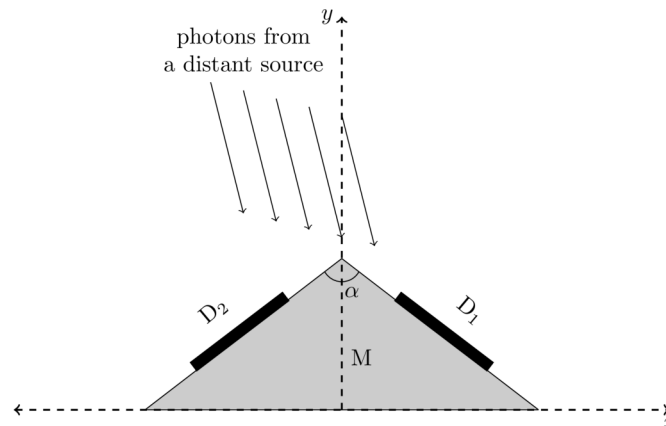


(T01) Daksha-oppdrag
[10 poeng]

"Daksha" er et foreslått indisk romprosjekt som består av to satellitter S_1 og S_2 som går i bane rundt jorden i samme sirkulære bane med radius $r = 7000$ km, men med 180° faseforskyving. Disse satellittene observerer universet i høyenergiområdet (røntgenstråler og γ -stråler). Hver av satellittene i Daksha bruker flere flate, rektangulære detektorer.

For å forstå hvordan man lokaliserer en kilde på himmelen, skal vi bruke en forenklet modell av Daksha-satellittene. Anta at S_1 bare har to identiske detektorer D_1 og D_2 , hver med areal $A = 0,50$ m², festet til et ugjennomsiktig feste M som vist i figuren nedenfor. Detektorene ligger symmetrisk rundt y -aksen i plan vinkelrett på x - y planet og danner en vinkel $\alpha = 120^\circ$ med hverandre.



- (T01.1) Ved observasjon av en fjern kilde plassert i x - y planet, registrerer detektor D_1 en effekt $P_1 = 2,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ og detektor D_2 registrerer en effekt $P_2 = 4,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹.

Estimer vinkelen η som posisjonsvektoren til kilden danner med den positive y -aksen, der en vinkel fra den positive y -aksen regnes som positiv mot klokkeretningen. **[5]**

Vurder en enkelt puls fra en fjern kilde (ikke nødvendigvis i x - y -planet) registrert av begge satellittene (S_1 og S_2) til Daksha. Tidspunktene for toppene av pulsene registrert av S_1 og S_2 er henholdsvis t_1 og t_2 .

- (T01.2) Hvis $t_1 - t_2$ ble målt til å være $10,0 \pm 0,1$ ms, bestem da hvor stor andel, f , av hele himmelkulen det er mulig at kilden kan befinne seg. **[5]**

(T02) Makar-Sankranti
[10 poeng]

Festivalen "Makar-Sankranti" feires i India når solen ser ut til å gå inn i stjernetegnet Steinbukken (Makar = Steinbukken, Sankranti = Inngang) sett fra jorden. Den feires for tiden rundt 14. januar hvert år. For mange år siden sammenfalt denne festivalen også med vintersolverv på den nordlige halvkule, som vi antar finner sted 21. desember.

- (T02.1) Basert på informasjonen ovenfor, finn året, y_c , da feiringen av denne festivalen sist sammenfalt med vintersolverv på den nordlige halvkule. **[3]**
- (T02.2) Hvis Solen så ut til å gå inn i stjernetegnet Steinbukken på et lokalt tidspunkt klokken 11:50:13 den 14. januar 2006 i Mumbai, beregn dato, D_{enter} , og lokalt tidspunkt, t_{enter} , for dens inngang i Steinbukken i året 2013. **[3]**
- (T02.3) Makar-Sankranti-festivalen feires på et gitt sted på dagen for den første solnedgangen i stjernetegnet Steinbukken. Du kan anta at den lokale solnedgangstiden for Mumbai i januar er 18:30:00.

Angi datoen for feiringen av festivalen for hvert år mellom 2006 og 2013 (ved å krysse av (✓) i den respektive boksen i tabellen gitt i sammendrags-svararket). [4]

(T03) Gravitasjonsbølger

[15 poeng]

Omkretsende binære sorte hull genererer gravitasjonsbølger. Vurder to sorte hull i vår galakse med masser $M = 36 M_{\odot}$ og $m = 29 M_{\odot}$, som beveger seg i sirkulære baner med orbital vinkelfrekvens ω rundt deres massesenter.

(T03.1) Anta newtonsk gravitasjon og utled et uttrykk for vinkelfrekvensen, ω_{ini} , for svarte hull-banene på et tidspunkt, t_{ini} , når avstanden mellom de svarte hullene var 4,0 ganger summen av deres Schwarzschild-radier, uttrykt kun ved hjelp av M , m , og fysiske konstanter.

Beregn verdien av ω_{ini} (i rad s^{-1}).

[5]

(T03.2) I generell relativitetsteori sender sorte hull i bane ut gravitasjonsbølger med frekvens f_{GW} , slik at $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. Dette krymper banene til de sorte hullene, som igjen øker f_{GW} . Endringsraten til f_{GW} er

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

hvor $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ kalles "chirp-massen".

Finn verdiene av α , β og δ .

[4]

(T03.3) Anta at gravitasjonsbølgene knyttet til hendelsen ble først oppdaget på tidspunkt $t_{\text{ini}} = 0$.

[6]

Utled et uttrykk for den observerte tiden for sammenslåing av svarte hull, t_{merge} , når f_{GW} blir veldig stor, kun ved ω_{ini} , M_{chirp} , og fysiske konstanter.

Beregn verdien av t_{merge} (i sekunder).

(T04) Balmer-dekrement

[15 poeng]

Tenk på en hovedserie-stjerne omgitt av en tåke. Stjerna har observert V-bånd-magnitude på 11,315 mag. Det ioniserte området av tåken nær stjernen sender ut $H\alpha$ og $H\beta$ linjer; deres bølgelengder er henholdsvis $0,6563 \mu\text{m}$ og $0,4861 \mu\text{m}$. Det teoretisk forutsagte forholdet mellom fluks for $H\alpha$ og $H\beta$ linjer er $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2,86$. Fordi denne strålingen passerer gjennom den ytre delen av den kalde, støvete tåken, er imidlertid de observerte emisjonsfluksene av $H\alpha$ og $H\beta$ linjer henholdsvis $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ og $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

Ekstinksjonen A_{λ} er en funksjon av bølgelengde og uttrykkes som

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Her er $\kappa(\lambda)$ ekstinksjonskurven og $E(B - V)$ betegner fargeoverskuddet i filterbåndene B og V. Ekstinksjonskurven (med λ i μm) er gitt som følger.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2,659 \times \left(-1,857 + \frac{1,040}{\lambda}\right) + R_V, & 0,63 \leq \lambda \leq 2,20 \\ 2,659 \times \left(-2,156 + \frac{1,509}{\lambda} - \frac{0,198}{\lambda^2} + \frac{0,011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0,12 \leq \lambda < 0,63 \end{cases}$$

hvor $R_V = A_V / E(B - V) = 3,1$ er forholdet mellom total-til-selektiv ekstinksjon.

(T04.1) Finn verdiene av $\kappa(H\alpha)$ og $\kappa(H\beta)$. [3]

(T04.2) Finn verdien av forholdet mellom fargeoverskudd $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$. [4]

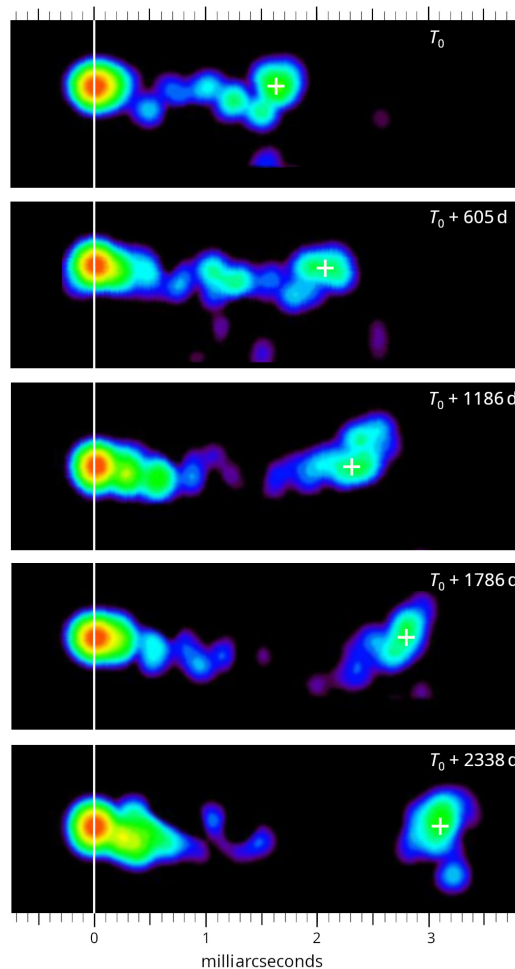
(T04.3) Estimer ekstinksjonen på grunn av tåken, $A_{H\alpha}$ og $A_{H\beta}$, ved $H\alpha$ og $H\beta$ bølgelengdene, [6]
henholdsvis.

(T04.4) Estimer utslukningen av tåken (A_V) og den tilsynelatende størrelsesklassen til stjernen i V- [2]
båndet, m_{V0} , i fravær av tåken.

(T05) Kvasarer

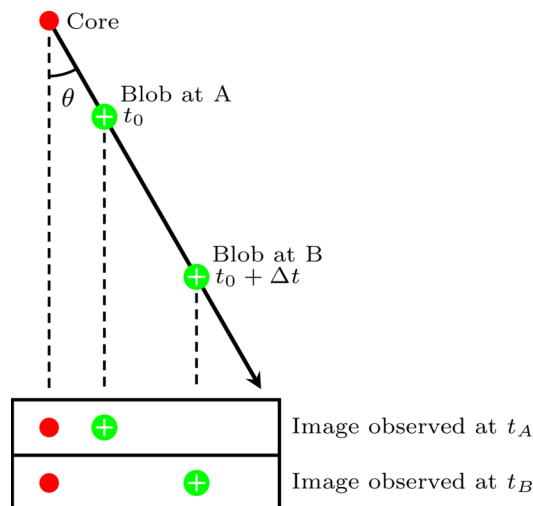
[20 poeng]

En kvasar er en ekstremt lyssterk aktiv galakse drevet av et supermassivt sort hull som sender ut relativistiske jeter. Figuren viser en serie med paneler av radiobilder av en kvasar (med rødforskyvning $z = 0,53$, og luminositetsavstand $D_L = 1,00 \times 10^{10}$ ly) på forskjellige tidspunkter. "Kjernen" er på linje med den vertikale hvite linjen, mens en jet, bestående av en "blob" (markert med hvitt +), beveger seg bort fra den over tid. Hvert panel viser observasjonstidspunktet (med start på T_0 for det første bildet), og vinkelskalaen er angitt øverst og nederst på figuren.



- (T05.1) Bestem blobens vinkelavstand, ϕ_{blob} (i millibuesekunder), og dens transversale avstand, l_{blob} (i lysår), fra kvasarkjernen for hver observasjon. Beregn deretter blobens tilsynelatende hastighet i transversal retning (v_{app}) uttrykt som en brøkdel av lyshastigheten, $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ ved å bruke påfølgende observasjoner. Beregn også den gjennomsnittlige tilsynelatende hastigheten $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ over hele observasjonsperioden. [5]

Kvasarjeten beveger seg faktisk med en relativistisk hastighet $v \equiv \beta c$, men ikke nødvendigvis i himmelplanet; f.eks. danner den en vinkel θ ("observasjonsvinkelen") i forhold til synslinjen til en fjern observatør (indikert av de stiplede linjene), som vist i skissen nedenfor.
For denne og alle påfølgende deloppgaver kan du ignorere rødforskyvning av kvasaren og eventuelle relativistiske effekter.



- (T05.2) Lyset som sendes ut av blobben ved to forskjellige tidspunkter t_0 (tilsvarende posisjon A) og $t_0 + \Delta t$ (tilsvarende posisjon B) vil henholdsvis nå observatøren ved tiden t_A og tiden t_B . Dermed er den observerte tidsforskjellen $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

- (T05.2a) Finn et uttrykk for forholdet $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ uttrykt ved β og θ . [2]

- (T05.2b) Ved å bruke dette forholdet, uttrykk β_{app} ved β og θ . [2]

- (T05.3) Bevegelse kalles superluminal hvis den tilsynelatende hastigheten overstiger lysets hastighet ($\beta_{\text{app}} > 1$), og subluminale hvis den ikke gjør det ($\beta_{\text{app}} < 1$).

- (T05.3a) For $\beta_{\text{app}} = 1$, tegn en jevn kurve av β som en funksjon av θ for å markere grensen [4]
mellom subluminale og superluminale bevegelser. Skraver det superluminale området i grafen med skrålinjer (///).

- (T05.3b) Finn den laveste sanne jethastigheten ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$) for at superluminal bevegelse [2]
skal kunne observeres, og også den tilsvarende observasjonsvinkelen θ_{low} .

- (T05.4) Finn et uttrykk for den maksimale synsvinkelen, θ_{max} , som gjør det mulig å observere en gitt verdi [2]
av β_{app} .

Kjernen i en kvasar, dens sentrale kompakte objekt, viser variabilitet i sin utstråling på grunn av interne prosesser som skjer innenfor et kausalt forbundet område. Størrelsen (= radius) på dette området er vanligvis antatt å være omtrent fem ganger Schwarzschild-radien til kjernen.

- (T05.5) Kjernen i en bestemt kvasar viser seg å variere på tidsskalaer på omtrent 1 time. Finn en øvre [3]
grense, $M_{c, \text{max}}$, for massen til det sentrale kompakte objektet, uttrykt i enheter av solmasse.

(T06) Galaktisk rotasjon
[20 poeng]

Rotasjonskurven til vår galakse bestemmes ved hjelp av målinger av synslinje-hastighet for nøytrale hydrogenskyer (HI) langs forskjellige galaktiske lengdegrader, observert gjennom 21 cm HI-linjen. Vi tenker oss en HI-sky med galaktisk lengdegrad l , plassert i en avstand R fra det galaktiske sentrum (GC) og en avstand D fra solen. Anta at solen er i en avstand $R_0 = 8,5$ kpc fra GC. Anta at både solen og HI-skyen er i sirkulære baner rundt GC i det galaktiske planet, med vinkelhastigheter Ω_0 og Ω , og rotasjonshastigheter V_0 og V , henholdsvis.

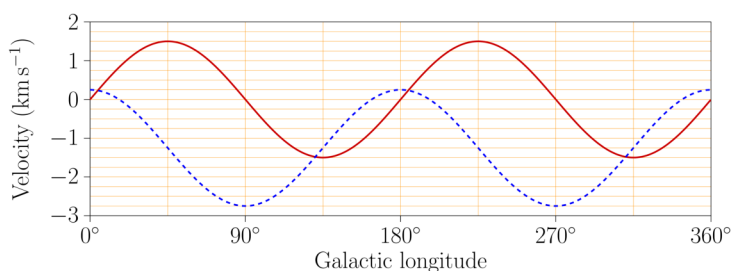
Synslinje-hastigheten (V_r) og den tverrgående hastighetskomponenten (V_t) for skyen, som observert fra solen, kan uttrykkes som

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Sett fra den nordlige galaktiske polen er den galaktiske rotasjonen med klokken. Gjennom hele dette problemet skal vi anse synslinje-hastighet som positiv når den beveger seg bort, og skyer vil bli behandlet som punktobjekter.

- (T06.1) I grafen som er gitt på sammendrags-svararket, skisser V_r som en funksjon av D fra $D = 0$ til $D = 2R_0$ for to siktlinjer definert av (i) $l = 45^\circ$ og (ii) $l = 135^\circ$. Merk hver av linjene/kurvene dine med verdien av l . **[5]**
- (T06.2) Grafen nedenfor viser gjennomsnittlige radiale (heltrukken, rød kurve) og transversale (stiplet, blå kurve) hastighetskomponenter for stjerner på en avstand av 100 pc fra Solen, plottet som en funksjon av galaktisk lengdegrad.



Bruk grafen til å estimere Solens omløpsperiode (P) rundt det galaktiske sentrum (GC) i millioner år (Myr). **[3]**

- (T06.3) Jan Oort merket at i solens nabolag ($D \ll R_0$), vil forskjellen i vinkelhastigheter ($\Omega - \Omega_0$) være liten. Han utledet derfor følgende førsteordens tilnærming for siktlinje- og tverrgående hastighetskomponenter:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

hvor A og B er kjent som Oorts konstanter.

La oss vurdere to tilfeller:

(I) den faktisk observerte rotasjonskurven for Galaksen, og

(II) rotasjonskurven for et hypotetisk scenario der Galaksen er tom for mørk materie og hele massen til Galaksen antas å være konsentrert i sentrum.

- (T06.3a) Utled uttrykk for den radiale gradienten av rotasjonshastigheten ved solens posisjon, **[2]**
 $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$, for de to tilfellene.

- (T06.3b) Uttrykk A og B i form av V_0 , R_0 , og den radiale gradienten av rotasjonshastigheten **[8]**
ved solens posisjon, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$.

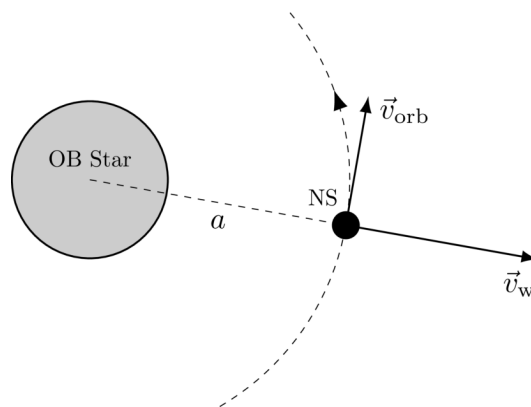
- (T06.3c) Forholdet (A/B) av Oorts konstanter for de to gitte tilfellene, (I) og (II), er definert som $[2]$ henholdsvis F_I og F_{II} . Bestem F_I og F_{II} .

(T07) Nøytronstjerne-binærsystem

[20 poeng]

I et binærsystem som involverer en kompakt stjerne, og hvor kompanjong-stjernen ikke overskrider sin Roche-lobe, er stjernevind fra kompanjongen den primære kilden til akkresjon for den kompakte stjernen. Slik vindbasert akkresjonen er spesielt betydningsfull i tette binærsystemer som inneholder en massiv hovedseriestjerne (som en O- eller B-stjerne, heretter betegnet som en OB-stjerne), sammen med et kompakt objekt som en nøytronstjerne (NS).

Anta et slikt NS-OB-stjerne binærsystem hvor en nøytronstjerne med masse $M_{NS} = 2,0 M_{\odot}$ og radius $R_{NS} = 11$ km går i en sirkulær bane med radius a rundt sentrum av OB-stjernen med hastighet $v_{orb} = 1,5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (se figuren nedenfor). Gjennom hele denne oppgaven antas massetapet fra OB-stjernen å være sfærisk symmetrisk og hastigheten er $\dot{M}_{OB} = 1,0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.



- (T07.1) Akkresjonradien, R_{acc} , er definert som den maksimale avstanden fra nøytronstjernen hvor stjernevinden kan fanges av nøytronstjernen. Gitt at stjernevindhastigheten ved nøytronstjernens baneradius er $v_w = 3,0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, finn R_{acc} for systemet ovenfor i km ved å bruke standard utregning av unnslippingshastighet. $[3]$
- (T07.2) Gitt antagelsen at alt innfanget materiale blir akkretert på nøytronstjernen, estimer masseakkresjonsraten, $\dot{M}_{acc}$ av materiale fra stjernevinden til nøytronstjernen i enheter av $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ hvis $a = 0,5 \text{ au}$. Se bort fra effektene av strålingstrykk og endelig nedkjølingstid for den akkreterende gassen. $[3]$
- (T07.3) Vi ser nå på en situasjon der stjernevindhastigheten ved baneradiusen a (nær NS) blir sammenlignbar med banehastigheten til NS. Masseakkresjonshastigheten fra stjernevinden til NS i dette tilfellet vil være gitt ved et uttrykk på formen $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$, der $q = M_{NS}/M_{OB}$ er masseforholdet i binærsystemet og β er vinkelen mellom vindhastighetens retning og radialretningen bort fra OB-stjernen i NS sitt referansesystem. Utled uttrykket for $f(\tan \beta, q)$ under antagelsen at $M_{OB} \gg M_{NS}$. $[6]$

- (T07.4) Tenk deg at det fullstendig ioniserte materialet akkretorer radielt og blir hindret på grunn av det sterke magnetfeltet $\vec{B}$ til nøytronstjernen (NS). Denne effekten kan modelleres som et trykk, gitt ved $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Vi skal anta at NS har et dipolmagnetfelt hvis størrelse i ekvatorplanet varierer med avstanden r fra nøytronstjernen for $r \gg R_{NS}$ som

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{NS}}{r} \right)^3$$

hvor B_0 er magnetfeltet ved ekvator på NS. Anta at aksen til magnetdipolen sammenfaller med rotasjonsaksen til NS.

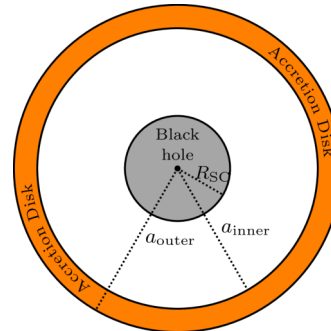
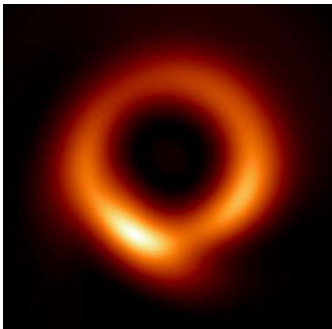
- (T07.4a) Finn det magnetiske trykket, $P_{eq, mag}$, i ekvatorplanet uttrykt ved B_0 , R_{NS} , r , og andre [1]
passende konstanter.
- (T07.4b) Den maksimale avstanden hvor akkresjonsstrømmen stoppes av magnetfeltet ved [7]
ekvatorplanet kalles magnetosfæreradien R_m . Denne materiestrømmen vil utøve et trykk på grunn av den relative bevegelsen mellom innkommende stjernevind og NS. Finn et tilnærmet uttrykk for den kritiske verdien for magnetfeltet $B_{0, c}$ som gjør at R_m er lik R_{acc} , og beregn verdien i Tesla. Magnetiske effekter kan neglisjeres for $r > R_m$ og anta $v_w \gg v_{orb}$.

(T08) Skyggen av et sort hull

[20 poeng]

Event Horizon Telescope (EHT) har publisert et bilde av det supermassive sorte hullet i sentrum av galaksen M87, som vist i venstre panel i figuren nedenfor.

For å forklare dette bildet i grove trekk, vil vi anvende en forenklet modell av et ikke-roterende, statisk, sfærisk symmetrisk sort hull med masse $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$, omgitt av en masseløs, tynn, plan akkresjonsskive med indre og ytre radius, henholdsvis $a_{inner} = 6R_{SC}$ og $a_{outer} = 10R_{SC}$, hvor R_{SC} er Schwarzschild-radiusen. En skisse sett ovenfra er vist i høyre panel i figuren nedenfor (figuren er ikke i skala).



Vi antar at akkresjonsskiven er den eneste lyskilden av betydning. Hvert punkt på skiven sender ut lys i alle retninger. Dette lyset beveger seg under påvirkning av gravitasjonsfeltet til det sorte hullet. Formen til lysstrålene styres av to ligninger gitt nedenfor (som ligner på de for et objekt rundt solen):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

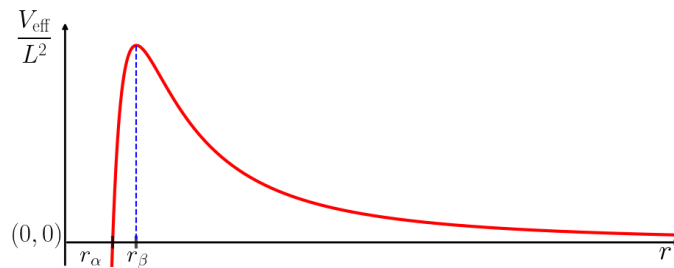
hvor $r \in (R_{SC}, \infty)$ er den radielle koordinaten, $\phi \in [0, 2\pi)$ er den asimutale vinkelen, og E og L er konstanter relatert til henholdsvis bevart energi og bevart angulært moment.

Her er $v_r \equiv dr/dt$ størrelsen på den radielle hastigheten, v_ϕ er størrelsen på den tangentielle hastigheten, og $\omega \equiv d\phi/dt$ er vinkelhastigheten. Vi definerer støtparameteren b for en bane som $b = L/\sqrt{2E}$. Tidsdilatasjon er neglisjert i dette problemet.

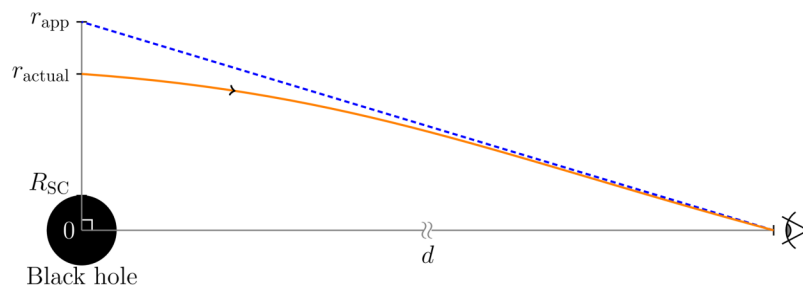
En annen nyttig ligning oppnås ved å derivere den første ligningen:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

- (T08.1) Sirkulære lysbaner kan eksistere rundt det sorte hullet. Finn radiusen, r_{ph} , og infallsparameteren, b_{ph} , for slike fotonbaner, uttrykt ved M og relevante konstanter. [4]
- (T08.2) Beregn tiden, T_{ph} , det tar å fullføre en hel omløpsbane av den sirkulære lysbanen. Gi svar i sekunder. [2]
- (T08.3) Ligningen for radiell hastighet gitt ovenfor (den første ligningen i dette spørsmålet) kan sammenlignes med en ligning av formen $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$ for lysbaner. En skjematisk fremstilling av V_{eff}/L^2 som en funksjon av r er gitt nedenfor.



- (T08.3a) Grafen indikerer to spesielle radier, r_α og r_β . Finn uttrykk for r_α og r_β uttrykt ved M og relevante konstanter. [2]
- (T08.3b) Et foton som beveger seg innover fra akkresjonsskiven mot det sorte hullet kan i noen tilfeller fortsatt unnsnippe ut til uendelig avstand. Finn uttrykket for den minste verdien av snupunktradien, r_t , for et slikt foton, uttrykt ved M og relevante konstanter. Finn uttrykket for minimumsverdien av innfallsparameteren, b_{min} , for dette fotonet. [3]
- (T08.4) En lysstråle som kommer fra en radius r_{actual} målt i himmelplanet fra sentrum av systemet vil oppleve sterk bøyning på grunn av gravitasjonen fra det sorte hullet, og til slutt nå en observatør (angitt med et øye på bildet) på en stor avstand d fra systemet, som vist nedenfor.



For denne observatøren vil strålen se ut til å ha kommet fra et annet punkt på en avstand $r_{app} \approx b$ fra det sorte hulls sentrum i himmelplanet, der b er innfallsparameteren for den fotonbanen. For punkter på akkresjonsskiven ved $r = r_{actual}$, kan man anta følgende relasjon:

$$b(r_{actual}) \approx r_{actual} (1 + R_{SC}/r_{actual})^{1/2}$$

For den fjerne observatøren, som oss selv, som ser akkresjonsskiven rett ovenfra, vil bildet av systemet fremstå som sirkulært symmetrisk i himmelplanet. Bestem den ytterste tilsynelatende radiusen, r_{outer} , og den innerste tilsynelatende radiusen, r_{inner} , av bildet. Angi det i AU enheter. [5]

- (T08.5) Tenk deg et isolert supermassivt sort hull med masse $M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$ uten noen akkresjonsskive. Et kort, sterkt utbrudd av elektromagnetisk stråling oppstår i 5 s ved et punkt Z på en avstand, la oss si, $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ fra det sorte hullet som vist i figuren. Utbruddet ved punkt Z sender ut lys i alle retninger. En observatør ved et punkt langt fra det sorte hullet (markert med et øye i figuren nedenfor) tar et bilde med lang eksponering av området rundt det sorte hullet i 60 s.



Velg riktig alternativ for hver av påstandene nedenfor:

- (T08.5a) Antall mulige baner for lys å reise fra Z til observatøren er [2]
 (A) Høyst én (B) Nøyaktig én (C) Nøyaktig to (D) Flere enn to.
- (T08.5b) Antall bilder av EM-utbruddet ved Z som vil bli sett i bildet med lang eksponering er [2]
 (A) Høyst ett (B) Nøyaktig ett (C) Nøyaktig to (D) Mer enn to.

(T09) Atmosfærisk seeing

[35 poeng]

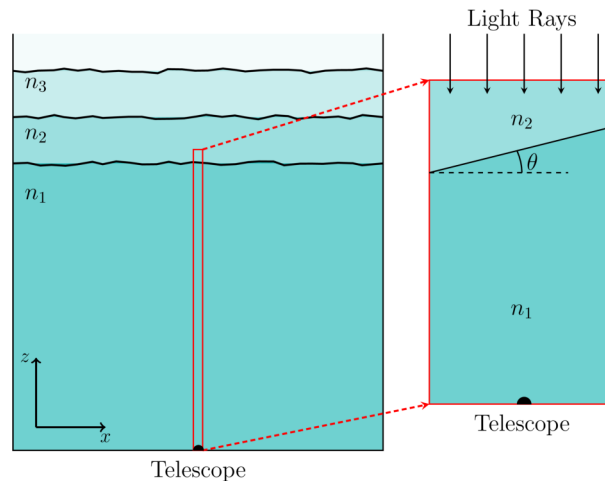
Et teleskop med en akromatisk konveks objektivlinse med diameter $D = 15$ cm og brennvidde $f = 200$ cm er rettet mot en stjerne i senit.

- (T09.1) Finn diameteren (i m), d_{image} , til bildet av en punktkilde som produseres av objektivlinsen ved dens fokalplan for grønt lys ($\lambda = 550$ nm), når man kun tar hensyn til diffraksjonseffekter. [1]

Bildet av en astronomisk kilde påvirkes også av såkalt "atmosfærisk seeing".

Grensene mellom lagene i atmosfæren samt brytningsindeksene til lagene endres kontinuerlig på grunn av turbulens, temperaturvariasjon og andre faktorer. Dette fører til små endringer i bildets posisjon i teleskopets fokalplan, kjent som "blinke-effekten". For resten av oppgaven vil vi, bortsett fra å bruke den diffraksjonsbegrensede endelige størrelsen på bildet av stjernen (som anvendt ovenfor), ikke ta hensyn til interferenseffekter.

Venstre panel i figuren nedenfor viser et vertikalt tverrsnitt av atmosfæren med flere lag med forskjellige brytningsindekser ($n_1, n_2, n_3, \dots$). Høyre panel viser et forstørret bilde av et tynt vertikalt segment av atmosfæren og grensen mellom de to laveste atmosfæriske lagene med brytningsindekser n_1 og n_2 ($n_1 > n_2$). I denne oppgaven skal vi bare ta hensyn til disse to lagene og grensen mellom dem. Forholdene mellom de forskjellige lengdene i diagrammene er ikke i rett skala.

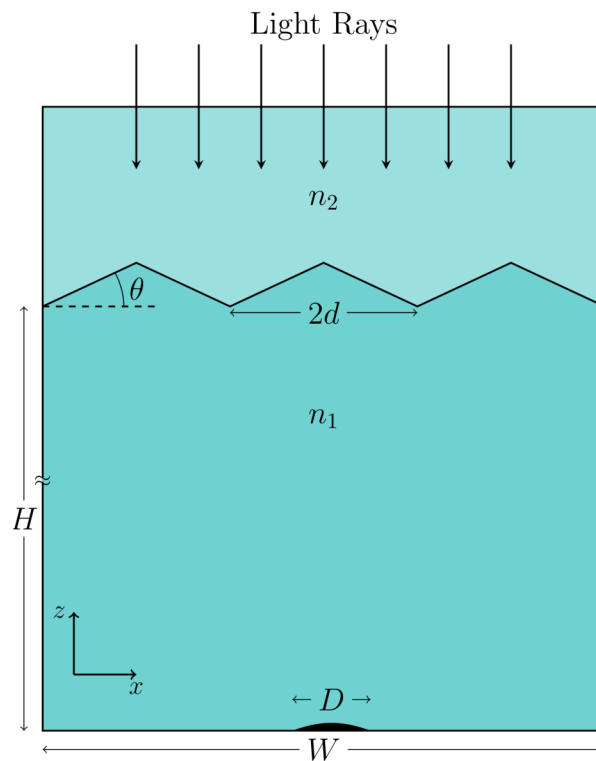


- (T09.2) La grensen mellom de to lagene ligge ved en høyde $H = 1$ km direkte over teleskopets objektiv, med en helning på $\theta = 30^\circ$ i forhold til horisontalplanet. I alle delene av denne oppgaven defineres vinkelen θ som positiv i retning mot klokken. For en monokromatisk lyskilde er $n_1 = 1.00027$ og $n_2 = 1.00026$. La vinkelforskyvningen av bildet i fokalplanet til teleskopet for en stjerne i senit være α .
- (T09.2a) Tegn et passende merket stråle-diagram som viser n_1 , n_2 , θ og α i grenseområdet. [2]
- (T09.2b) Finn uttrykket for α uttrykt ved θ , n_1 og n_2 . Bruk tilnærmingene for små vinkler: $\sin \alpha \approx \alpha$ og $\cos \alpha \approx 1$. [2]
- (T09.2c) Beregn forskyvningen av bildets posisjon Δx_θ (i m) dersom θ øker med 1% (når n_1 og n_2 holdes uendret). [3]
- (T09.2d) Beregn forskyvningen av bildets posisjon, Δx_n (i m), hvis n_2 øker med 0,0001% (når n_1 og θ holdes uendret). [3]
- (T09.3) En stjerne i senit sender ut hvitt lys. Velg hvilken kombinasjon av følgende karakteristikker som best beskriver formen og fargen på det resulterende bildet ved å krysse av (✓) i den passende boksen (kun én) i sammendrags-svararket. Merk at x øker fra venstre mot høyre i figuren. [2]

	Bildefarge	Bildeform	Venstre kant	Høyre kant
A	Hvit	Sirkulær		
B	Hvit	Elliptisk		
C	Farget	Sirkulær	Blå	Rød
D	Farget	Sirkulær	Rød	Blå
E	Farget	Elliptisk	Blå	Rød
F	Farget	Elliptisk	Rød	Blå

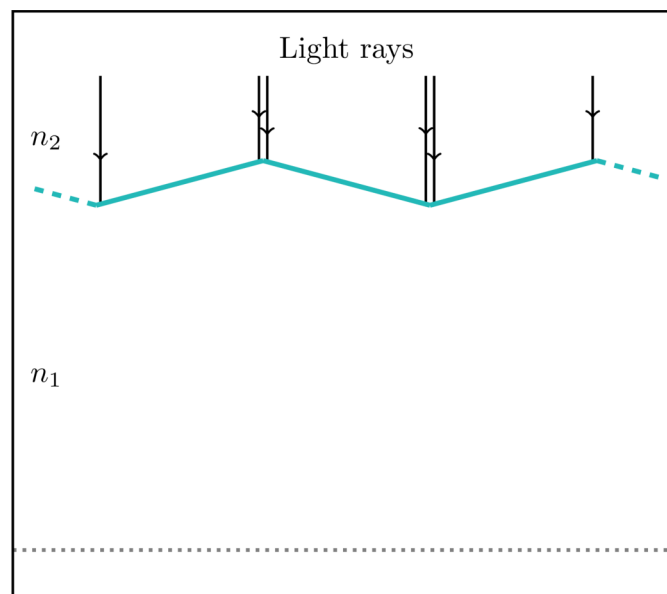
I alle de gjenværende deloppgavene antar vi monokromatisk grønt lys med $\lambda = 550$ nm. Vi modellerer grensen mellom lagene som et sett av uendelige sikksakk-plan (som løper vinkelrett på arket), adskilt med $d = 10$ cm langs x -aksen, med alternerende vinkler $\theta = 10^\circ$ eller $\theta = -10^\circ$.

Figuren nedenfor (ikke i riktig skala) viser et tverrsnitt av denne atmosfæremodellen med bredde W ($W \ll H$). For teleskoper med stor åpning resulterer denne sikksakk-naturen av grensen i dannelsen av speckler i fokalplanet.



(T09.4) Anta atmosfæremodellen som er beskrevet ovenfor.

(T09.4a) Diagrammet nedenfor viser et delområde av atmosfæren (ikke i riktig skala) med påfølgende sikksakk-plan, med samme parametre som angitt ovenfor.



I dette diagrammet, som er gjengitt i Sammendragsvararket, tegn banene til de innkommende lysstrålene frem til planet der teleskopets objektiv er plassert, indikert med den grå stiplede linjen.

Merk med "X" i diagrammet de området(ene), hvis noen, som ingen lysstråler vil nå frem til. [4]

(T09.4b) Beregn bredden av slike område(r) W_X . [3]

(T09.4c) Finn den største diameteren på teleskopets objektiv, $D_{\max}$, som vil gjøre det mulig å få [4]
ett enkelt bilde av en stjerne, ved å velge riktig plassering av teleskopet i forhold til
grensens struktur.

(T09.5) Vi ser nå på et tilfelle der den sikksakk-formede grensen løper både i x og y - retningen, og $D =$ [6]
100 cm (med $f = 200$ cm).

Lag en kvalitativ skisse av det resulterende flekkmønsteret i boksen som er gitt i
Sammendragssvararket.

(T09.6) For en turbulent atmosfære, anta igjen den samme parallelt løpende sikksakk-formen av [5]
grensesjiktet kun langs x -retningen, men nå endrer vinkelen mellom to plan seg med en jevn
hastighet fra 10° til -10° på 1,0 s. Anta at dette fører til en jevn forskyvning av bildets posisjon.

Anta et teleskop med $D = 8$ cm og $f = 1$ m. For et CCD-kamera, bestem den lengste
eksponeringstiden $t_{\max}$ som tilfredsstillir følgende kriterier: Man skal kun få ett enkelt bilde, og
ethvert mulig avvik i posisjonen skal forbli mindre enn 1% av den diffraksjonsbegrensede
diameteren til bildet.

(T10) Big Bang-nukleosyntese

[35 poeng]

Under den strålingsdominerte æraen i det tidlige universet, var universets skalafaktor $a \propto t^{1/2}$, hvor t er tiden
siden Big Bang. I løpet av mesteparten av denne epoken forblir nøytroner (n) og protoner (p) i termisk likevekt
med hverandre via svake vekselvirkninger. Talletettheten (N) av frie nøytroner eller protoner er relatert til
temperaturen T og deres tilsvarende masser m slik at

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

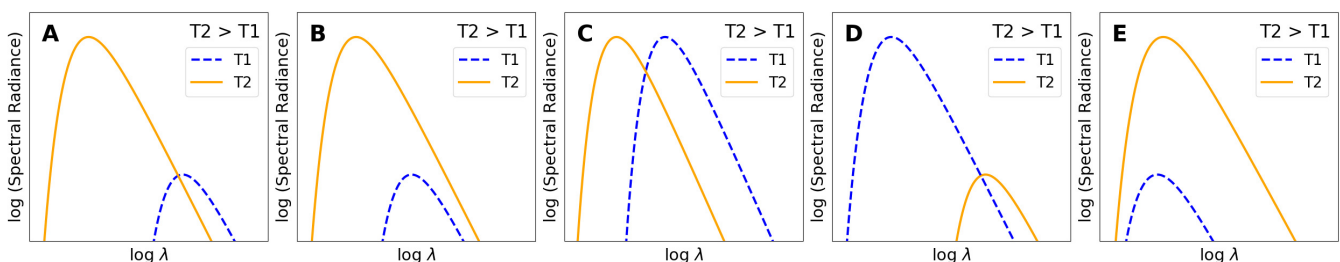
så lenge tiden $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70$ s, når $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. Etter t_{wk} kan ikke de svake vekselvirkningene
lenger opprettholde en slik likevekt, og frie nøytroner henfaller til protoner med en halveringstid på 610,4 s.

(T10.1) La tettheten av protoner være N_p , og tettheten av nøytroner være N_n . Beregn den relative [4]
forekomsten av nøytroner gitt ved forholdet $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ ved tidspunktet t_{wk} .

(T10.2) Fotoner opprettholder termisk likevekt og beholder et svartlegeme-spektrum i alle epoker.

(T10.2a) Finn indeksen β , slik at $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Identifiser hvilken av følgende grafer som viser korrekt oppførsel for spektral [2]
energitetthet for to temperaturer T_1 og T_2 . Kryss av (✓) for riktig alternativ i
summeringssvararket.

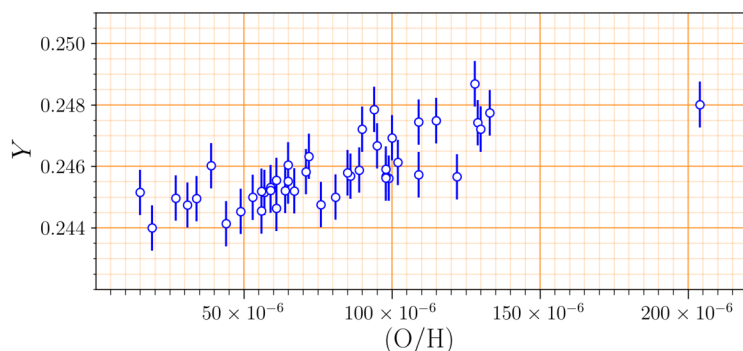


- (T10.3) Etter t_{wk} , styres prosessen med dannelse av deuterium fra protoner og nøytroner av Saha-ligningen, gitt av den indiske fysikeren Prof. Meghnad Saha. Ligningen kan forenkles til

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n) c^2}{k_B T} \right).$$

Her er baryon-til-foton-forholdet η lik 6.1×10^{-10} , og N_D er antallstettheten av deuterium.

- (T10.3a) Plott forholdet N_D/N_n på rutenettet i sammendrags-svararket, for minst 4 rimelig spredte temperaturverdier som ligger i intervallet $k_B T = [60, 70]$ keV, og tegn en jevn kurve gjennom disse punktene. [5]
- (T10.3b) Fra plottet, finn $k_B T_{\text{nuc}}$ (i keV) hvor $N_D = N_n$. [1]
- (T10.3c) Anta nå i stedet at alle frie nøytronene kombineres øyeblikkelig med protonene ved $k_B T_{\text{nuc}}$ for å danne deuterium, og at alt dette blir umiddelbart omdannet til helium (${}^4\text{He}$). Beregn den tilsvarende epoken eller tidspunktet for nukleosyntese, t_{nuc} (i sekunder), for dannelsen av helium. [4]
- (T10.4) Beregn verdien av $X_{n, \text{nuc}}$ umiddelbart før t_{nuc} . [5]
- (T10.5) Den opprinnelige heliumforekomsten, Y_{prim} , er definert som andelen av den totale massen i universet som er bundet i helium like etter t_{nuc} . Finn et teoretisk estimat for verdien av Y_{prim} . Kun for denne beregningen, anta at $m_p \approx m_n$ og at massen til helium, $m_{\text{He}} \approx 4m_n$. [3]
- (T10.6) Det opprinnelige mengdeforholdet av helium er veldig vanskelig å måle, ettersom stjerner kontinuerlig konverterer hydrogen til helium i universet. Graden av konvertering som har skjedd i stjerner i en galakse karakteriseres av forholdet mellom tettheten av oksygen (som kun produseres av stjerner) og hydrogen, betegnet som (O/H) , i galaksen. En sammenstilling av målingene av (O/H) og heliumforekomsten, Y , for forskjellige galakser er plottet nedenfor.



Bruk alle punktene i dette plottet (som er gjengitt i sammendrags-svararket) for å svare på følgende.

- (T10.6a) Beregn Y for en blå kompakt dverggalakse med en verdi av $(\text{O}/\text{H}) = 1.75 \times 10^{-4}$. [2]
- (T10.6b) Finn stigningstallet $dY/d(\text{O}/\text{H})$ for den rette linjen som passer til dataene ovenfor. [2]
- (T10.6c) Estimer den opprinnelige heliumforekomsten, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, basert på observasjonene ovenfor. [2]
- (T10.7) Avviket mellom Y_{prim} og $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ kan forklares ved å endre forholdet mellom baryoner og fotoner η . [3]
Når η reduseres, som indikert med $\downarrow$ i Oppsummeringssvarskjemaet, angi resulterende økning ($\uparrow$) eller reduksjon ($\downarrow$) i $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (når $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$, og Y_{prim} i boksene som er gitt i Oppsummeringssvarskjemaet.

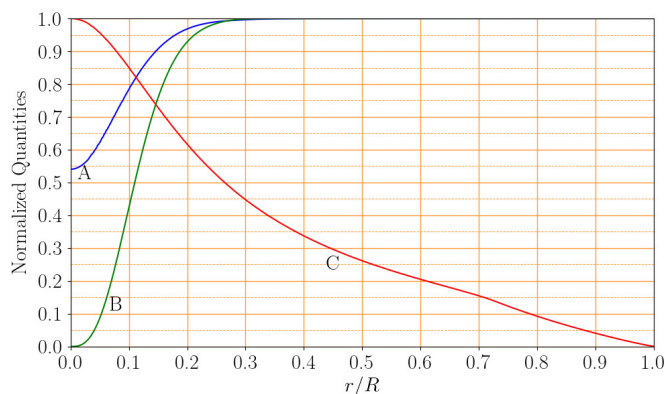
(T11) Stjerner gjennom grafer

[50 poeng]

Stjerner kan tilnærmes godt som sfærisk symmetriske objekter, og derfor kan den radielle avstanden r fra sentrum velges som den eneste uavhengige variabelen for modellering av stjerners indre. Massen som er inneholdt i en sfære med radius r betegnes med $m(r)$. Luminositeten $l(r)$ defineres som netto energi som strømmer utover gjennom en sfærisk overflate med radius r per tidsenhet. Andre størrelser av interesse, for eksempel tettheten $\rho(r)$, temperaturen $T(r)$, hydrogenets masseandel $X(r)$, heliums masseandel $Y(r)$, og den kjernefysiske energien som genereres per masseenhets per tidsenhet $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, tas som funksjoner av r . Gjennom hele dette problemet skal vi se bort fra effektene av diffusjon og gravitasjonell sedimentering av elementer inne i stjernen. Symbolet "log" refererer til logaritme med base 10. Oppgaven består av tre uavhengige deler.

(T11.1) Del 1: Inne i en stjerne

Grafen nedenfor viser variasjonen av tre strukturelle størrelser, A, B og C, som funksjoner av den fraksjonelle radiusen r/R i en stjernemodell med masse $1 M_{\odot}$ og alder 4 milliarder år, hvor R er radien til stjernens fotosfære. Verdiene av heliummasseandel ved (fotosfærisk) overflate, Y_s , og metallisitet (masseandel av alle elementer tyngre enn helium) ved (fotosfærisk) overflate, Z_s , av stjernen er gitt ved $(Y_s, Z_s) = (0,28, 0,02)$. Alle størrelser vist i plottene er normalisert med deres respektive maksimumsverdier.



(T11.1a) Identifiser de tre størrelsene A, B og C entydig blant de fem mulighetene:

[6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Skriv A/B/C i boksene ved siden av de passende størrelsene i summeringssvararket. Ingen begrunnelse er nødvendig for svaret ditt.)

(T11.1b) Hva er masseandelen av helium, Y_c , i sentrum av stjernen?

[3]

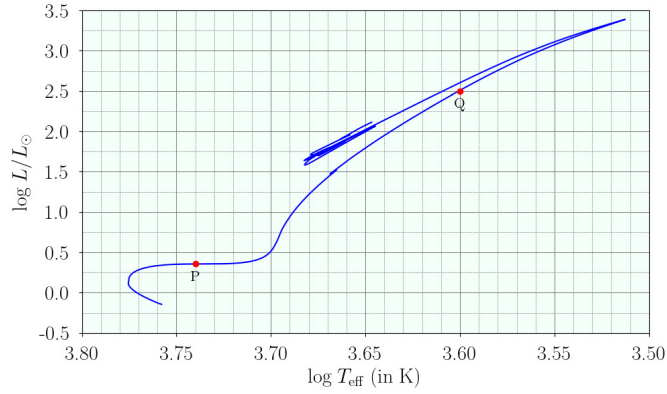
(T11.1c) Skisser de to gjenværende størrelsene fra listen på fem (som ikke ble identifisert som kurve A, B eller C) gitt i (T11.1a), som funksjoner av r/R på samme graf i summeringssvararket, og merk dem med deres respektive størrelser.

[5]

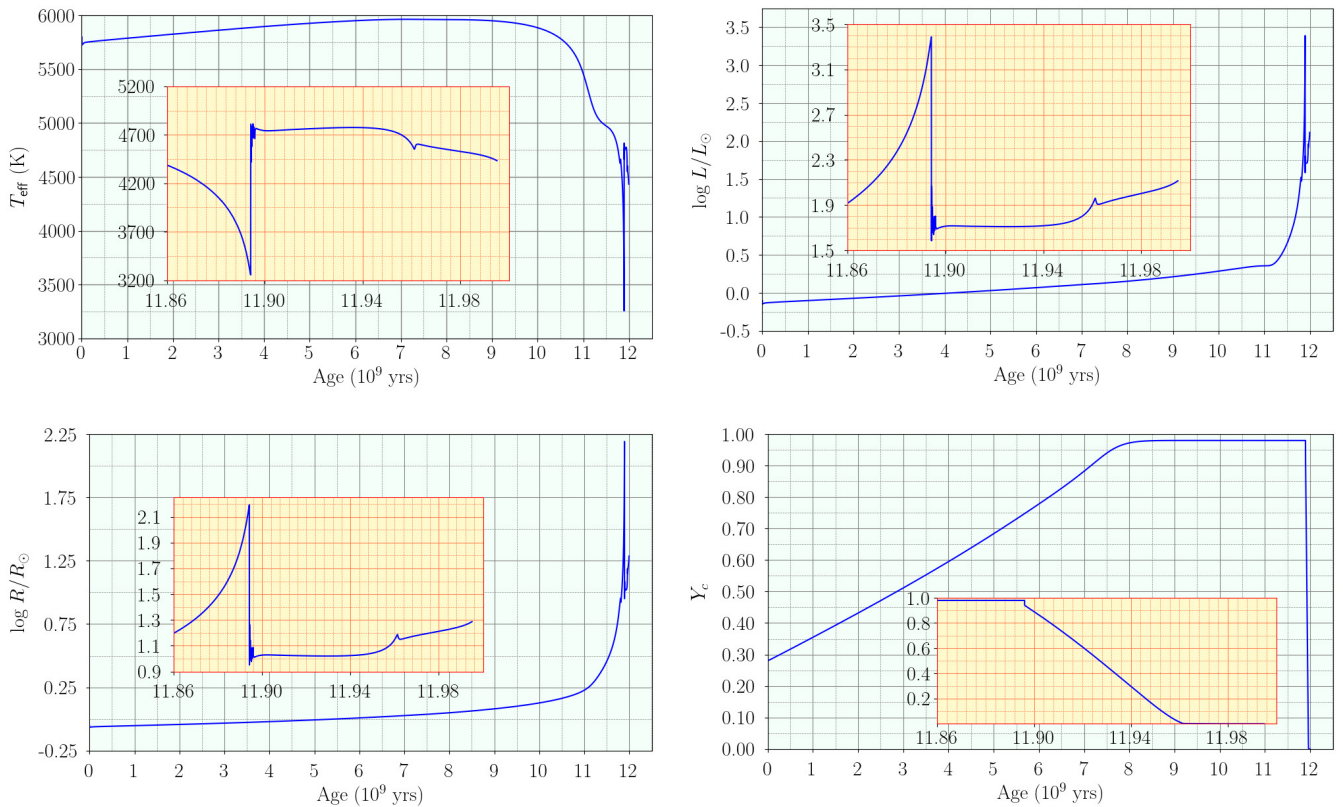
(T11.2) Del 2: Stjerner i utvikling

Vi skal se på utviklingen av en $1M_{\odot}$ stjerne som starter med en homogen sammensetning bestemt av masseandelene av helium, $Y_0 = 0.28$, og metaller, $Z_0 = 0.02$. Figurene nedenfor viser variasjonen av forskjellige globale størrelser for denne stjernen mens den utvikler seg fra ZAMS (Zero Age Main Sequence) til slutten av heliumbrenning i kjernen.

Grafen nedenfor viser utviklingskurven til stjernen i HR-diagrammet (plott av $\log L/L_{\odot}$ mot $\log T_{\text{eff}}$, hvor L er overflateluminositeten og T_{eff} er den effektive temperaturen).



Figuren nedenfor har fire grafer som viser variasjonen av T_{eff} (i K), L (plottet som $\log L/L_{\odot}$), R (plottet som $\log R/R_{\odot}$), og Y_c med alder (i 10^9 år) for den samme stjernen. I hver av disse fire grafene viser innsettene variasjonene av de respektive størrelsene i mer detalj mellom alderen $11,86 \times 10^9$ år til $12,00 \times 10^9$ år, for å vise endringene tydeligere.



Bruk disse grafene til å svare på spørsmålene nedenfor.

- (T11.2a) Hva er den omtrentlige levetiden på hovedserien, t_{MS} (i år), for stjernen? [1]
- (T11.2b) Hva er den omtrentlige varigheten, Δt_{He} (i år), for hvor lenge stjernen brenner helium i kjernen? [1]
- (T11.2c) Hvilken andel, f_{H} , av den opprinnelige mengden hydrogen ved senteret av stjerna har blitt brent når lysstyrken til stjernen er $1 L_{\odot}$? [3]
- (T11.2d) Hva er radien til stjernen, R_1 (i enheter av $R_{\odot}$) når 60% av den opprinnelige mengden hydrogen i sentrum har blitt brent? [3]

(T11.2e) Hva er radiene til stjernen, R_P og R_Q (i enheter av $R_\odot$), som tilsvarer henholdsvis posisjonene P og Q, som er markert i HR-diagrammet? [4]

(T11.3) **Del 3: Massefordeling inne i en stjerne**

Ligningen som bestemmer massefordelingen inne i en stjerne er gitt ved

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Det vil være praktisk å uttrykke denne ligningen i form av tre dimensjonsløse variabler, nemlig den fraksjonelle massen, q , den fraksjonelle radien, x , og den relative tettheten, σ , som vi definerer som

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

hvor M og R er henholdsvis stjernens totale masse og radius, og $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ er stjernens gjennomsnittlige tetthet. For den spesifikke stjernen som vi skal vurdere i denne delen, er følgende informasjon gitt:

- Den sentrale tettheten $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$
- Halvparten av stjernens masse er inneholdt innenfor de indre 25% av dens totale radius, og 70% av dens masse er inneholdt innenfor de indre 35% av dens totale radius.

I alle påfølgende deler av dette spørsmålet vil det være tilstrekkelig å avrunde alle utledede numeriske koeffisienter til innenfor 0,005.

(T11.3a) Uttrykk ligningen ovenfor som beskriver avhengigheten av masse på radius i form av x , $\frac{dq(x)}{dx}$ og $\sigma(x)$. [2]

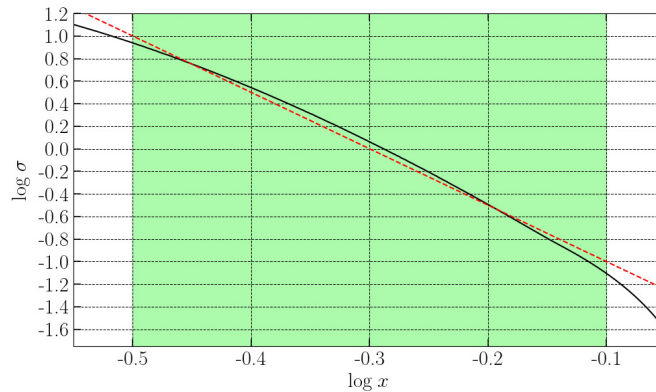
For å få fordelingen av masse med radius, må vi kjenne tetthetsprofilen inne i stjernen. For dette problemet skal vi beskrive variasjonen av tetthet med radius ved tilnærmede former i to intervaller av x :

- den indre delen av stjernen: $0 \leq x \leq 0.32$
- den midtre delen av stjernen: $0.32 < x < 0.80$

Vi gjør ingen tilnærming for den ytterste delen, dvs. $0.80 \leq x \leq 1.00$.

(T11.3b) **Tilnærming for midtdelen:**

Variasjonen av $\log \sigma$, som en funksjon av $\log x$ i den midtre delen av stjernen er angitt (med den svarte kurven) i grafen nedenfor. Vi skal lage en lineær tilnærming (vist som en stiplet rød linje i grafen) for $\log \sigma$ som en funksjon av $\log x$ i intervallet $-0.5 < \log x < -0.1$, dvs. $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (vist ved det grønnskrevne området). Videre skal vi tilnærme signingstallet for denne linjen med det nærmeste heltallet.



Bruk denne tilnærmingen til å skrive et uttrykk for $\sigma(x)$ som en funksjon av x i intervallet $0.32 < x < 0.80$. [4]

(T11.3c) Bruk resultatet fra (T11.3b) til å utlede et uttrykk for $q(x)$ i intervallet $0.32 < x < 0.80$. [6]

(T11.3d) **Tilnærming for den indre delen:**

I den indre delen av stjernen ($0 \leq x \leq 0.32$), kan tettheten tilnærmes som en lineær funksjon av radius, dvs. $\sigma(x) = Ax + B$, hvor A, B er konstanter. Bestem A og B , og få dermed et uttrykk for $q(x)$ i intervallet $0 \leq x \leq 0.32$. Bemerk at tilnærmingene som er brukt i forrige del og denne delen kan føre til små diskontinuiteter i tetthet eller masse ved $x = 0.32$. [8]

(T11.3e) Uttrykkene for $q(x)$ som er utledet i delene (T11.3c) og (T11.3d) er tilnærminger som beskriver variasjonen av masse med radius ganske godt, men bare i spesifikke regioner av stjernen. For domenet $0.80 \leq x \leq 1$ (som vi ikke har utledet noe uttrykk for), er det mulig å bruke passende ekstrapolering fra naboregionen. Bruk disse tilnærmede uttrykkene og gitte data til å skissere en jevn kurve (uten noen diskontinuiteter enten i $q(x)$ eller dens deriverte) for $q(x)$ vs x for hele stjernen ($0 \leq x \leq 1$) som representerer variasjonen av masse med radius. [4]

(T12) Hawking-stråling fra sorte hull

[50 poeng]

(T12.1) Et sort hull (BH) dannes typisk ved gravitasjonskollaps av en massiv stjerne til et punkt kalt en singularitet. Dette skjer ved slutten av stjernens livssyklus. På grunn av den ekstreme gravitasjonen til et slikt objekt, kan ingenting som kommer innenfor den såkalte hendelseshorisonten (en sfærisk overflate med $r = R_{SC}$, hvor r er avstanden fra singulariteten) unnslippe fra den. Vi kaller R_{SC} for Schwarzschild-radien.

(T12.1a) **Modellering av opphavet til Hawking-stråling:** Anta et par partikler, hver med masse m , produsert på hver sin side av BH-horisonten. En partikkel er litt utenfor horisonten ved $r \approx R_{SC}$, mens den andre partikkelen er innenfor horisonten ved $r = \kappa R_{SC}$. Anta at den totale energien til en partikkel er summen av dens hvilemasse-energi mc^2 og den gravitasjonelle potensielle energien på grunn av BH.

Bestem hvilken verdi av κ som gjør at partikkelparet har null total energi.

[4]

(T12.1b) **Temperatur til et sort hull:** Hvis partikkelen som produseres utenfor horisonten i prosessen ovenfor har nok kinetisk energi, kan den unnslippe det sorte hullet i en prosess kalt Hawking-stråling. Den som er inne i horisonten, har negativ energi. Denne partikkelen blir absorbert og reduserer massen til det sorte hullet.

Anta at all Hawking-stråling består av fotoner med et svart legeme-spektrum som har topp ved bølgelengden $\lambda_{\text{bh}} \approx 16R_{\text{SC}}$. For et sort hull med solmasse $M_{\odot}$ er det kjent at $R_{\text{SC}, \odot} = 2,952 \text{ km}$.

Utleid et uttrykk for temperaturen, T_{bh} , til det sorte hullet som tilsvarer denne svart legeme-strålingen, uttrykt ved massen M_{bh} og fysiske konstanter. Beregn Schwarzschild-radiusen, $R_{\text{SC}, 10\odot}$, og temperaturen, $T_{\text{bh}, 10\odot}$, for et sort hull med masse $10 M_{\odot}$. [4]

(T12.1c) **Massetap fra et sort hull:** Anta at Hawking-strålingen sendes ut fra hendelseshorisonten.

Ved å bruke masse-energi-ekvivalensen, utled et uttrykk for raten til massetapet, $dM_{\text{bh}}(t)/dt$, uttrykt ved massen $M_{\text{bh}}(t)$ til det sorte hullet og fysiske konstanter.

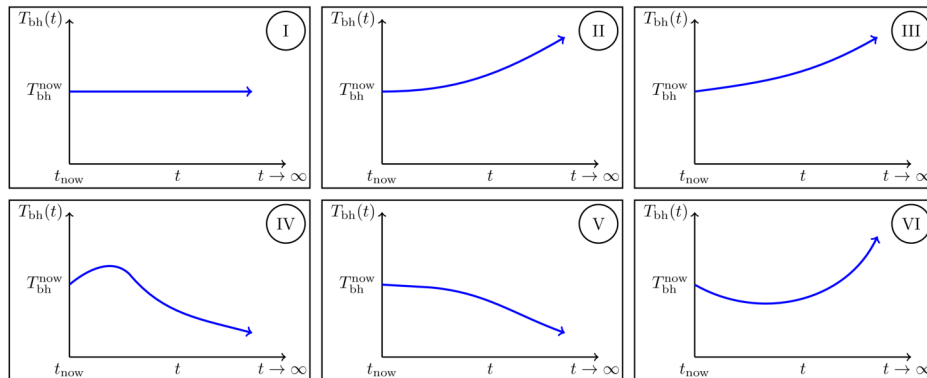
Utleid deretter et uttrykk for $M_{\text{bh}}(t)$ for et sort hull med opprinnelig masse M_0 . Skisser $M_{\text{bh}}(t)$ som en funksjon av t fra $M_{\text{bh}} = M_0$ til $M_{\text{bh}} = 0$. [8]

(T12.1d) **Levetid for et sort hull:** Utleid et uttrykk for levetiden τ_{BH} der et sort hull med opprinnelig masse M_0 fordampes fullstendig på grunn av Hawking-stråling, uttrykt ved hjelp av M_0 og fysiske konstanter. Beregn levetiden $\tau_{\text{bh}, 10\odot}$ (i sekunder) for et sort hull med $M_0 = 10 M_{\odot}$. [3]

(T12.1e) **Svart hull i et CMB-strålingsbad:** Vurder et isolert svart hull i verdensrommet, langt unna andre legemer, med en nåværende temperatur $T_{\text{bh}}^{\text{now}}$, omgitt av den kosmiske mikrobølgebakgrunnen (CMB) med en nåværende temperatur $T_{\text{cmb}}^{\text{now}} = 2,7 \text{ K}$. Det svarte hullet kan vokse i masse ved å absorbere CMB-stråling, og miste masse gjennom Hawking-stråling.

Med hensyn til universets akselererende ekspansjon, identifiser hvilke av følgende figurer som viser langtids tidsutvikling av T_{bh} i følgende tre tilfeller:

(X) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} > T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$, (Y) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} = T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$, (Z) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} < T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$.



Angi svaret ditt ved å krysse av i passende boks (kun én) for hvert tilfelle X, Y eller Z i tabellen som er gitt i sammendrags-svararket som tilsvarer det riktige figurnummeret. [6]

(T12.2) Primordiale sorte hull (PBHs) med mye mindre masser kan dannes i det veldig tidlige universet. Alle de følgende spørsmålene er relatert til PBHs. Her kan alle prosesser som øker massen til det sorte hullet neglisjeres.

(T12.2a) **PBH som fordampes i nåværende epoke:** Som du kanskje har lagt merke til fra svarene på de forrige spørsmålene, ville sorte hull med solmasse ta lang tid å fordampe. Men siden PBH-er kan ha en mye mindre masse, kan vi kanskje se dem fordampe i nåværende tid.

Finn den opprinnelige massen $M_{0, \text{PBH}}$ (i kg), Schwarzschild-radius $R_{\text{SC}, \text{PBH}}$ (i m), og temperatur T_{PBH} (i K) for et sort hull som kan være i ferd med å fordampe fullstendig i nåværende epoke, dvs. de med levetid $\tau_{\text{PBH}} = 14$ milliarder år. [4]

- (T12.2b) **Dannelse av et PBH:** I det strålingsdominerte tidlige universet varierer skalafaktoren som $a(t) \sim t^{1/2}$. I denne epoken dannes PBH-er på grunn av kollapsen av all energi som er inneholdt i et område med fysisk størrelse ct , hvor t er universets alder på det tidspunktet.

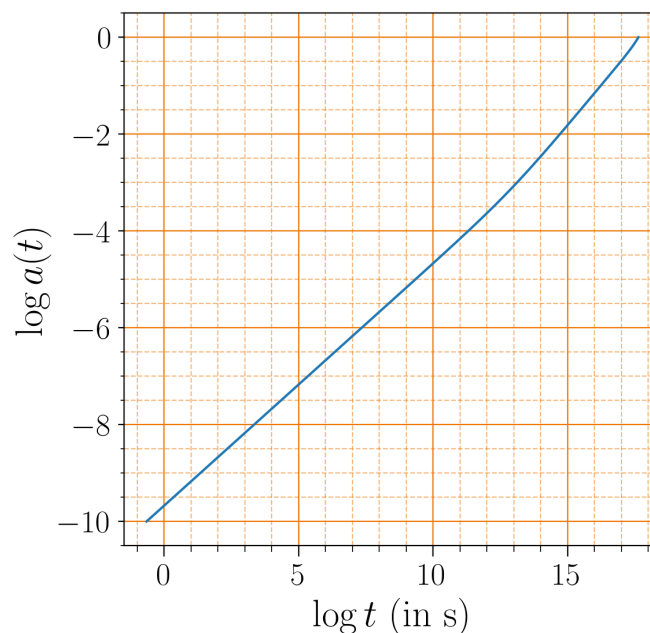
Et PBH med masse på 1×10^{12} kg dannes når universets alder er omtrent 1×10^{-23} s. [6]
Beregn alderen til universet, t_{20} , når et PBH med masse på 1×10^{20} kg dannes.

- (T12.2c) **Observert spektrum av Hawking-stråling fra PBH:** Anta at et PBH med opprinnelig masse på 1×10^{10} kg fordampes fullstendig ved slutten av sitt levetid τ_{PBH} . For denne deloppgaven kan du anta for enkelhets skyld at mesteparten av Hawking-strålingen sendes ut på dette tidspunktet, med en temperatur som tilsvarer dets opprinnelige masse. Anta også at skalafaktoren for universet endrer seg som $a(t) \sim t^{2/3}$.

Beregn toppbølgelengden for denne Hawking-strålingen slik den observeres på jorden, λ_{earth} , ved den nåværende epoken ($t = 14$ milliarder år). [5]

- (T12.2d) **Høyenergetisk kosmisk stråling fra PBH:** Anta nå at Hawking-strålingen som sendes ut på et gitt tidspunkt t tilsvarer fotoner som sendes ut med en energi $k_B T_{\text{bh}}(t)$. Videre er den høyest mulige temperaturen for et sort hull Planck-temperaturen T_{Planck} hvor $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Utviklingen av skalafaktoren over relevante tidsskalaer er angitt i den følgende figuren. Skalafaktoren i dag er satt til å være én. $t(s)$ på tidsaksen representerer universets alder i sekunder.



Hvis et foton med en energi på $E_{\text{det}} = 3,0 \times 10^{20}$ eV observeres på Jorden, bestem de største og minste mulige verdiene for den opprinnelige massen til PBH (M_0^{max} og M_0^{min} , henholdsvis) som kunne være opphavet til dette fotonet. [10]