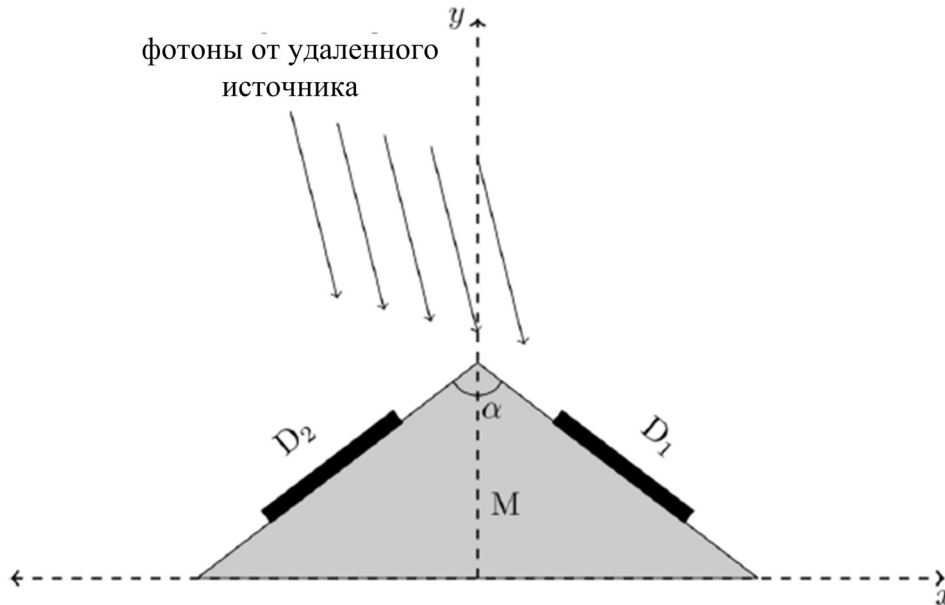


(T01) Миссия «Дакша»
[10 баллов]

«Дакша» — предлагаемая индийская миссия, состоящая из двух спутников S_1 и S_2 вращающихся вокруг Земли по одной круговой орбите радиусом $r = 7000$ км, но фазовым сдвигом 180° . Эти спутники наблюдают за Вселенной в области высоких энергий (рентгеновское и γ -излучение). Каждый из спутников «Дакши» использует несколько плоских прямоугольных детекторов.

Чтобы понять, как определить положение источника на небе, воспользуемся упрощённой моделью миссии «Дакша». Предположим, что у S_1 есть только два одинаковых детектора D_1 и D_2 площадью $A = 0,50$ м² каждый, закреплённых на непрозрачном основании M , как показано на рисунке ниже. Детекторы расположены симметрично относительно оси y в плоскостях, перпендикулярных плоскости $x - y$ и образуют угол $\alpha = 120^\circ$ друг с другом.



- (T01.1) При наблюдении за удалённым источником, расположенным в плоскости $x - y$, детектор D_1 регистрирует мощность $P_1 = 2,70 \times 10^{-10}$ Дж с⁻¹, а детектор D_2 регистрирует мощность $P_2 = 4,70 \times 10^{-10}$ Дж с⁻¹.

Оцените угол η , между направлением на источник и положительной осью y , при этом угол [5]
против часовой стрелки от положительной оси y считается положительным.

Рассмотрим одиночный импульс от удалённого источника (не обязательно в плоскости $x - y$), зарегистрированный обоими спутниками (S_1 и S_2) Дакши. Моменты пиков импульсов, зарегистрированных S_1 и S_2 равны t_1 и t_2 соответственно.

- (T01.2) Если измеренное значение $t_1 - t_2$ составило $10,0 \pm 0,1$ мс, то определите долю f небесной [5]
сферы, в которой может находиться источник.

(T02) Праздник Макар-Санкранти
[10 баллов]

Праздник Макара-Санкранти отмечается в Индии, когда Солнце входит в зодиакальный знак Козерога (Макар = Козерог, Санкранти = Вход), если смотреть с Земли. В настоящее время он отмечается ежегодно около 14 января. Много лет назад этот праздник также совпадал с зимним солнцестоянием в Северном полушарии, которое приходится на 21 декабря.

- (T02.1) На основании приведенной выше информации найдите год, y_c , когда празднование этого [3]
фестиваля в последний раз совпало с зимним солнцестоянием в северном полушарии.

(T02.2) Зная, что Солнце вошло в зодиакальный знак Козерога 14 января 2006 года в 11:50:13 по местному времени Мумбая, рассчитайте дату, D_{enter} , и местное время, t_{enter} , его вхождения в созвездие Козерога в 2013 году. [3]

(T02.3) Праздник Макара-Санкранти отмечается каждый год в первый день, когда Солнце на закате находится в зодиакальном знаке Козерога. Можно предположить, что местное время заката в Мумбае в январе — 18:30:00.

Рассчитайте дату празднования фестиваля для каждого года с 2006 по 2013 год, отметив (✓) соответствующую ячейку в таблице, приведенной в сводном листе ответов (Summary Answersheet). [4]

(T03) Гравитационные волны

[15 баллов]

Двойная система чёрных дыр, вращающихся вокруг друг друга, излучает гравитационные волны. Рассмотрим две чёрные дыры в нашей Галактике с массами $M = 36 M_{\odot}$ и $m = 29 M_{\odot}$, вращающиеся по круговым орбитам с угловой скоростью ω вокруг своего центра масс.

(T03.1) В модели ньютоновской гравитации, выведите выражение для орбитальной угловой скорости ω_{ini} чёрных дыр в момент времени t_{ini} , когда расстояние между черными дырами составляло 4.0 суммы их радиусов Шварцшильда, в величинах только M , m и физических констант.

Рассчитайте значение ω_{ini} (в рад с⁻¹).

[5]

(T03.2) Согласно общей теории относительности, чёрные дыры на орбите испускают гравитационные волны с частотой f_{GW} , такой что $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. Это сжимает орбиты чёрных дыр, что, в свою очередь, увеличивает f_{GW} . Скорость изменения f_{GW} равна

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

, где $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ называется «чирп-массой».

Найдите значения α , β и δ .

[4]

(T03.3) Предположим, что гравитационные волны от этой системы были впервые обнаружены в момент времени $t_{\text{ini}} = 0$. [6]

Выведите выражение для наблюдаемого времени слияния черных дыр, t_{merge} , когда f_{GW} становится очень большим, в величинах только ω_{ini} , M_{chirp} и физических констант. Рассчитайте значение t_{merge} (в секундах).

(T04) Бальмеровский декремент

[15 баллов]

Рассмотрим звезду главной последовательности, окруженную туманностью. Наблюдаемая звёздная величина звезды в полосе V составляет 11,315^m. Ионизованная область туманности, близкая к звезде, излучает линии H α и H β с длинами волн 0,6563 мкм и 0,4861 мкм соответственно. Теоретически предсказываемое отношение потоков в линиях H α к H β составляет $f_{\text{H}\alpha}/f_{\text{H}\beta} = 2.86$. Однако, так как это излучение проходит через внешнюю холодную часть пылевой туманности, наблюдаемые потоки излучения линий H α и H β составляют $6,80 \times 10^{-15}$ Вт м⁻² и $1,06 \times 10^{-15}$ Вт м⁻² соответственно.

Межзвёздное поглощение A_{λ} зависит от длины волны и выражается как

$$A_\lambda = \kappa(\lambda) \cdot E(B - V).$$

Здесь $\kappa(\lambda)$ — кривая поглощения, а $E(B - V)$ обозначает избыток цвета в полосах фильтра В и V. Кривая поглощения (где λ выражена в мкм) имеет следующий вид.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

где $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ — отношение полного поглощения к избытку цвета.

(T04.1) Найдите значения $\kappa(H\alpha)$ и $\kappa(H\beta)$. [3]

(T04.2) Найдите значение отношения избытков цвета $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$. [4]

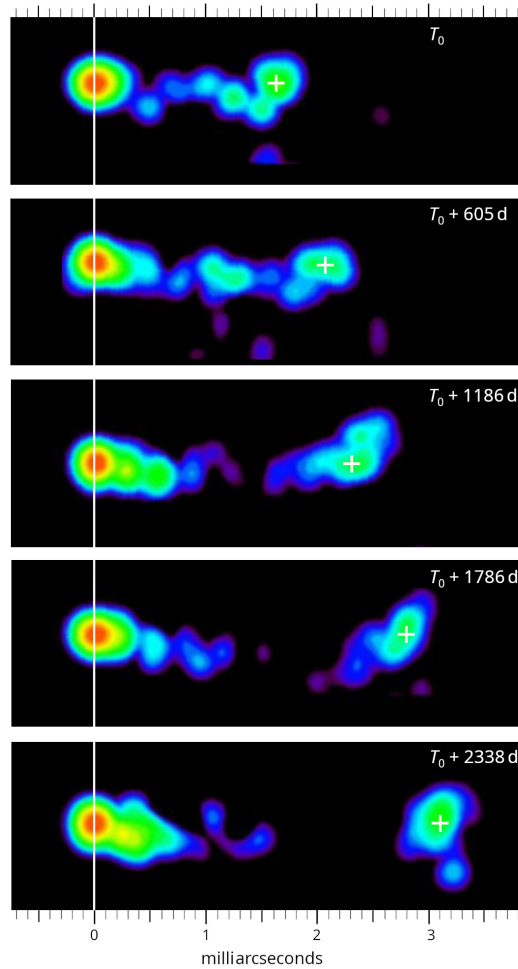
(T04.3) Оцените поглощение в туманности, $A_{H\alpha}$ и $A_{H\beta}$, на длинах волн $H\alpha$ и $H\beta$, соответственно. [6]

(T04.4) Оцените поглощение туманности (A_V), а также видимую звездную величину звезды в полосе V, m_{V0} , какая была бы при отсутствии туманности. [2]

(T05) Квазары

[20 баллов]

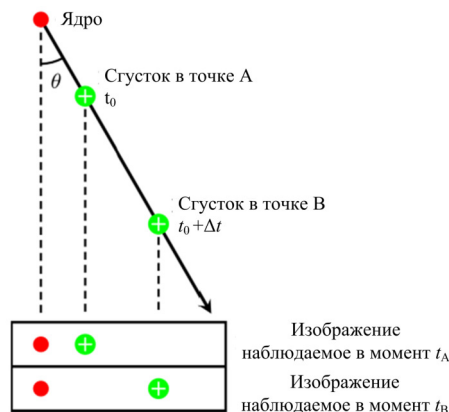
Квазар — это чрезвычайно яркая активная галактика, источником энергии которой является сверхмассивная чёрная дыра, испускающая релятивистские струи (джеты). На рисунке представлена серия радиоизображений квазара (с красным смещением $z = 0.53$ и яркостным расстоянием $D_L = 1,00 \times 10^{10}$ световых лет) в разные моменты времени. «Ядро» совпадает с вертикальной белой линией, а джет, состоящий из «сгустка» (отмеченного белым +), удаляется от него с течением времени. На каждом рисунке показано время наблюдения (начиная с T_0 для первого изображения), а угловой масштаб указан сверху и внизу рисунка.



- (T05.1) Определите угловое расстояние между сгустком и ядром квазара, ϕ_{blob} (в угловых миллисекундах), и соответствующее расстояние на картинной плоскости (плоскости перпендикулярной лучу зрения), l_{blob} (в световых годах) для каждого наблюдения. Затем рассчитайте поперечную видимую скорость сгустка (v_{app}) в долях от скорости света, $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ для каждой пары последовательных наблюдений. Рассчитайте среднюю поперечную видимую скорость $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ за весь период наблюдений. [5]

На самом деле струя квазара движется с релятивистской скоростью $v \equiv \beta c$, но не обязательно в плоскости неба (картинной плоскости); она образует угол θ («угол ориентации») по отношению к лучу зрения удаленного наблюдателя (отмеченного штриховыми линиями), как показано на рисунке ниже.

В этой и всех последующих частях игнорируйте красное смещение квазара и релятивистские эффекты.



- (T05.2) Свет, испускаемый сгустком в два разных момента времени t_0 (соответствует положению А) и $t_0 + \Delta t$ (соответствует положению В), достигает наблюдателя в моменты времени t_A и t_B соответственно. Таким образом, наблюдаемая разница во времени равна $\Delta t_{app} = t_B - t_A$.
- (T05.2a) Найдите выражение для отношения $\frac{\Delta t_{app}}{\Delta t}$ в величинах β и θ . [2]
- (T05.2b) Используя это соотношение, выразите β_{app} в величинах β и θ . [2]
- (T05.3) Движение называется сверхсветовым, если видимая скорость превышает скорость света ($\beta_{app} > 1$), и досветовым, если нет ($\beta_{app} < 1$).
- (T05.3a) Для $\beta_{app} = 1$ постройте гладкую кривую зависимости β от θ чтобы обозначить границу между досветовыми и сверхсветовыми движениями. Заштрихуйте сверхсветовую область на графике наклонными линиями (///). [4]
- (T05.3b) Найдите наименьшую истинную скорость струи ($\beta_{low} = v_{low}/c$), при которой может возникнуть сверхсветовое движение, а также соответствующий ей угол ориентации θ_{low} . [2]
- (T05.4) Найдите выражение для максимального угла ориентации, θ_{max} , для которого будет возможно заданное значение β_{app} . [2]
- Ядро квазара, его центральный компактный объект, демонстрирует переменность излучения, обусловленную внутренними процессами, происходящими в причинно-связанной области. Размер (= радиус) этой области обычно принимается равным примерно пяти радиусам Шварцшильда ядра.
- (T05.5) Обнаружено, что ядро определённого квазара меняется с периодом около 1 часа. Получите верхний предел, $M_{c, max}$, для массы центрального компактного объекта в единицах массы Солнца. [3]

(T06) Вращение Галактики

[20 баллов]

Кривую вращения нашей Галактики можно определить с помощью измерений лучевой скорости облаков нейтрального водорода (HI) на различных галактических долготах, наблюдаемых на линии HI 21 см. Рассмотрим облако HI с галактической долготой l , расположенное на расстоянии R от галактического центра (ГЦ) и на расстоянии D от Солнца. Солнце находится на расстоянии $R_0 = 8,5$ кпк от ГЦ. Предположим, что и Солнце, и облако HI движутся по круговым орбитам вокруг ГЦ в галактической плоскости с угловыми скоростями Ω_0 и Ω , и линейными скоростями V_0 и V , соответственно.

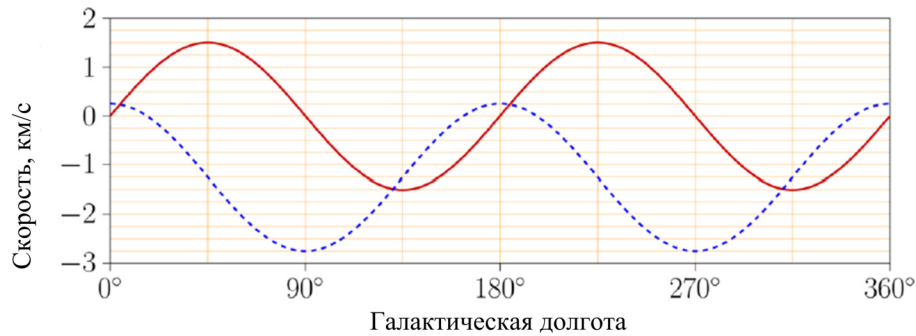
Компоненты лучевой (V_r) и поперечной скорости (V_t) облака, наблюдаемые с Солнца, можно выразить как

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

При наблюдении с Северного галактического полюса вращение Галактики происходит по часовой стрелке. В этой задаче мы будем считать лучевую скорость положительной при удалении, а облака будем рассматривать как точечные объекты.

- (T06.1) На графике в листе ответов приблизительно изобразите зависимость V_r от D в диапазоне от $D = 0$ до $D = 2R_0$ для двух лучей зрения, заданных углами (i) $l = 45^\circ$ и (ii) $l = 135^\circ$. На каждой из ваших линий/кривых отметьте значения l . [5]
- (T06.2) На графике, представленном ниже, показаны средняя радиальная (сплошная красная кривая) и поперечная (пунктирная синяя кривая) компоненты скорости звезд на расстоянии 100 пк от Солнца, построенные как функция галактической долготы.



Используя график, оцените период обращения Солнца (P) вокруг ГЦ в мегагодах (млн. лет, [3] Myr).

- (T06.3) Ян Оорт отметил, что в окрестности Солнца ($D \ll R_0$) разность угловых скоростей ($\Omega - \Omega_0$) мала, и вывел следующее приближение первого порядка для лучевой и поперечной компонент скорости:

$$\begin{aligned} V_r &= AD \sin 2l \\ V_t &= AD \cos 2l + BD \end{aligned}$$

где A и B называются постоянными Оорта.

Рассмотрим два случая:

(I) кривая вращения Галактики такая, как наблюдается, и

(II) кривая вращения соответствует гипотетическому сценарию, в котором Галактика лишена темной материи и вся масса Галактики сосредоточена в ее центре.

- (T06.3a) Выведите выражения для радиального градиента скорости вращения в месте [2]
расположения Солнца, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$, для этих двух случаев.

- (T06.3б) Выразите A и B в величинах V_0 , R_0 и радиального градиента скорости вращения [8]
в месте расположения Солнца, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$.

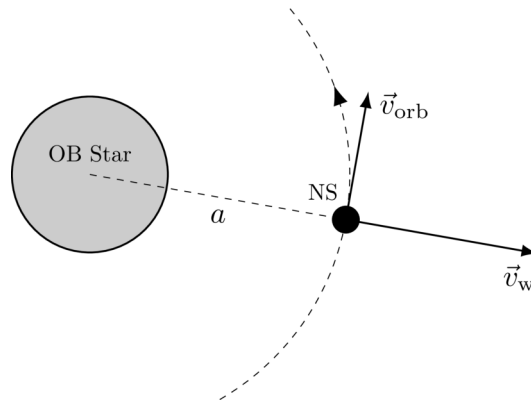
- (T06.3с) Отношение (A/B) постоянных Оорта для этих двух случаев (I) и (II) обозначим [2]
как F_I и F_{II} соответственно. Определите F_I и F_{II} .

(T07) Двойная система с нейтронной звездой

[20 баллов]

В двойной системе с компактной звездой, где звезда-компаньон не выходит за пределы своей полости Роша, основным источником аккреции для компактной звезды является звёздный ветер, исходящий от звезды-компаньона. Эта аккреция, подпитываемая ветром, особенно значительна в системах, включающих звезду раннего класса (например, O или B звезду, далее обозначаемую как OB-звезда), а также компактный объект, например, нейтронную звезду (NS), на близкой орбите.

Рассмотрим такую двойную систему NS-OB-звезд, в которой нейтронная звезда массой $M_{NS} = 2,0 M_\odot$ и радиусом $R_{NS} = 11$ км вращается по круговой орбите радиусом a вокруг центра OB-звезды со скоростью $v_{orb} = 1,5 \times 10^5$ м с⁻¹ (см. рисунок ниже). В этой задаче предполагается, что потеря массы OB-звездой сферически симметрична, а скорость потери массы равна $\dot{M}_{OB} = 1,0 \times 10^{-4} M_\odot \text{yr}^{-1}$.



- (T07.1) Радиус аккреции, R_{acc} , определяется как максимальное расстояние от NS, на котором звёздный ветер может быть захвачен ею. Скорость звёздного ветра на орбитальном расстоянии NS равна $v_w = 3,0 \times 10^6 \text{ м с}^{-1}$. Найдите R_{acc} для указанной выше системы в км, используя стандартный расчёт второй космической скорости. [3]
- (T07.2) Предполагая, что весь захваченный материал аккрецируется NS, оцените скорость аккреции массы $\dot{M}_{\text{acc}}$ из звёздного ветра на NS в единицах $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, если $a = 0,5 \text{ а.е.}$. Пренебрегите влиянием давления излучения и конечным временем остывания аккрецирующего газа. [3]
- (T07.3) Теперь рассмотрим ситуацию, когда скорость звёздного ветра на орбитальном расстоянии a (вблизи NS) становится сравнимой с орбитальной скоростью NS. Скорость аккреции массы из звёздного ветра на NS в этом случае будет определяться выражением вида $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} f(\tan \beta, q)$, где $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$ — отношение масс двойной звезды, а β — угол в системе отсчёта NS между направлением скорости ветра и радиальным направлением от OB-звезды. Получите выражение для $f(\tan \beta, q)$, полагая $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$. [6]
- (T07.4) Положим, что полностью ионизированное вещество аккрецирует радиально и тормозится сильным магнитным полем $\vec{B}$ NS. Этот эффект можно представить как давление, определяемое выражением $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Предположим, что NS имеет дипольное магнитное поле, величина которого в экваториальной плоскости меняется с расстоянием r от NS для $r \gg R_{\text{NS}}$ как

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

, где B_0 - магнитное поле на экваторе NS. Предположим, что ось магнитного диполя совпадает с осью вращения NS.

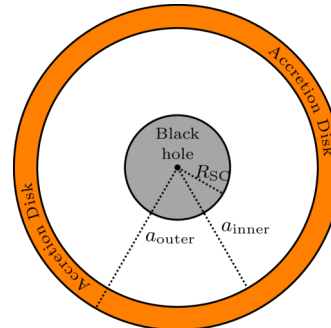
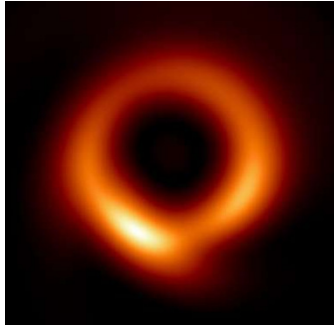
- (T07.4a) Получите выражение для магнитного давления, $P_{\text{eq, mag}}$, в экваториальной плоскости в величинах B_0 , R_{NS} , r и физических констант. [1]
- (T07.4б) Расстояние, на котором аккреционный поток останавливается магнитным полем на экваторе, называется радиусом магнитосферы R_m . Этот поток вещества будет оказывать давление вследствие относительного движения входящего звёздного ветра и NS. Получите приближённое выражение для критического магнитного поля $B_{0, \text{c}}$, при котором R_m совпадает с R_{acc} , и вычислите его значение в теслах. Магнитные эффекты не учитываются при $r > R_m$. Рассмотреть случай $v_w \gg v_{\text{orb}}$. [7]

(T08) Тень черной дыры

[20 баллов]

Телескоп Event Horizon Telescope (ЕНТ) опубликовал изображение сверхмассивной черной дыры в центре галактики М87, которое показано на левом рисунке ниже.

Чтобы понять некоторые простые особенности этого изображения, рассмотрим упрощённую модель невращающейся, статической, сферически симметричной чёрной дыры массой $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$, окружённой безмассовым тонким плоским аккреционным диском с внутренним и внешним радиусами $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ и $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$ соответственно, где R_{SC} — радиус Шварцшильда. Эскиз модели показан на правом рисунке ниже (масштаб не соблюлён).



Мы предполагаем, что аккреционный диск — единственный источник света. Каждая точка диска излучает свет во всех направлениях. Этот свет распространяется в гравитационном поле чёрной дыры. Траектории световых лучей описываются двумя уравнениями, приведёнными ниже (аналогичными уравнениям для объекта, вращающегося вокруг Солнца):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

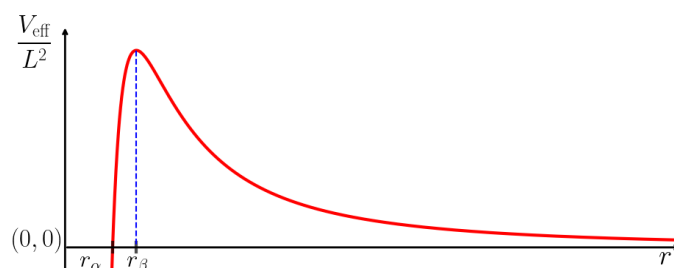
, где $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ — радиальная координата, $\phi \in [0, 2\pi)$ — азимутальный угол, а E и L — константы, связанные с законами сохранения энергии и момента импульса соответственно.

Здесь $v_r \equiv dr/dt$ — величина радиальной скорости, v_ϕ — величина тангенциальной скорости, а $\omega \equiv d\phi/dt$ — угловая скорость. Прицельный параметр b для траектории определяется как $b = L/\sqrt{2E}$. Эффект замедления времени в этой задаче не учитывается.

Другое полезное уравнение получается путем дифференцирования первого уравнения:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

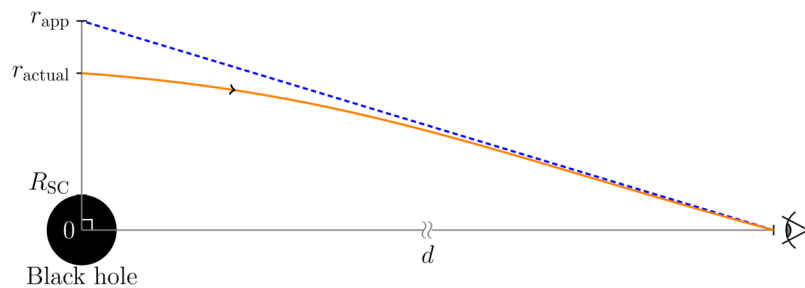
- (T08.1) Вокруг чёрной дыры могут существовать круговые траектории световых лучей. Найдите [4]
радиус r_{ph} и прицельный параметр b_{ph} таких траекторий в величинах M и физических констант.
- (T08.2) Рассчитайте время T_{ph} , необходимое для совершения светом одного полного оборота по [2]
круговой траектории в секундах.
- (T08.3) Приведённое выше уравнение для радиальной скорости можно сравнить с уравнением вида $\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ для траекторий света. Ниже представлен схематический график зависимости V_{eff}/L^2 от r .



(T08.3a) На графике показаны два значения радиуса: r_α и r_β . Получите выражения для r_α [2] и r_β через M и физические константы.

(T08.3б) Фотон, движущийся к чёрной дыре от аккреционного диска, в некоторых случаях [3] всё ещё может уйти от нее на бесконечность. Найдите выражение для наименьшего значения радиуса точки поворота r_t для такого фотона через M и физические константы. Найдите выражение для наименьшего значения прицельного параметра $b_{\min}$ для этого фотона.

(T08.4) Луч света, исходящий из точки, лежащей в картинной плоскости на расстоянии r_{actual} от центра системы, будет сильно искривлен под действием гравитации черной дыры и достигнет наблюдателя, находящегося на большом расстоянии d от системы, как показано ниже на рисунке.



Для этого наблюдателя луч будет казаться исходящим из другой точки картинной плоскости, находящейся на расстоянии $r_{\text{app}} \approx b$ от центра чёрной дыры, где b — прицельный параметр траектории данного фотона. Для точек аккреционного диска с $r = r_{\text{actual}}$ можно использовать следующее соотношение:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

Удалённый наблюдатель смотрит на аккреционный диск, расположенный в картинной [5] плоскости. Тогда изображение системы будет иметь круговую симметрию. Определите радиус внешнего r_{outer} и внутреннего r_{inner} края изображения в единицах а.е.

(T08.5) Рассмотрим изолированную сверхмассивную чёрную дыру массой $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$ без аккреционного диска. В точке Z на расстоянии $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ от чёрной дыры, происходит кратковременная мощная вспышка электромагнитного излучения с продолжительностью 5 с (смотри рисунок). Вспышка в точке Z испускает свет во всех направлениях. Наблюдатель, находящийся в точке, удалённой от чёрной дыры (обозначенной на рисунке глазом), делает снимок области вокруг чёрной дыры с длительностью выдержки 60 с.



Выберите правильный вариант для каждого из приведенных ниже утверждений:

(T08.5a) Количество возможных траекторий распространения света от точки Z до [2] наблюдателя
(A) Не более одного (B) Ровно один (C) Ровно два (D) Больше двух.

(T08.5б) Количество изображений электромагнитной вспышки в точке Z , которые будут [2] видны на изображении с этой длительной выдержкой
(A) Не более одного (B) Ровно один (C) Ровно два (D) Больше двух.

(T09) Атмосферная видимость
[35 баллов]

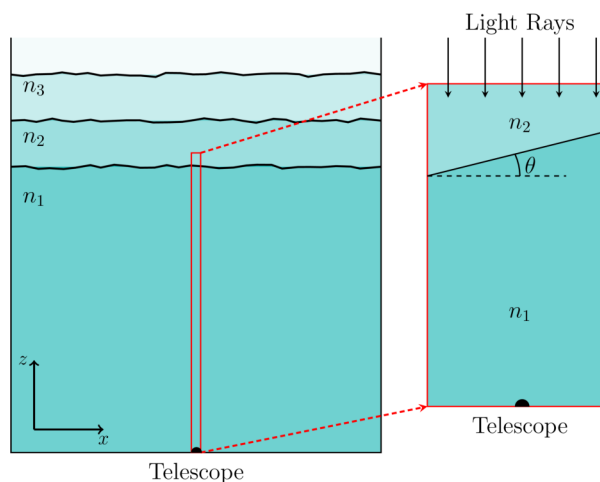
Телескоп с ахроматическим выпуклым объективом диаметром $D = 15$ см и фокусным расстоянием $f = 200$ см направлен на звезду в зените.

- (T09.1) Найдите диаметр (в метрах) d_{image} изображения точечного источника, создаваемого объективом в его фокальной плоскости для зеленого света ($\lambda = 550$ нм), учитывая только эффекты дифракции. **[1]**

На изображение астрономического источника влияет также так называемая «атмосферная видимость».

Границы между слоями атмосферы, а также показатели преломления этих слоёв непрерывно меняются под воздействием турбулентности, колебаний температуры и других факторов. Это приводит к небольшим изменениям положения изображения в фокальной плоскости телескопа, известным как «эффект мерцания». В остальной части задачи, за исключением дифракционного ограничения конечного размера изображения звезды, о котором говорилось выше, никакие интерференционные эффекты рассматриваться не будут.

На левом рисунке, представленном ниже, показано вертикальное сечение атмосферы с несколькими слоями с различными показателями преломления ($n_1, n_2, n_3, \dots$). На правом рисунке показан увеличенный вид тонкого вертикального сегмента атмосферы и границы между двумя самыми нижними слоями атмосферы с показателями преломления n_1 и n_2 ($n_1 > n_2$). В данной задаче мы рассматриваем только эти два слоя и их границу. Масштаб на диаграммах не соблюден.



- (T09.2) Пусть граница между двумя слоями находится на высоте $H = 1$ км прямо над объективом телескопа и наклонена на $\theta = 30^\circ$ к горизонту. Во всех частях этой задачи θ отсчитывается в направлении против часовой стрелки. Дан монохроматический источник света, $n_1 = 1,00027$ и $n_2 = 1,00026$. Пусть угловое смещение положения изображения в фокальной плоскости телескопа для звезды в зените равно α .

- (T09.2a) Нарисуйте соответствующим образом помеченную диаграмму лучей вблизи границы слоев, отмечая n_1, n_2, θ и α . **[2]**

- (T09.2b) Найдите выражение для α в величинах θ, n_1 и n_2 . Используйте приближения малых углов: $\sin \alpha \approx \alpha$ и $\cos \alpha \approx 1$. **[2]**

- (T09.2c) Рассчитайте смещение Δx_θ (в м) в положении изображения, если θ увеличивается на 1% (n_1 и n_2 остаются неизменными). **[3]**

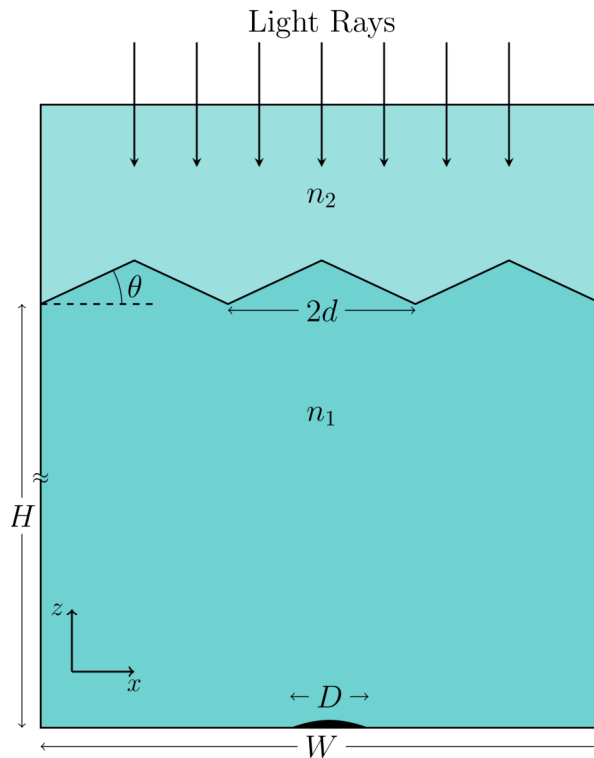
- (T09.2d) Рассчитайте смещение Δx_n (в м) в положении изображения, если n_2 увеличивается на 0,0001% (n_1 и θ остаются неизменными). **[3]**

- (T09.3) Для белого света, исходящего от звезды в зените, выберите, какой из следующих вариантов наиболее точно описывает форму и цвет изображения, отметив (✓) соответствующую ячейку (только одну) в сводном листе с ответами. [2]

	Цвет изображения	Форма изображения	Левый край	Правый край
A	Белый	Круговая		
B	Белый	Эллиптическая		
C	Цветной	Круговая	Синий	Красный
D	Цветной	Круговая	Красный	Синий
E	Цветной	Эллиптическая	Синий	Красный
F	Цветной	Эллиптическая	Красный	Синий

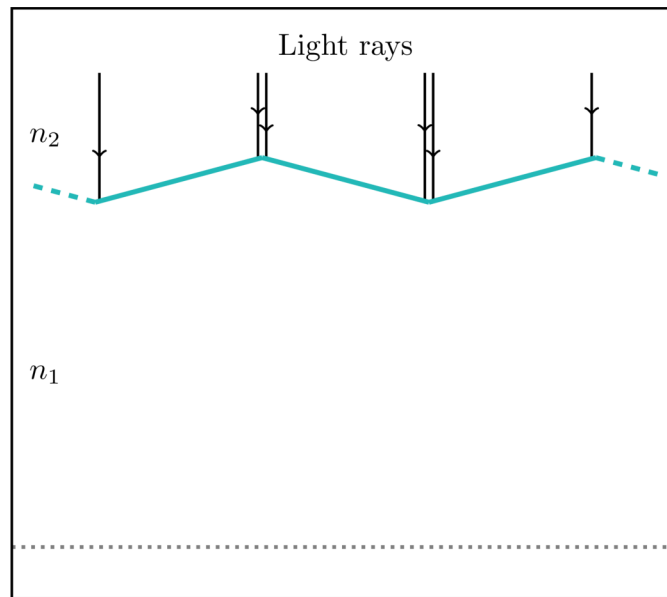
Для всех остальных частей этого вопроса мы рассматриваем монохроматический зеленый свет с $\lambda = 550$ нм. Мы моделируем границу между слоями как набор бесконечных зигзагообразных плоскостей (перпендикулярных плоскости страницы), разделённых $d = 10$ см вдоль оси x , с $\theta = 10^\circ$ или $\theta = -10^\circ$.

На рисунке ниже (не в масштабе) показано поперечное сечение этой модели атмосферы шириной W ($W \ll H$). Для телескопов с большой апертурой такой зигзагообразный характер границы приводит к образованию спеклов в фокальной плоскости.



- (T09.4) Рассмотрим атмосферу, смоделированную выше.

- (T09.4a) На схеме ниже показан участок атмосферы с последовательными зигзагообразными плоскостями с теми же параметрами, что указаны выше (не в масштабе).



На этой диаграмме, воспроизведенной в листе ответов, нарисуйте траектории падающих световых лучей до плоскости, где расположен объектив телескопа (показано серой пунктирной линией).

Отметьте на диаграмме крестиком «X» область(ы), куда не доходят световые лучи. [4]

(T09.4b) Рассчитайте ширину W_X такой(их) области(ей). [3]

(T09.4c) Найдите наибольший диаметр, $D_{\max}$, объектива телескопа, с помощью которого можно будет получить единственное изображение звезды, соответствующим образом выбрав расположение телескопа относительно структуры границы. [4]

(T09.5) Рассмотрим случай, когда предполагается зигзагообразная форма границы как в направлении x , так и в направлении y (как поле из пирамид), а $D = 100$ см (при $f = 200$ см). [6]

Нарисуйте качественную картину полученных пятен (спеклов) в рамке, приведенной в листе ответов.

(T09.6) For a turbulent atmosphere again consider the same parallelly running zigzag shape of the boundary layer only along x -direction, but now the angle between two planes are changing at a uniform rate from 10° to -10° in 1.0 s. Assume that this leads to a uniform rate of shift of the position of the image. [5]

Consider a telescope with $D = 8$ cm and $f = 1$ m. Estimate the longest exposure time $t_{\max}$ allowed for its CCD camera so that one gets only a single image, and any possible deviation in its position remains less than 1% of the diffraction limited diameter of the image.

(T10) Ядерный синтез Большого взрыва

[35 баллов]

В эпоху доминирования излучения в ранней Вселенной масштабный фактор Вселенной выражался законом $a \propto t^{1/2}$, где t — время с момента Большого взрыва. В начале этой эры нейтроны (n) и протоны (p) оставались в тепловом равновесии друг с другом посредством слабых взаимодействий. Концентрация (N) свободных нейтронов или протонов связана с температурой T и их соответствующими массами m таким образом, что

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

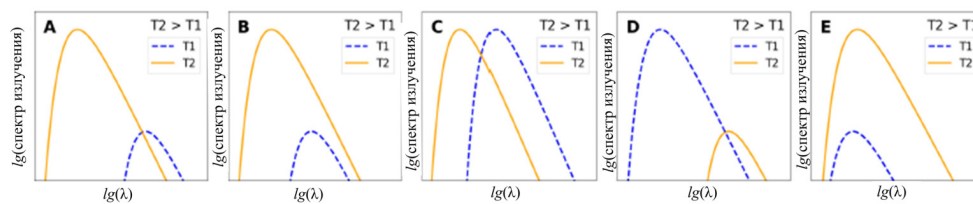
до момента времени $t \leq t_{\text{wk}} = 1.70$ с, когда $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ кэВ. После t_{wk} слабые взаимодействия больше не могут поддерживать такое равновесие, и свободные нейтроны распадаются на протоны с периодом полураспада 610.4 с.

(T10.1) Пусть концентрация протонов равна N_p , а концентрация нейтронов — N_n . Рассчитайте [4]
отношение концентрации нейтронов к суммарной концентрации нейтронов и протонов
 $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ в момент времени t_{wk} .

(T10.2) Фотоны поддерживают тепловое равновесие и сохраняют спектр черного тела во все эпохи.

(T10.2a) Найдите показатель степени β для зависимости $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Определите, какой из следующих графиков показывает правильное поведение [2]
спектральной плотности энергии для двух температур T_1 и T_2 . Отметьте (✓) правильный вариант в листе ответов.



(T10.3) После t_{wk} процесс образования дейтерия из протонов и нейтронов определяется уравнением Саха, приведенным индийским физиком профессором Мегнад Саха, которое можно упростить до

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n) c^2}{k_B T} \right).$$

. Где отношение барионов к фотонам η равно 6.1×10^{-10} , а N_D - это концентрация дейтерия.

(T10.3a) Постройте график отношения N_D/N_n на сетке в сводном листе ответов по [5]
крайней мере для 4 разумно разнесенных значений температуры, которые лежат
в диапазоне $k_B T = [60, 70]$ кэВ, и нарисуйте гладкую кривую, проходящую через
эти точки.

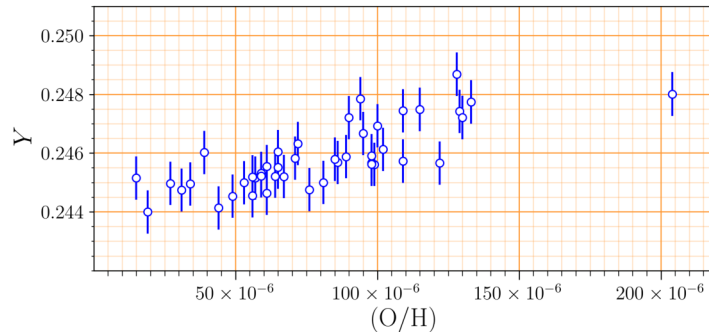
(T10.3b) Из графика найдите $k_B T_{\text{nuc}}$ (в кэВ), определяемое из $N_D = N_n$. [1]

(T10.3c) Теперь предположим, что все свободные нейтроны мгновенно соединяются с [4]
протонами при $k_B T_{\text{nuc}}$, образуя дейтерий, и весь этот дейтерий немедленно
превращается в гелий (${}^4_2\text{He}$). Вычислите соответствующее время t_{nuc} (в с) для
образования гелия.

(T10.4) Рассчитайте значение $X_{n, \text{nuc}}$ непосредственно перед t_{nuc} . [5]

(T10.5) Первоначальное содержание гелия, Y_{prim} , определяется как доля барионной массы [3]
Вселенной, которая содержится в гелии сразу после t_{nuc} . Получите теоретическую оценку
значения Y_{prim} . В этом пункте предположим, что $m_p \approx m_n$ и что масса гелия, $m_{\text{He}} \approx 4m_n$.

- (T10.6) Первичное содержание (относительная концентрация) гелия очень сложно измерить, поскольку звёзды во Вселенной непрерывно преобразуют водород в гелий. Степень переработки водорода звёздами в галактике характеризуется относительной концентрацией кислорода (который производится только звёздами) к водороду в галактике, обозначаемой как (O/H) . Ниже представлен график, иллюстрирующий измерения (O/H) и содержания гелия, Y , для различных галактик.



Используйте все точки этого графика (который воспроизведен в листе ответов), чтобы ответить на следующие вопросы.

- (T10.6a) Оцените Y для голубой компактной карликовой галактики со значением $(O/H)=1,75 \times 10^{-4}$. [2]
- (T10.6b) Получите значение наклона $dY/d(O/H)$ прямой линии, описывающей приведенные выше данные. [2]
- (T10.6c) Оцените первичное содержание гелия, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, на основе приведенных выше наблюдений. [2]
- (T10.7) Расхождение между Y_{prim} и $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ можно устранить, изменив барионно-фотонное отношение η . При уменьшении η (как указано $\downarrow$ в сводном листе ответов) укажите, будет ли происходить увеличение ($\uparrow$) или уменьшение ($\downarrow$) каждого из параметров $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (когда $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$ и Y_{prim} в полях, предоставленных в сводном листе ответов. [3]

(T11) Звезды по графикам

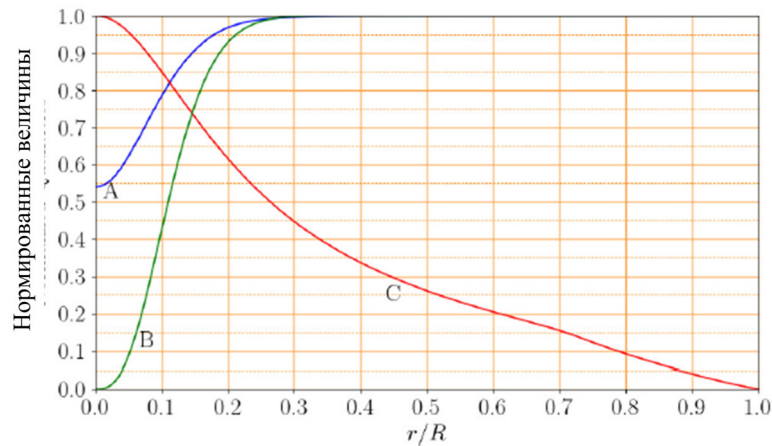
[50 баллов]

Звезды в хорошем приближении являются сферически симметричными объектами, и, следовательно, расстояние r от центра может быть выбрано в качестве единственной независимой переменной при моделировании звезд. Масса внутри сферы радиусом r обозначается как $m(r)$. Светимость $l(r)$ определяется как полная энергия, выходящая наружу через сферическую поверхность радиусом r за единицу времени. Другие интересующие нас величины, например, плотность $\rho(r)$, температура $T(r)$, массовая доля водорода $X(r)$, массовая доля гелия $Y(r)$, и ядерная энергия, генерируемая на единицу массы за единицу времени $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, считаются функциями r .

В этой задаче мы будем пренебрегать эффектами диффузии и гравитационного осаждения элементов внутри звезды. Символ "log" обозначает десятичный логарифм. Задача состоит из трех независимых частей.

(T11.1) Часть 1: Внутри звезды

На графике, приведенном ниже, показано изменение трёх структурных величин, A , B и C , как функций относительного радиуса r/R в модели звезды массой $1 M_{\odot}$ и возраста 4 миллиардов лет (Gyr), где R — радиус фотосферы звезды. Значения массовой доли гелия на поверхности (фотосфере), Y_s , и металличности (массовой доли всех элементов тяжелее гелия) на поверхности (фотосфере), Z_s звезды даны как $(Y_s, Z_s) = (0,28, 0,02)$. Все величины, показанные на графиках, нормированы на их максимальные значения.



(T11.1a) Идентифицируйте три величины A, B и C из пяти возможных: [6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Запишите A/B/C в полях рядом с соответствующими величинами в сводном листе ответов. Обоснование вашего ответа не требуется.)

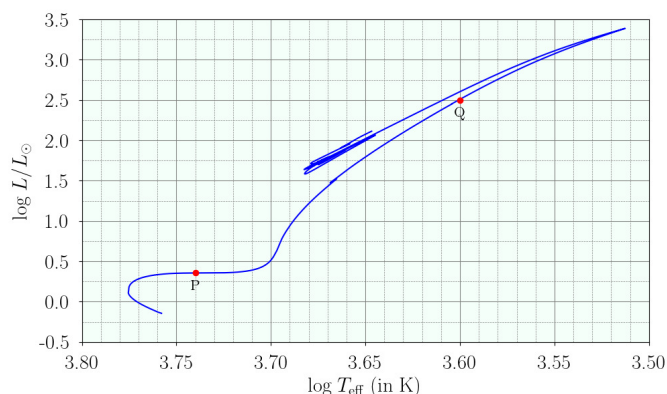
(T11.1b) Какова массовая доля гелия Y_c в центре звезды? [3]

(T11.1c) Нарисуйте оставшиеся две величины из этих пяти (которые не были обозначены как кривые A, B или C), приведенные в (T11.1a), как функции r/R на том же графике в сводном листе ответов и подпишите их. [5]

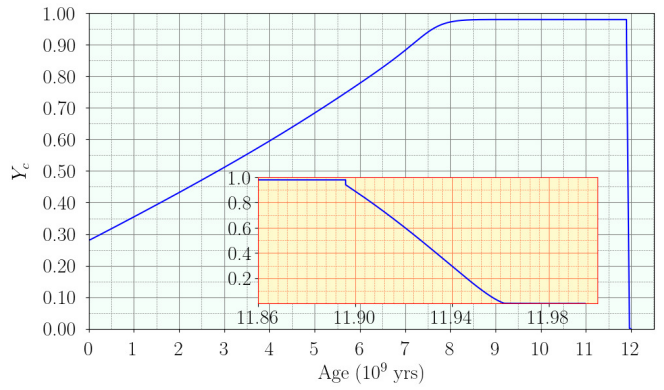
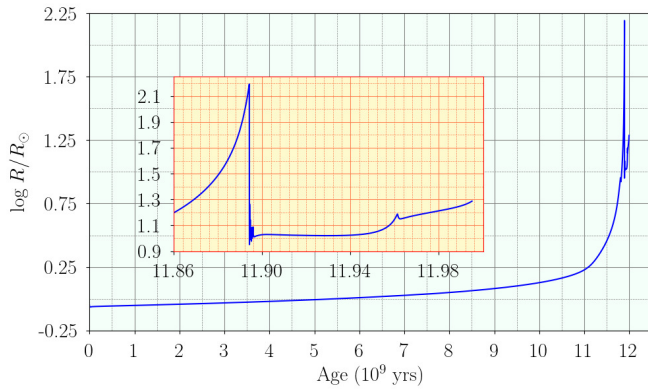
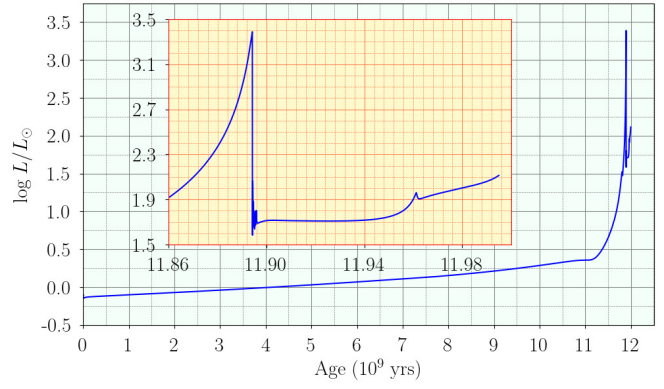
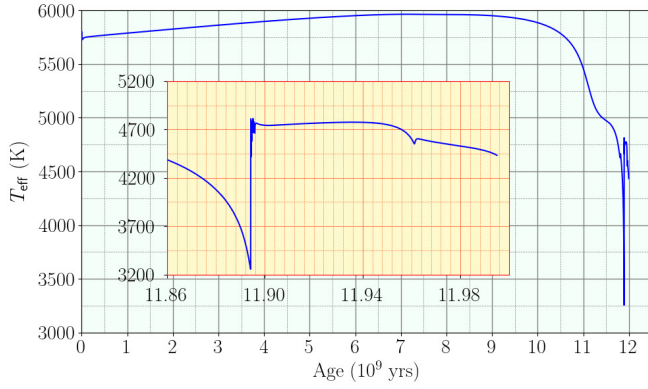
(T11.2) **Часть 2: Эволюция звезд**

Рассмотрим эволюцию звезды массой $1M_{\odot}$ чей начальный однородный состав определяется массовой долей гелия, $Y_0 = 0.28$ и металличностью $Z_0 = 0.02$. На рисунках ниже показано изменение различных глобальных величин этой звезды по мере её эволюции от ZAMS (главной последовательности нулевого возраста) до конца горения гелия в её ядре.

На графике ниже показан эволюционный трек звезды на диаграмме ГР (график зависимости $\log L/L_{\odot}$ от $\log T_{\text{eff}}$, где L — светимость звезды, а T_{eff} — эффективная температура).



На рисунке ниже представлены четыре графика, показывающие изменение T_{eff} (в K), L (показано как $\log L/L_{\odot}$), R (показано как $\log R/R_{\odot}$) и Y_c с возрастом (в 10^9 лет) одной звезды. На вставках каждого из этих четырёх графиков для большей ясности подробно показаны изменения соответствующих величин в диапазоне возрастов от $11,86 \times 10^9$ лет до $12,00 \times 10^9$ лет.



Используйте эти графики, чтобы ответить на вопросы ниже.

- (T11.2a) Какова примерная продолжительность жизни звезды на главной последовательности, t_{MS} (в годах)? [1]
- (T11.2б) Какова примерная продолжительность времени Δt_{He} (в годах), в течение которого звезда сжигает гелий в своем ядре? [1]
- (T11.2с) Какая доля начального количества водорода в ее центре, f_H , сгорела к моменту, когда светимость звезды стала $1 L_\odot$? [3]
- (T11.2д) Каков радиус звезды R_1 (в единицах $R_\odot$), когда в ее центре сгорело 60% начального количества водорода? [3]
- (T11.2е) Каковы радиусы звезды, R_P и R_Q (в единицах $R_\odot$), соответствующие положениям P и Q, отмеченным на диаграмме ГР? [4]

(T11.3) **Часть 3: Распределение массы внутри звезды**

Уравнение, описывающее распределение массы внутри звезды, задаётся формулой

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Удобнее всего выразить это уравнение через три безразмерные переменные, а именно: относительную массу q , относительный радиус x и относительную плотность σ , которые мы определим как

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

, где M и R — полная масса и радиус звезды соответственно, а $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ — средняя

плотность звезды. Для конкретной звезды, которую мы будем рассматривать в этой части, дана следующая информация:

- Центральная плотность $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$
- Половина массы звезды сосредоточена во внутренней области, составляющей 25% ее полного радиуса, а 70% ее массы сосредоточено во внутренней области, составляющей 35% ее полного радиуса.

Во всех последующих частях этого вопроса достаточно будет округлить все полученные численные коэффициенты с точностью до 0.005.

- (T11.3a) Выразите приведенное выше уравнение, описывающее зависимость массы от радиуса, в величинах x , $\frac{dq(x)}{dx}$ и $\sigma(x)$. [2]

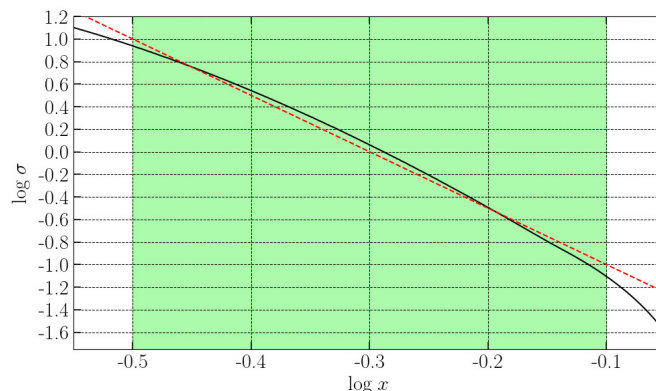
Для получения распределения массы по радиусу нам необходимо знать профиль плотности внутри звезды. Для этого мы опишем изменение плотности от радиуса приближенными формулами в двух областях изменения x :

- внутренняя часть звезды: $0 \leq x \leq 0.32$
- средняя часть звезды: $0.32 < x < 0.80$

Мы не делаем никаких приближений для внешней части, где $0.80 \leq x \leq 1.00$.

- (T11.3b) **Приближение для средней части :**

Изменение $\log \sigma$ как функции $\log x$ в средней части звезды показано (чёрной кривой) на графике приведенном ниже. Мы используем линейную аппроксимацию (показана пунктирной красной линией) для $\log \sigma$ как функции $\log x$ в диапазоне $-0.5 < \log x < -0.1$, то есть $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (диапазон показан зелёной областью). Далее мы аппроксимируем наклон этой прямой ближайшим целым числом.



Используйте это приближение, чтобы записать выражение для $\sigma(x)$ как функции x в диапазоне $0.32 < x < 0.80$. [4]

- (T11.3c) Используйте результат (T11.3b) для вывода выражения для $q(x)$ в диапазоне $0.32 < x < 0.80$. [6]

- (T11.3d) **Приближение для внутренней части :**

Во внутренней части звезды ($0 \leq x \leq 0.32$) плотность может быть аппроксимирована линейной зависимостью от радиуса, т.е. $\sigma(x) = Ax + B$, где A, B — константы. Определите A и B , и получите выражение для $q(x)$ в диапазоне $0 \leq x \leq 0.32$. Обратите внимание, что приближения, принятые в предыдущей и этой частях, могут привести к небольшим разрывам плотности или массы при $x = 0.32$. [8]

- (T11.3e) Выражения для $q(x)$ полученные в пунктах (T11.3c) и (T11.3d), являются [4]
приближениями, достаточно хорошо описывающими изменение массы с
радиусом, но только в определённых областях звезды. Для диапазона
 $0.80 \leq x \leq 1$ (для которого мы не вывели никакого выражения) можно
использовать подходящую экстраполяцию из соседнего диапазона. Используя эти
приближенные выражения и предоставленные данные, постройте гладкую
кривую (без разрывов ни в $q(x)$, ни в её производной) для $q(x)$ от x для всей
звезды ($0 \leq x \leq 1$), которая представляет собой изменение массы с радиусом.

(T12) Излучение Хокинга от черных дыр

[50 баллов]

- (T12.1) Чёрная дыра (ЧД) обычно образуется в результате гравитационного коллапса массивной
звезды в конце её жизненного цикла в точку, называемую сингулярностью. Из-за
чрезвычайно высокой гравитации такого объекта ничто, попадающее под так называемый
горизонт событий (сферическую поверхность с $r = R_{\text{SC}}$, где r — расстояние от
сингулярности), не может покинуть его пределы. R_{SC} называется радиусом Шварцшильда.

- (T12.1a) **Модель происхождения излучения Хокинга:** Рассмотрим пару частиц, каждая с
массой m , рождённых по обе стороны горизонта ЧД. Одна частица находится
немного снаружи горизонта в точке $r \approx R_{\text{SC}}$, а другая — внутри горизонта в точке
 $r = \kappa R_{\text{SC}}$. Предположим, что полная энергия частицы равна сумме её энергии
покоя mc^2 и гравитационной потенциальной энергии в поле ЧД.

Определите значение κ , при котором пара частиц имеет нулевую полную [4]
энергию.

- (T12.1b) **Температура чёрной дыры:** если частица, рождённая за горизонтом в описанном
выше процессе, обладает достаточной кинетической энергией, она может покинуть
ЧД в процессе, называемом излучением Хокинга. Частица, находящаяся внутри
горизонта, имеющая отрицательную энергию, поглощается и уменьшает массу ЧД.

Предположим, что всё излучение Хокинга состоит из фотонов со спектром чёрного
тела, пик которого приходится на длину волны $\lambda_{\text{bb}} \approx 16R_{\text{SC}}$. Известно, что для
чёрной дыры солнечной массы, $R_{\text{SC}, \odot} = 2,952$ км.

Получите выражение для температуры T_{bh} чёрной дыры, соответствующей [4]
этому излучению чёрного тела, через её массу M_{bh} и физические константы.
Рассчитайте радиус Шварцшильда $R_{\text{SC}, 10\odot}$ и температуру $T_{\text{bh}, 10\odot}$ для чёрной
дыры с массой $10 M_{\odot}$.

- (T12.1c) **Потеря массы черной дыры:** предположим, что излучение Хокинга испускается с
горизонта событий.

Используя эквивалентность массы и энергии, получите выражение для скорости
потери массы, $dM_{\text{bh}}(t)/dt$, в величинах массы $M_{\text{bh}}(t)$ ЧД и физических констант.

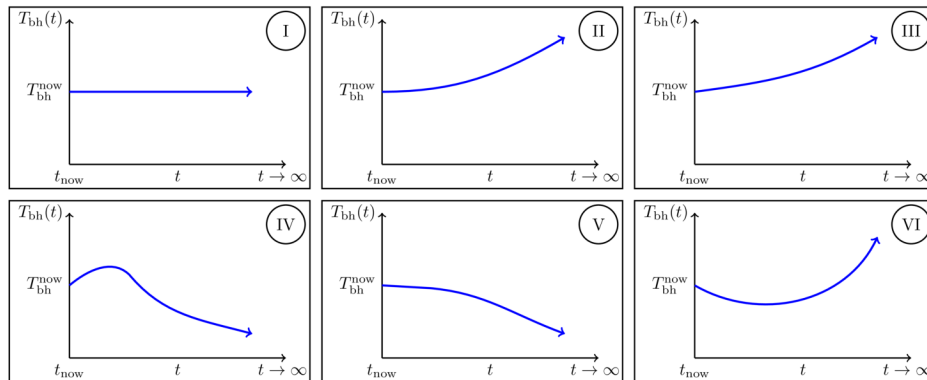
Получите выражение для $M_{\text{bh}}(t)$ для чёрной дыры с начальной массой M_0 . [8]
Схематически нарисуйте $M_{\text{bh}}(t)$ как функцию t от $M_{\text{bh}} = M_0$ до $M_{\text{bh}} = 0$.

- (T12.1d) **Время жизни чёрной дыры:** Получите выражение для времени жизни τ_{bh} , за [3]
которое чёрная дыра с начальной массой M_0 полностью испаряется из-за
излучения Хокинга, в величинах M_0 и физических констант. Рассчитайте время
жизни $\tau_{\text{bh}, 10\odot}$ (в секундах) чёрной дыры с $M_0 = 10 M_{\odot}$.

- (T12.1e) **Черная дыра в поле реликтового излучения:** рассмотрим изолированную черную дыру в космосе, удаленную от других тел, с текущей температурой T_{bh}^{now} , в поле космического микроволнового фона (cosmic microwave background, CMB) с температурой $T_{cmb}^{now} = 2,7$ К в настоящий момент времени. Черная дыра может увеличивать свою массу, поглощая CMB, и терять ее из-за излучения Хокинга.

Принимая во внимание ускоряющееся расширение Вселенной, определите, какие из следующих рисунков показывают долгосрочную эволюцию T_{bh} в следующих трёх случаях:

(X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Укажите свой ответ, отметив галочкой соответствующее поле (только одно) для каждого из случаев X, Y и Z в таблице, приведенной в сводном листе ответов, соответствующее номеру рисунка. [6]

- (T12.2) Первичные чёрные дыры (primordial black holes, PBH) гораздо меньших масс могут образовываться в очень ранней Вселенной. Все последующие вопросы относятся к PBH. Любыми процессами, увеличивающими массу чёрной дыры, здесь можно пренебречь.

- (T12.2a) **Испарение PBH в современную эпоху:** Как вы, возможно, заметили из ответов на предыдущие вопросы, чёрным дырам солнечной массы потребуется много времени для испарения. Однако, поскольку PBH могут иметь гораздо меньшую массу, мы можем наблюдать их испарение в настоящее время.

Найдите начальную массу M_0, PBH (в кг), радиус Шварцшильда $R_{SC, PBH}$ (в м) и температуру T_{PBH} (в К) черной дыры, которая может полностью испариться в настоящую эпоху, т. е. той, чье время жизни $\tau_{PBH} = 14$ миллиардов лет. [4]

- (T12.2b) **Образование первичной чёрной дыры (PBH):** В ранней Вселенной, где доминировало излучение, масштабный коэффициент изменяется по закону $a(t) \sim t^{1/2}$. В этот период первичные чёрные дыры образуются в результате коллапса всей энергии, содержащейся в области физического размера ct , где t — возраст Вселенной в тот момент.

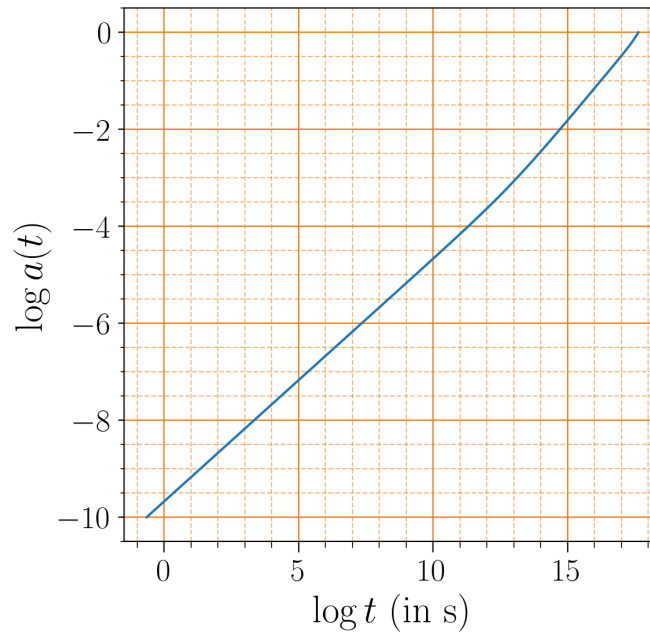
PBH массой 1×10^{12} кг образуется, когда возраст Вселенной составляет около 1×10^{-23} с. Рассчитайте возраст Вселенной, t_{20} , когда образуется PBH массой 1×10^{20} кг. [6]

- (T12.2c) **Наблюдаемый спектр излучения Хокинга от PBH:** Рассмотрим PBH с начальной массой 1×10^{10} кг, которая полностью испаряется в конце своего существования τ_{PBH} . Для простоты предположим, что большая часть излучения Хокинга испускается в этот момент, с температурой, соответствующей её начальной массе. Также примем, что масштабный коэффициент Вселенной меняется как $a(t) \sim t^{2/3}$.

Рассчитайте длину волны максимума этого излучения Хокинга, наблюдаемого на Земле, λ_{earth} , в нынешнюю эпоху (при $t = 14$ миллиардов лет). [5]

- (T12.2д) **Высокоэнергетическое космическое излучение от РВН:** Предположим, что излучение Хокинга, испускаемое в момент времени t состоит из фотонов с энергией $k_B T_{bh}(t)$. Кроме того, максимально возможная температура для чёрной дыры — это температура Планка T_{Planck} , где $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ ГэВ.

Изменение масштабного коэффициента от времени показано на следующем рисунке. В настоящее время масштабный коэффициент равен единице. $t(s)$ на оси времени представляет возраст Вселенной в секундах.



На Земле наблюдается фотон с энергией $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$ эВ. Определите [10]
наибольшее и наименьшее возможные значения начальной массы РВН (M_0^{max}
и M_0^{min} соответственно), которая могла излучить этот фотон.