجم. بالنسبة للمجال $0.80 \leq x \leq 1$ (الذي لم نستخرج له أي تعبير)، من الممكن استخدام الاستقراء المناسب من المنطقة المجاورة. استخدم هذه التعابير التقريبية والبيانات المعطاة لرسم منحنى سلس (بدون أي انقطاعات سواء في $q(x)$ أو مشتقته) لـ $q(x)$ مقابل x لكامل النجم ($0 \leq x \leq 1$) الذي يمثل تغير الكتلة مع نصف القطر.

[50 علامة]

(T12) **إشعاع هوكينغ من الثقوب السوداء**

(T12.1) يتشكل الثقب الأسود عادةً نتيجة الانهيار الجاذبي لنجم ضخم في نهاية دورة حياته إلى نقطة تُسمى التفرد (Singularity). بسبب الجاذبية الشديدة لهذا الجسم، لا يمكن لأي شيء يدخل ما يُسمى أفق الحدث (وهو سطح كروي عند $r = R_{SC}$ ، حيث r هي المسافة من التفرد) أن يهرب منه. هنا، يُشار إلى R_{SC} على أنه نصف قطر شوارزشيلد.

(T12.1a) **نمذجة أصل إشعاع هوكينغ:** افرض جسمين، كل منها بكتلة m ، يوجدان على جانبي أفق الثقب الأسود. يكون أحد الجسيمات خارج الأفق قليلاً عند $r \approx R_{SC}$ ، بينما يكون الجسيم الآخر داخل الأفق عند $r = \kappa R_{SC}$. افترض أن الطاقة الكلية للجسيم هي مجموع طاقة كتلته الساكنة mc^2 وطاقة الجاذبية بسبب الثقب الأسود.

[4] حدد قيمة κ التي تكون عندها الطاقة كلية تساوي صفراً.

(T12.1b) **درجة حرارة الثقب الأسود:** إذا كان الجسم الناتج خارج الأفق في العملية أعلاه يمتلك طاقة حركية كافية، فقد يتمكن من الهروب من الثقب الأسود في عملية تسمى إشعاع هوكينغ. أما الجسيم داخل الأفق، الذي يمتلك طاقة سالبة، فيتم امتصاصه مما يقلل من كتلة الثقب الأسود.

افترض أن كل إشعاع هوكينغ يتكون من فوتونات ذات طيف جسم أسود تصل ذروته عند الطول الموجي $\lambda_{bb} \approx 16 R_{SC}$. ومن المعروف أن الثقب الأسود بكتلة شمسية له نصف قطر شوارزشيلد $R_{SC, \odot} = 2.952 \text{ km}$.

استخرج تعبيراً لدرجة الحرارة T_{bh} للثقب الأسود المرتبط بهذا الإشعاع للجسم الأسود، بدلالة كتلته M_{bh} والثوابت الفيزيائية. احسب نصف قطر شوارزشيلد $R_{SC, 10\odot}$ ودرجة الحرارة $T_{bh, 10\odot}$ لثقب أسود بكتلة $10 M_{\odot}$.

(T12.1c) **فقدان الكتلة للثقب الأسود:** افترض أن إشعاع هوكينغ ينبعث من أفق الحدث.

باستخدام معادلة تكافؤ الكتلة والطاقة، عبر عن معدل فقدان الكتلة، $dM_{bh}(t)/dt$ ، بدلالة الكتلة $M_{bh}(t)$ للثقب الأسود والثوابت الفيزيائية.

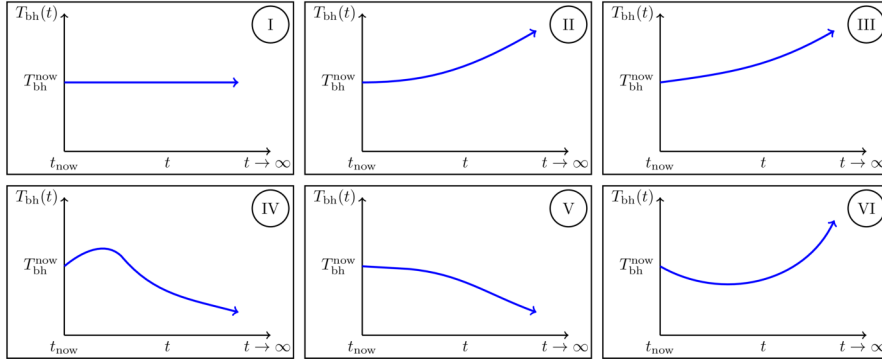
[8] وبالتالي، احصل على تعبير لكتلة الثقب الأسود $M_{bh}(t)$ إذا كانت كتلته الابتدائية M_0 . ارسم $M_{bh}(t)$ كدالة لـ t من $M_{bh} = M_0$ إلى $M_{bh} = 0$.

(T12.1d) **عمر الثقب الأسود:** احصل على تعبير للزمن τ_{BH} الذي عنده يتبخر ثقب أسود بكتلة ابتدائية M_0 تمامًا نتيجة إشعاع هوكينغ، بدلالة M_0 والثوابت الفيزيائية. احسب العمر $\tau_{bh, 10\odot}$ (بالثواني) لثقب أسود بكتلة $M_0 = 10 M_{\odot}$.

يمكن لكتلة الثقب الأسود أن تزداد عن طريق امتصاص إشعاع CMB، ويفقد كتلته عن طريق إشعاع هوكينغ.

(T12.1e) **الثقب الأسود في حوض إشعاع CMB:** اعتبر ثقباً أسود معزولاً في الفضاء، بعيداً عن الأجسام الأخرى، بدرجة حرارة حالية T_{bh}^{now} ، محاطاً بالخلفية الكونية المايكرويفية (CMB) بدرجة حرارة حالية $T_{cmb}^{now} = 2.7 \text{ K}$.

مع الأخذ في الاعتبار التوسع المتسارع للكون، حدد أي من الأشكال التالية يظهر التطور الزمني طويل الأمد لـ T_{bh} في الحالات الثلاث التالية:
(X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



[6] حدد إجابتك بوضع علامة في المربع المناسب (واحد فقط) لكل حالة X, Y أو Z في الجدول المعطى في ورقة الإجابات الملخصة المقابلة لرقم الشكل المناسب.

(T12.2) يمكن أن تتشكل الثقوب السوداء البدائية (PBHs) ذات الكتل الأصغر بكثير في وقت مبكر في الكون. جميع الأسئلة التالية تتعلق بالثقوب السوداء البدائية. يمكن إهمال أي عمليات تزيد من كتلة الثقب الأسود.

(T12.2a) **تبخر الثقوب السوداء البدائية في العصر الحالي:** كما قد تكون لاحظت من الإجابات على الأسئلة السابقة، فإن الثقوب السوداء ذات الكتلة الشمسية ستستغرق وقتاً طويلاً لتتبخر. ومع ذلك، نظراً لأن الثقوب السوداء البدائية يمكن أن تكون ذات كتلة أصغر بكثير، فقد تتمكن من رؤيتها تتبخر في الأوقات الحالية.

[4] أوجد الكتلة الأولية $M_{0, \text{PBH}}$ (بالكيلوغرام)، ونصف قطر شوارزشيلد $R_{\text{SC, PBH}}$ (بالمتر)، ودرجة الحرارة T_{PBH} (بالكلفن) للثقب الأسود الذي قد يكون في طور التبخر الكامل في العصر الحالي، أي تلك التي لها عمر $\tau_{\text{PBH}} = 14$ مليار سنة.

(T12.2b) **تكوين ثقب أسود بدائي (PBH):** في الكون المبكر المهيمن عليه الإشعاع، يتغير معامل المقياس بالمعادلة $a(t) \sim t^{1/2}$. في هذه الحقبة، تتكون الثقوب السوداء البدائية نتيجة لانقار كل الطاقة المحتواة في منطقة بحجم فيزيائي ct ، حيث t هو عمر الكون في ذلك الوقت.

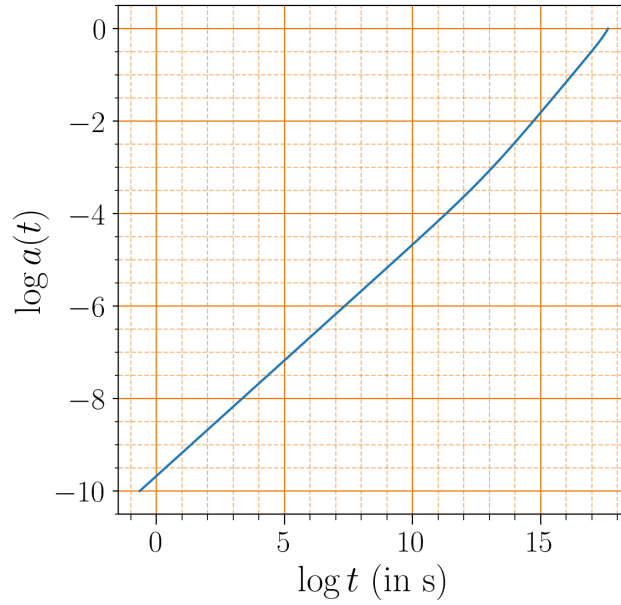
[6] يتكون ثقب أسود بدائي بكتلة $1 \times 10^{12} \text{ kg}$ عندما يكون عمر الكون حوالي $1 \times 10^{-23} \text{ s}$. احسب عمر الكون، t_{20} ، عندما يتكون ثقب أسود بدائي بكتلة $1 \times 10^{20} \text{ kg}$.

(T12.2c) **الطيف المرصود لإشعاع هوكينغ من PBH:** اعتبر PBH بكتلة ابتدائية $1 \times 10^{10} \text{ kg}$ والذي يتبخر تمامًا في نهاية عمره τ_{PBH} . لتبسيط المسألة، افترض أن معظم إشعاع هوكينغ ينبعث في هذا الوقت، مع درجة حرارة تتوافق مع كتلته الابتدائية. أيضًا، اعتبر أن عامل المقياس للكون يتغير بالعلاقة $a(t) \sim t^{2/3}$.

[5] احسب الطول الموجي الذي يكون عنده أعلى شدة لإشعاع هوكينغ عند رصده على الأرض، λ_{earth} ، في العصر الحالي (عند $t = 14$ مليار سنة).

(T12.2d) **الإشعاع الكوني عالي الطاقة من الثقوب السوداء الأولية:** افترض الآن أن إشعاع هوكينغ المنبعث في وقت معين t يتوافق مع فوتونات منبعثة بطاقة $k_B T_{\text{bh}}(t)$. أيضًا، أعلى درجة حرارة ممكنة للثقب الأسود هي درجة حرارة بلانك T_{Planck} حيث $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19} \text{ GeV}$.

يظهر تطور عامل المقياس عبر النطاقات الزمنية ذات الصلة في الشكل التالي. تم تعيين عامل المقياس اليوم ليكون واحدًا. $t(s)$ على محور الزمن يمثل عمر الكون بالثواني.



- [10] إذا تم رصد فوتون بطاقة $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20} \text{ eV}$ على الأرض، حدد القيم القصوى والدنيا الممكنة للكتلة الأولية للثقب الأسود الأولي ($M_0^{\min}$ و $M_0^{\max}$) على التوالي) والتي يمكن أن تكون مسؤولة عن هذا الفوتون.