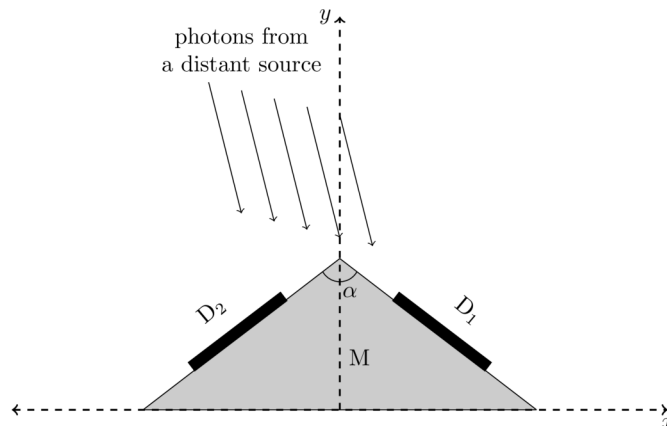


(T01) Misiunea Daksha

[10 puncte]

„Daksha” este o misiune propusă de India, formată din doi sateliți S_1 și S_2 care orbitează Pământul pe aceeași orbită circulară cu raza $r = 7000$ km, dar cu o diferență de fază de 180° . Acești sateliți observă universul în domeniul energiilor înalte (raze X și raze γ). Fiecare dintre sateliții Daksha utilizează mai mulți detectori plăți, dreptunghiulari.

Pentru a înțelege cum să localizăm o sursă pe cer, vom folosi un model simplificat al misiunii Daksha. Presupunem că S_1 are doar două detectoare identice D_1 și D_2 , fiecare cu o suprafață $A = 0,50$ m², atașate la un suport opac M , așa cum se arată în figura de mai jos. Detectoarele sunt situate simetric în jurul axei y în plane perpendiculare pe planul $x - y$ și formează un unghi $\alpha = 120^\circ$ unul cu celălalt.



- (T01.1) Când se observă o sursă îndepărtată situată în planul $x - y$, detectorul D_1 înregistrează o putere $P_1 = 2,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹, iar detectorul D_2 înregistrează o putere $P_2 = 4,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹.

Estimați unghiul η format de vectorul de poziție al sursei cu axa y pozitivă, acest unghi este considerat pozitiv dacă se măsoară în sens invers acelor de ceasornic față de axa y pozitivă. **[5]**

Să luăm în considerare un singur impuls de la o sursă îndepărtată (nu neapărat în planul $x - y$), înregistrat de ambii sateliți (S_1 și S_2) ai Daksha. Momentele vârfurilor impulsurilor înregistrate de S_1 și S_2 sunt t_1 și respectiv t_2 .

- (T01.2) Dacă $t_1 - t_2$ a fost măsurat ca fiind $10,0 \pm 0,1$ ms, atunci determinați fracțiunea f din sfera cerească în care s-ar putea afla sursa. **[5]**

(T02) Makar-Şankranti

[10 puncte]

Festivalul „Makar-Sankranti” este sărbătorit în India atunci când Soarele pare să intre în regiunea zodiacală a Capricornului (Makar = Capricorn, Sankranti = Intrare), așa cum este văzut de pe Pământ. În prezent, este sărbătorit în jurul datei de 14 ianuarie a fiecărui an. Cu mulți ani în urmă, acest festival a coincis și cu solstițiul de iarnă din emisfera nordică, despre care presupunem că are loc pe 21 decembrie.

- (T02.1) Pe baza informațiilor de mai sus, găsiți anul, y_c , în care celebrarea acestui festival a coincis ultima dată cu Solstițiul de iarnă în emisfera nordică. **[3]**
- (T02.2) Dacă Soarele a intrat în regiunea zodiacală a Capricornului la ora locală 11:50:13 pe 14 ianuarie 2006 în Mumbai, calculați data, D_{enter} , și ora locală, t_{enter} , intrării sale în Capricorn în anul 2013. **[3]**
- (T02.3) Festivalul Makar-Sankranti este sărbătorit într-un anumit loc în ziua primului apus de soare în regiunea zodiacală a Capricornului. Puteți presupune că ora locală a apusului de soare în Mumbai în ianuarie este 18:30:00.

Indicați data celebrării festivalului în fiecare an între 2006 și 2013 (bifând (✓) căsuța [4]
corespunzătoare din tabelul din foaia de răspuns).

(T03) Unde gravitaționale

[15 puncte]

Găurile negre binare care orbitează generează unde gravitaționale. Să luăm în considerare două găuri negre, în galaxia noastră, cu mase $M = 36 M_{\odot}$ și $m = 29 M_{\odot}$, care se rotesc pe orbite circulare cu o frecvență unghiulară orbitală ω în jurul centrului lor de masă.

- (T03.1) Presupunând gravitația newtoniană, găsiți o expresie pentru frecvența unghiulară, ω_{ini} , a orbitelor găurilor negre la un moment dat, t_{ini} , când separarea dintre găurile negre era de 4,0 ori suma razelor lor Schwarzschild, în termeni de doar M , m , și constante fizice.

Calculați valoarea lui ω_{ini} (în rad s^{-1}).

[5]

- (T03.2) În relativitatea generală, găurile negre de pe orbită emit unde gravitaționale cu frecvența f_{GW} , astfel încât $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. Acest lucru micșorează orbitele găurilor negre, ceea ce, la rândul său, crește f_{GW} . Rata de variație a lui f_{GW} este

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

unde $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ se numește „masa chirp”.

Găsiți valorile lui α , β și δ .

[4]

- (T03.3) Presupunem că undele gravitaționale asociate cu evenimentul au fost detectate pentru prima dată [6]
la momentul $t_{\text{ini}} = 0$.

Găsiți o expresie pentru timpul observat al fuziunii găurilor negre, t_{merge} , când f_{GW} devine foarte mare, în termeni de ω_{ini} , M_{chirp} , și constante fizice.

Calculați valoarea lui t_{merge} (în secunde).

(T04) Reducerea Balmer

[15 puncte]

Să luăm în considerare o stea de secvență principală înconjurată de o nebuloasă. Magnitudinea observată în banda V a stelei este de 11,315 mag. Regiunea ionizată a nebuloasei din apropierea stelei emite liniile $H\alpha$ și $H\beta$; lungimile lor de undă sunt de $0,6563 \mu\text{m}$ și, respectiv, $0,4861 \mu\text{m}$. Raportul teoretic prezis dintre fluxurile din liniile $H\alpha$ și $H\beta$ este $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2.86$. Cu toate acestea, atunci când această radiație trece prin porțiunea exterioară a nebuloasei cu praf rece, fluxurile de emisie observate ale liniilor $H\alpha$ și $H\beta$ sunt de $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ și, respectiv, $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

Extincția A_{λ} este o funcție de lungimea de undă și este exprimată ca

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(BV).$$

Aici, $\kappa(\lambda)$ este curba de extincție, iar $E(BV)$ reprezintă excesul de culoare în benzile de filtre B și V. Curba de extincție (cu λ în μm) este dată după cum urmează.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

unde, $R_V = A_V/E(BV) = 3.1$ este raportul dintre extincția totală și cea selectivă.

(T04.1) Găsiți valorile $\kappa(H\alpha)$ și $\kappa(H\beta)$. [3]

(T04.2) Găsiți valoarea raportului excesului de culoare $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(BV)}$. [4]

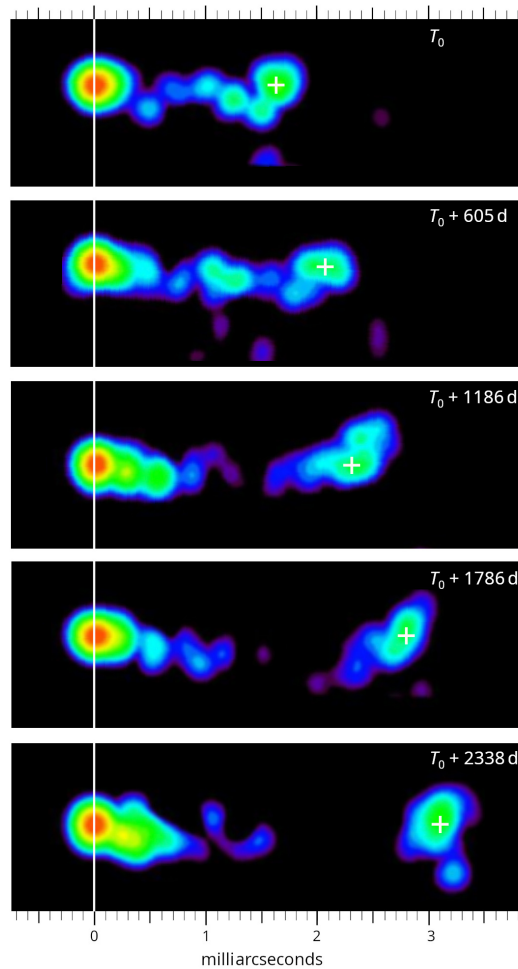
(T04.3) Estimați extincția cauzată de nebuloasă, $A_{H\alpha}$ și $A_{H\beta}$, la lungimile de undă $H\alpha$ și respectiv $H\beta$. [6]

(T04.4) Estimați extincția nebuloasei (A_V) și magnitudinea aparentă a steii în banda V, m_{V0} , în absența nebuloasei. [2]

(T05) Quasari

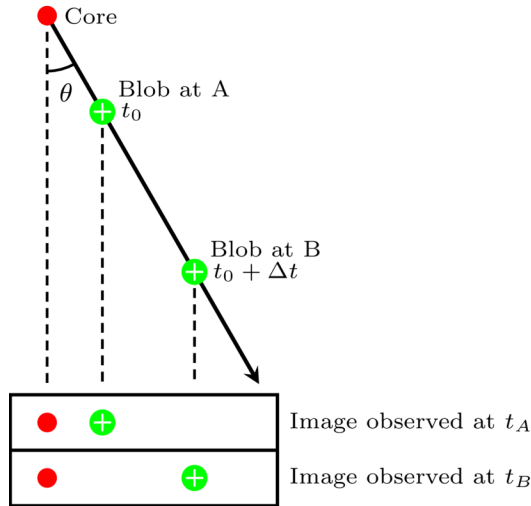
[20 de puncte]

Un quasar este o galaxie activă, extrem de luminoasă, alimentată de o gaură neagră supermasivă ce emite jeturi relativiste. Figura prezintă o serie de panouri cu imagini radio ale unui quasar (cu deplasare la roșu $z = 0,53$ și o distanță de luminozitate $D_L = 1,00 \times 10^{10}$ a.l.) la momente diferite. „Nucleul” se aliniază cu linia albă verticală, în timp ce un jet, format dintr-o „pată” (marcată cu alb +), se îndepărtează de acesta în timp. Fiecare panou arată timpul de observare (începând cu T_0 pentru prima imagine), iar scara unghiulară este indicată în partea de sus și de jos a figurii.



- (T05.1) Determinați distanța unghiulară a petei, ϕ_{blob} (în miliarcsecunde), și distanța transversală, l_{blob} (în ani-lumină), față de miezul quasarului, pentru fiecare observație. Apoi, calculați viteza aparentă a petei în direcția transversală (v_{app}) ca fracțiune din viteza luminii, β_{app} ($= v_{\text{app}}/c$) utilizând observații consecutive. De asemenea, calculați viteza aparentă medie $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ pentru întreaga perioadă de observații. [5]

Jetul quasarului se mișcă de fapt cu o viteză relativistă $v \equiv \beta c$, dar nu neapărat în planul cerului; de exemplu, formează un unghi θ („unghiul de vizualizare”) față de linia de vedere a unui observator îndepărtat (indicat de liniile punctate), așa cum se arată în schița de mai jos. Pentru această parte și pentru toate părțile ulterioare, ignorați deplasarea la roșu a quasarului și orice efecte relativiste.



- (T05.2) Lumina emisă de pată la două momente diferite t_0 (corespunzătoare poziției A) și $t_0 + \Delta t$ (corespunzătoare poziției B) ajunge la observator la t_A și respectiv t_B . Astfel, diferența de timp observată este $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

- (T05.2a) Găsiți o expresie pentru raportul $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ în termeni de β and θ . [2]

- (T05.2b) Folosind acest raport, exprimați β_{app} în funcție de β și θ . [2]

- (T05.3) Mișcarea se numește superlumină dacă viteza aparentă depășește viteza luminii ($\beta_{\text{app}} > 1$), și sublumină dacă nu depășește această viteză ($\beta_{\text{app}} < 1$).

- (T05.3a) Pentru $\beta_{\text{app}} = 1$, trasați o curbă a lui β în funcție de θ pentru a marca limita dintre mișcările subluminale și superluminale. Hașurați regiunea superlumină în grafic cu linii oblice (///). [4]

- (T05.3b) Găsiți cea mai mică viteză reală a jetului ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$) pentru ca mișcarea superluminică să aibă loc și unghiul de vizualizare corespunzător θ_{low} . [2]

- (T05.4) Găsiți o expresie pentru unghiul maxim de vizualizare, θ_{max} , pentru care va fi posibilă o valoare dată a lui β_{app} . [2]

Nucleul unui quasar, obiectul său central, compact, prezintă variabilitate în emisia sa datorită proceselor interne care au loc într-o regiune legată cauzal. Dimensiunea (= raza) acestei regiuni este de obicei considerată a fi de aproximativ cinci ori mai mare decât raza Schwarzschild a nucleului.

- (T05.5) Nucleul unui anumit quasar variază pe scări de timp de aproximativ 1 oră. Obțineți o limită superioară, $M_{c, \text{max}}$, pentru masa obiectului compact central, în unități de masă solară. [3]

(T06) Rotația Galactică

[20 de puncte]

Curba de rotație a Galaxiei noastre este determinată folosind măsurători ale vitezei în linie dreaptă a norilor de hidrogen neutru (HI) de-a lungul diferitelor longitudini galactice, observate prin linia HI de 21 cm. Considerăm un nor HI cu longitudinea galactică l , situat la o distanță R de Centrul Galactic (CG) și la o distanță D de Soare. Considerăm Soarele la o distanță $R_0 = 8,5$ kpc de CG. Presupunem că atât Soarele, cât și norul HI se află pe orbite circulare în jurul CG, în planul galactic, cu viteze unghiulare Ω_0 și Ω , și viteze de rotație V_0 și V , respectiv.

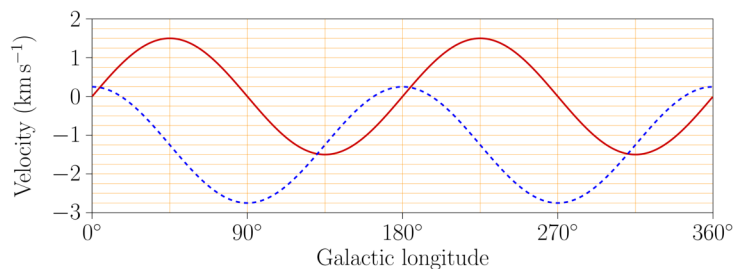
Componentele vitezei norului pe linia de vizibilitate și pe direcția transversală, (V_r), respectiv (V_t), așa cum sunt observate de pe Soare, pot fi exprimate prin

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Văzută de la Polul Nord Galactic, rotația galactică este în sensul acelor de ceasornic. În cadrul acestei probleme, vom considera viteza pe linia de vizibilitate ca fiind pozitivă atunci când se îndepărtează iar norii vor fi tratați ca puncte materiale.

- (T06.1) În graficul furnizat pe foaia de răspunsuri, trasați V_r în funcție de D de la $D = 0$ până la $D = 2R_0$ [5]
pentru două linii de vedere definite de (i) $l = 45^\circ$ și (ii) $l = 135^\circ$. Etichetați fiecare dintre liniile/curbele dvs. cu valoarea lui l .
- (T06.2) Graficul de mai jos prezintă componentele ale vitezei medii radiale (curbă continuă, roșie) și transversale (curbă punctată, albastră) ale stelelor aflate la o distanță de 100 pc de Soare, reprezentate grafic în funcție de longitudinea galactică.



Folosind graficul, estimați perioada orbitală a Soarelui (P) în jurul CG în mega-ani (Myr).

[3]

- (T06.3) Jan Oort a observat că în vecinătatea solară ($D \ll R_0$), diferența dintre vitezele unghiulare ($\Omega - \Omega_0$) va fi mică și, prin urmare, a obținut următoarea aproximare de ordinul întâi pentru componentele pe direcția liniei de vedere și pe direcția transversală ale vitezei:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

unde A și B sunt cunoscute ca constante ale lui Oort.

Să luăm în considerare două cazuri:

(I) curba actuală de rotație a Galaxiei și

(II) curba de rotație pentru un scenariu ipotetic în care Galaxia este lipsită de materie întunecată și se presupune că întreaga masă a Galaxiei este concentrată în centrul său.

- (T06.3a) Găsiți expresiile pentru gradientul radial al vitezei de rotație la locația Soarelui, [2]
 $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$, pentru cele două cazuri.

- (T06.3b) Exprimați A și B în funcție de V_0 , R_0 , și gradientul radial al vitezei de rotație la locația Soarelui, [8]
 $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$.

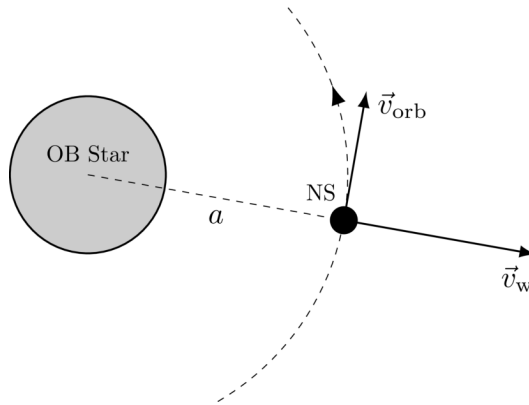
- (T06.3c) Raportul (A/B) al constantelor lui Oort pentru cele două cazuri date, (I) și (II), este [2]
definit ca F_I și F_{II} , respectiv. Determinați F_I și F_{II} .

(T07) Stea binară neutronică

[20 de puncte]

Într-un sistem binar care implică o stea compactă, unde steaua însoțitoare nu își depășește lobul Roche, sursa principală de acreție pentru steaua compactă este vântul stelar provenit de la steaua însoțitoare. Această acreție alimentată de vânt este deosebit de importantă în sistemele care includ o stea de tip timpuriu (cum ar fi o stea O sau B, indicată de acum înainte ca stea OB), alături de un obiect compact precum o stea neutronică (NS) pe o orbită apropiată.

Să considerăm un astfel de sistem binar stelar NS-OB, în care o stea neutronică cu masa $M_{NS} = 2.0 M_{\odot}$ și raza $R_{NS} = 11 \text{ km}$ orbitează pe o orbită circulară cu raza a în jurul centrului stelei OB cu viteza $v_{orb} = 1.5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (vezi figura de mai jos). În cadrul acestei probleme, se presupune că pierderea de masă a stelei OB este sferic simetrică, iar rata sa este $\dot{M}_{OB} = 1.0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.



- (T07.1) Raza de acreție, R_{acc} , este definită ca distanța maximă față de NS la care vântul stelar poate fi captat de NS. Dacă viteza vântului stelar la distanța orbitală a NS este $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, găsiți R_{acc} pentru sistemul de mai sus în km folosind calculul standard al vitezei de evadare. [3]
- (T07.2) Presupunând că tot materialul captat este acreționat de NS, estimați rata de acreție în masă, $\dot{M}_{acc}$, de la vântul stelar pe NS în unități de $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ dacă $a = 0.5 \text{ ua}$. Neglijați efectele presiunii de radiație și timpul finit de răcire al gazului de acreție. [3]
- (T07.3) Acum, să luăm în considerare situația în care viteza vântului stelar la distanța orbitală a (în apropierea stelei NS) devine comparabilă cu viteza orbitală a NS. Rata de acreție de masă din vântul stelar pe NS, în acest caz, ar fi dată de o expresie de forma $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$, unde $q = M_{NS}/M_{OB}$ este raportul de masă a sistemului binar și β este unghiul în cadrul NS dintre direcția vitezei vântului și direcția radială de la steaua OB. Obțineți expresia pentru $f(\tan \beta, q)$ presupunând $M_{OB} \gg M_{NS}$. [6]
- (T07.4) Considerăm că materialul complet ionizat se acumulează radial și este încetinit de câmpul magnetic puternic $\vec{B}$ al NS. Acest efect poate fi modelat ca o presiune, dată de $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Vom presupune că NS are un câmp magnetic dipolar a cărui mărime în planul ecuatorial variază cu distanța r față de NS pentru $r \gg R_{NS}$ când

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{NS}}{r} \right)^3$$

unde B_0 este câmpul magnetic la ecuatorul NS. Să presupunem că axa dipolului magnetic se aliniază cu axa de rotație a stelei NS.

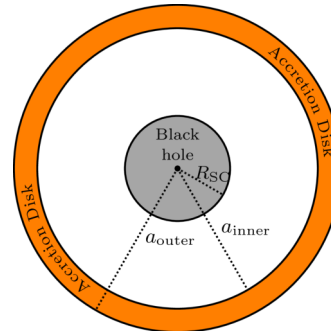
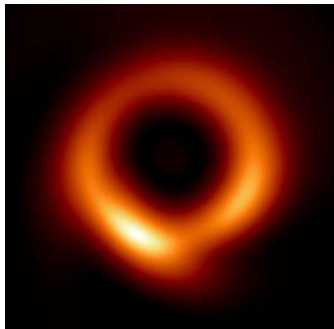
- (T07.4a) Obțineți presiunea magnetică, $P_{\text{eq, mag}}$, în planul ecuatorial în funcție de B_0 , R_{NS} , r și [1]
alte constante adecvate.
- (T07.4b) Distanța maximă la care fluxul de acreție este oprit de câmpul magnetic de la ecuator se numește raza magnetosferică R_m . Acest flux de materie va exercita o presiune datorată mișcării relative dintre vântul stelar incident și steaua NS. Obțineți o expresie aproximativă pentru câmpul magnetic critic $B_{0, c}$ pentru care R_m coincide cu R_{acc} și calculați valoarea sa exprimată în Tesla. Efectele magnetice sunt neglijate pentru $r > R_m$ și se consideră $v_w \gg v_{\text{orb}}$. [7]

(T08) Umbra unei găuri negre

[20 de puncte]

Telescopul Event Horizon (EHT) a obținut o imagine a găurii negre supermasive din centrul galaxiei M87, așa cum se arată în panoul din stânga al figurii de mai jos.

Pentru a înțelege câteva caracteristici simple ale acestei imagini, vom considera un model simplificat al unei găurii negre statice, sferic simetrice, care nu se rotește, cu masa $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$, înconjurat de un disc de acreție plan, subțire, fără masă, cu raze interioare și exterioare, $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ și $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, respectiv, unde R_{SC} este raza Schwarzschild. O schiță, vedere frontală, este prezentată în panoul din dreapta al figurii de mai jos (figura nu este la scară).



Presupunem că discul de acreție este singura sursă de lumină care trebuie luată în considerare. Fiecare punct de pe disc emite lumină în toate direcțiile. Această lumină călătorește sub influența câmpului gravitațional al găurii negre. Traectoria razelor de lumină este guvernată de două ecuații date mai jos (care sunt similare cu cele ale unui obiect în jurul Soarelui):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

unde $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ este coordonata radială, $\phi \in [0, 2\pi)$ este unghiul azimutal, iar E și L sunt constante legate de energia conservată și, respectiv, de momentul cinetic conservat.

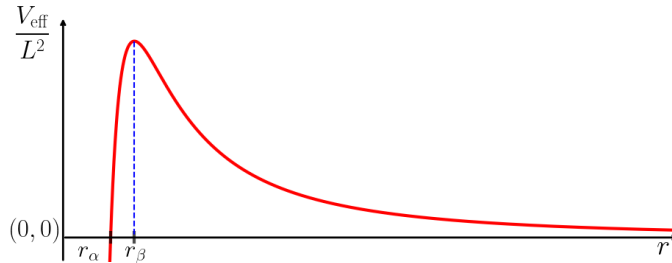
Aici $v_r \equiv dr/dt$ este mărimea vitezei radiale, v_ϕ este mărimea vitezei tangențiale, iar $\omega \equiv d\phi/dt$ este viteza unghiulară. Definim parametrul de impact b pentru o traiectorie ca $b = L/\sqrt{2E}$. Dilatarea timpului este neglijată în această problemă.

O altă ecuație utilă se obține prin diferențierea primei ecuații:

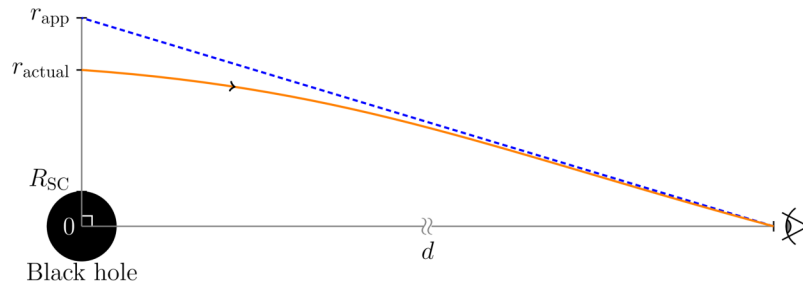
$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

- (T08.1) În jurul găurii negre pot exista traiectorii circulare ale luminii. Găsiți raza, r_{ph} , și parametrul de impact, b_{ph} , pentru astfel de traiectorii ale fotonilor în funcție de M și constantele relevante. [4]

- (T08.2) Calculați timpul, T_{ph} , necesar pentru parcurgerea unei orbite complete a traiectoriei circulare a luminii, în secunde. [2]
- (T08.3) Ecuația vitezei radiale dată mai sus (prima ecuație din această întrebare) poate fi comparată cu o ecuație de forma $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$ pentru traiectoriile luminii. O reprezentare schematică a V_{eff}/L^2 în funcție de r este prezentată mai jos.



- (T08.3a) Graficul indică două raze speciale, r_α și r_β . Obțineți expresii pentru r_α și r_β în funcție de M și constantele relevante. [2]
- (T08.3b) Un foton care călătorește spre interior din discul de acreție către gaura neagră poate totuși să scape la infinit în unele cazuri. Găsiți expresia pentru cea mai mică valoare a razei punctului de întoarcere, r_t , pentru un astfel de foton, în funcție de M și constantele relevante. Găsiți expresia pentru valoarea minimă a parametrului de impact, b_{min} pentru acest foton. [3]
- (T08.4) O rază de lumină provenită de la o rază r_{actual} din centrul sistemului în planul cerului va suferi o curbura puternică din cauza gravitației găurii negre și, în cele din urmă, va ajunge la un observator (indicat printr-un ochi) aflat la o distanță mare d de sistem, așa cum se arată mai jos.

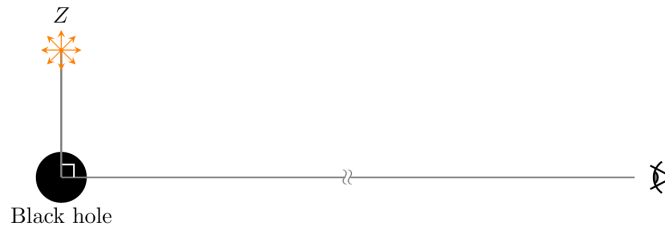


Pentru acest observator, raza pare să fi provenit dintr-un punct diferit, la o distanță $r_{app} \approx b$ de centrul găurii negre în planul cerului, unde b este parametrul de impact pentru traiectoria fotonului respectiv. Pentru punctele de pe discul de acreție la $r = r_{actual}$, se poate considera următoarea relație:

$$b(r_{actual}) \approx r_{actual} (1 + R_{SC}/r_{actual})^{1/2}$$

Pentru un observator aflat la distanță, ca noi, cu o vedere frontală a discului de acreție, imaginea sistemului va apărea ca fiind circular simetrică în planul cerului. Determinați cea mai exterioară rază aparentă, r_{outer} , și cea mai interioară rază aparentă, r_{inner} , a imaginii în unități de unități astronomice. [5]

- (T08.5) Se consideră o gaură neagră supermasivă izolată, cu masa $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$ fără niciun disc de acreție. O explozie scurtă și puternică de radiație electromagnetică are loc timp de 5 s într-un punct Z aflat la o distanță, să zicem, $r_Z = 6R_{SC}$ de gaura neagră, așa cum se arată în figură. Explozia din punctul Z emite lumină în toate direcțiile. Un observator aflat într-un punct îndepărtat de gaura neagră (indicat printr-un ochi în figura de mai jos) realizează o imagine cu expunere lungă a regiunii din jurul găurii negre timp de 60 s.



Alegeți varianta corectă pentru fiecare dintre afirmațiile de mai jos:

- (T08.5a) Numărul de căi posibile pe care lumina le poate parcurge de la Z la observator este [2]
(A) Cel mult una (B) Exact una (C) Exact două (D) Mai mare de două.
- (T08.5b) Numărul de imagini ale exploziei EM la Z care vor fi văzute în imaginea cu expunere lungă este [2]
(A) Cel mult una (B) Exact una (C) Exact două (D) Mai mult de două.

(T09) Seeing atmosferic

[35 de puncte]

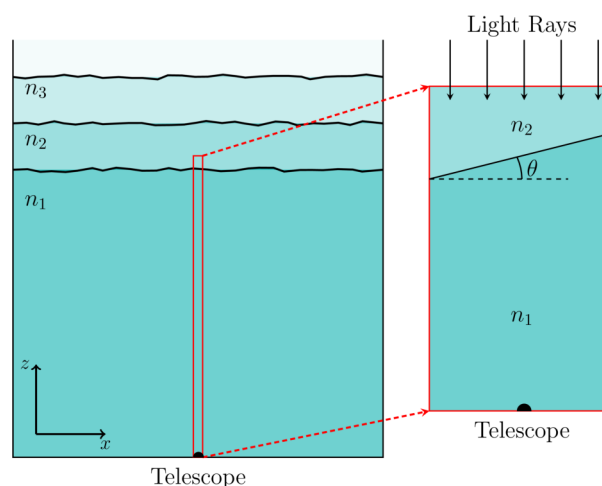
Un telescop cu un obiectiv acromatic convex cu diametrul $D = 15$ cm și distanța focală $f = 200$ cm este îndreptat spre o stea aflată la zenit.

- (T09.1) Determinați diametrul (în m), d_{image} , al imaginii unei surse punctiforme, produsă de lentila obiectivului în planul său focal pentru lumina verde ($\lambda = 550$ nm), luând în considerare doar efectele difracției. [1]

Imaginea unei surse astronomice este, de asemenea, afectată de așa-numita „seeing atmosferic”.

Limitele dintre straturile atmosferice, precum și indicii de refracție ai straturilor se modifică continuu din cauza turbulențelor, variațiilor de temperatură și altor factori. Acest lucru duce la mici modificări ale poziției imaginii în planul focal al telescopului, cunoscute sub numele de „efect de sclipire”. Pentru restul problemei, în afară de utilizarea dimensiunii finite limitate de difracție a imaginii stelei (așa cum s-a folosit mai sus), nu vor fi luate în considerare efectele de interferență.

Panoul din stânga al figurii de mai jos prezintă o secțiune transversală verticală a atmosferei cu straturi multiple cu indici de refracție diferiți ($n_1, n_2, n_3, \dots$). Panoul din dreapta prezintă o vedere mărită a unui segment vertical subțire al atmosferei și limita dintre cele două straturi atmosferice inferioare cu indici de refracție n_1 și n_2 ($n_1 > n_2$). Considerăm doar aceste două straturi și limita lor pentru această problemă. Diagramele nu sunt la scară.

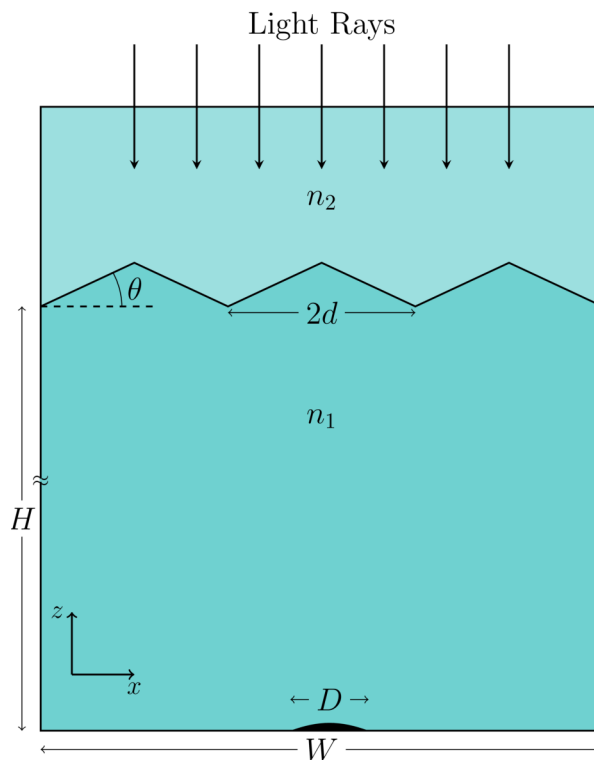


- (T09.2) Fie limita dintre cele două straturi se află la o înălțime $H = 1$ km direct deasupra obiectivului telescopului, cu o înclinare de $\theta = 30^\circ$ față de planul orizontal. În toate părțile acestei probleme, θ este considerat pozitiv în sens invers acelor de ceasornic. Pentru o sursă de lumină monocromatică, $n_1 = 1.00027$ și $n_2 = 1.00026$. Fie deplasarea unghiulară a imaginii la planul focal al telescopului pentru o stea la zenit α .
- (T09.2a) Desenați o diagramă de raze etichetată corespunzător la limită, arătând n_1 , n_2 , θ și α . [2]
- (T09.2b) Găsiți expresia pentru α în funcție de θ , n_1 și n_2 . Folosiți aproximările pentru unghiuri mici: $\sin \alpha \approx \alpha$ și $\cos \alpha \approx 1$. [2]
- (T09.2c) Calculați deplasarea, Δx_θ (în m), în poziția imaginii dacă θ crește cu 1% (menținând n_1 și n_2 fixe). [3]
- (T09.2d) Calculați deplasarea, Δx_n (în m), în poziția imaginii dacă n_2 crește cu 0,0001% (menținând n_1 și θ fixe). [3]
- (T09.3) Pentru lumina albă provenită de la o stea aflată la zenit, alegeți care dintre următoarele variante descrie cel mai fidel forma și culoarea imaginii, bifând (✓) căsuța corespunzătoare (doar una) din foaia de răspuns. Rețineți că x crește de la stânga la dreapta în figură. [2]

	Culoarea imaginii	Forma imaginii	Marginea stângă	Marginea dreaptă
O	Alb	Circular		
B	Alb	Eliptic		
C	Colorat	Circular	Albastru	Roșu
D	Colorat	Circular	Roșu	Albastru
E	Colorat	Eliptic	Albastru	Roșu
F	Colorat	Eliptic	Roșu	Albastru

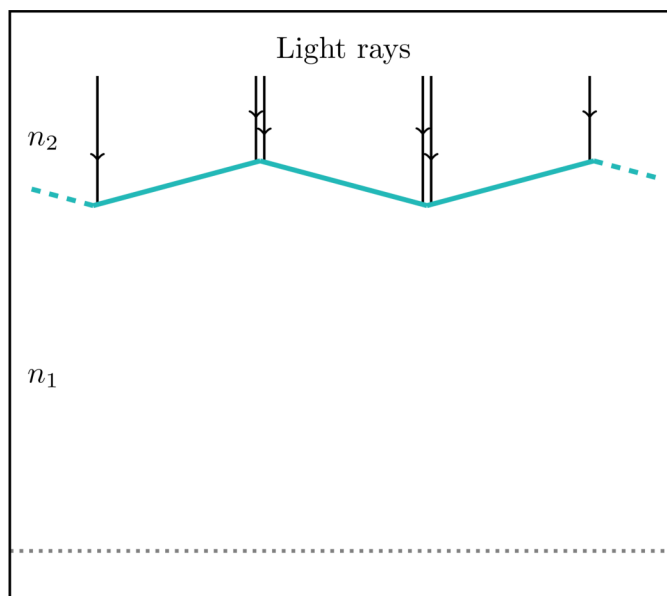
Pentru toate părțile rămase ale acestei probleme, considerăm lumină verde monocromatică cu $\lambda = 550$ nm. Modelăm limita dintre straturi ca un set de plane zig-zag infinite (perpendiculare pe planul paginii) separate de $d = 10$ cm de-a lungul axei x , fie cu $\theta = 0^\circ$ sau $\theta = -10^\circ$.

Figura de mai jos (nerealizată la scară) prezintă o secțiune transversală a acestui model al atmosferei cu lățimea W ($W \ll H$). Pentru telescoapele cu apertură mare, această configurație în zigzag a limitei duce la formarea de pete în planul focal.



(T09.4) Luați în considerare o atmosferă modelată ca mai sus.

(T09.4a) O secțiune a atmosferei cu planuri zig-zag consecutive, cu aceiași parametri ca cei menționați mai sus, este prezentată în diagrama de mai jos (nefiind la scară).



În această diagramă, reprodusă în foaia de răspunsuri, desenați traiectoriile razelor de lumină incidente până la planul în care este plasat obiectivul telescopului, indicat de linia punctată gri.

Marcați regiunea (regiunile), dacă există, cu „X” în diagramă unde nu vor ajunge razele de lumină. [4]

(T09.4b) Calculați lățimea W_X regiunii (regiunilor) respective. [3]

(T09.4c) Găsiți cel mai mare diametru, $D_{\max}$, al obiectivului telescopului cu care va fi posibil să obțineți o singură imagine a unei stele, alegând în mod corespunzător locația telescopului în raport cu structura limitei. [4]

(T09.5) Considerați cazul în care forma în zig-zag a limitei este permisă atât în direcția x , cât și în direcția y (ca un câmp de piramide), și $D = 100$ cm (cu $f = 200$ cm). [6]

Desenați modelul calitativ al petelor rezultate în caseta dată în foaia de răspuns.

(T09.6) Pentru o atmosferă turbulentă, considerați din nou aceeași formă paralelă, în zig-zag a stratului limită numai de-a lungul direcției luăm în considerare din nou aceeași formă în zig-zag paralelă a stratului limită, doar de-a lungul direcției x , dar acum unghiul dintre două planuri se schimbă cu o rată uniformă de la 10° la -10° în 1,0 s. Presupuneți că aceasta duce la o rată uniformă de deplasare a poziției imaginii. [5]

Considerați un telescop cu $D = 8$ cm și $f = 1$ m. Estimați cel mai lung timp de expunere $t_{\max}$ permis pentru camera sa CCD, astfel încât să se obțină o singură imagine, iar orice posibilă deviație a poziției sale să rămână mai mică de 1% din diametrul limitat de difracție al imaginii.

(T10) Nucleosinteza Big Bang-ului

[35 de puncte]

În timpul erei dominate de radiații din Universul timpuriu, factorul de scală a Universului $a \propto t^{1/2}$, unde t este timpul scurs de la Big Bang. În cea mai mare parte a acestei ere, neutronii (n) și protonii (p) rămân în echilibru termic unul cu celălalt prin interacțiuni slabe. Densitatea numerică (N) a neutronilor sau protonilor liberi este legată de temperatura T și de masele lor corespunzătoare m astfel încât

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

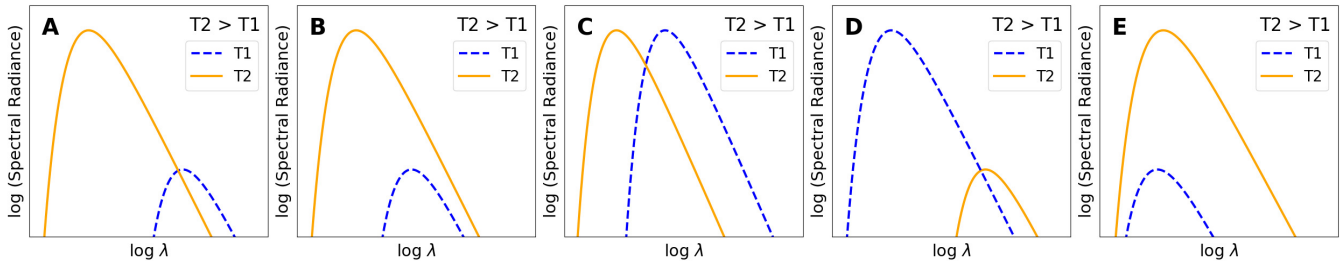
atâta timp cât timpul $t \leq t_{wk} =$ este de 1,70 s, când $k_B T \geq k_B T_{wk} =$ de 800 keV. După t_{wk} , interacțiunile slabe nu mai pot menține un astfel de echilibru, iar neutronii liberi se dezintegrează în protoni cu un timp de înjumătățire de 610,4 s.

(T10.1) Fie densitatea numerică a protonilor N_p și cea a neutronilor N_n . Calculați abundența relativă a neutronilor dată de raportul $X_{n, wk} = N_n / (N_n + N_p)$ la momentul t_{wk} . [4]

(T10.2) Fotonii mențin echilibrul termic și păstrează un spectru de corp negru în toate epocile.

(T10.2a) Găsiți indicele β astfel încât $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Identificați care dintre următoarele grafice prezintă comportamentul corect al densității spectrale de energie pentru două temperaturi T_1 și T_2 . Bifați (✓) opțiunea corectă din foaia de răspuns. [2]



(T10.3) După t_{wk} , procesul de formare a deuteriului din protoni și neutroni este guvernat de ecuația Saha, dată de fizicianul indian prof. Meghnad Saha, care poate fi simplificată la

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T}\right).$$

Aici, raportul barion-foton η este 6.1×10^{-10} , iar N_D este densitatea numerică a deuteriului.

(T10.3a) Reprezentați grafic raportul N_D/N_n pe grila din foaia de răspuns, pentru cel puțin 4 valori ale temperaturii distanțate rezonabil, care se află în domeniul $k_B T = [60, 70]$ keV și desenați o curbă care trece prin aceste puncte. [5]

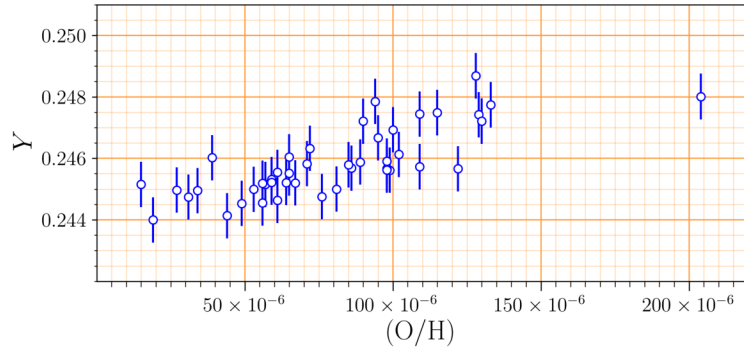
(T10.3b) Din grafic, găsiți $k_B T_{nuc}$ (în keV) când $N_D = N_n$. [1]

(T10.3c) În schimb, presupunem acum că toți neutronii liberi se combină instantaneu cu protonii de la $k_B T_{nuc}$ pentru a forma Deuteriu, iar tot acesta este convertit imediat în Heliu (${}^4_2\text{He}$). Calculați epoca sau timpul corespunzător de nucleosinteză, t_{nuc} (în s), pentru formarea Heliului. [4]

(T10.4) Calculați valoarea lui $X_{n, nuc}$ imediat înainte de t_{nuc} . [5]

(T10.5) Abundența primordială a heliului, Y_{prim} , este definită ca fiind fracțiunea din masa barionică totală din Univers care este legată în heliu imediat după t_{nuc} . Obțineți o estimare teoretică pentru valoarea lui Y_{prim} . Doar în scopul acestui calcul, presupuneți $m_p \approx m_n$ și că masa heliului, $m_{He} \approx 4m_n$. [3]

- (T10.6) Abundența primordială a heliului este foarte dificil de măsurat, deoarece stelele transformă continuu hidrogenul în heliu în Univers. Cantitatea procesată de către stelele dintr-o galaxie este caracterizată de densitatea numerică relativă a oxigenului (care este produs doar de stele) față de hidrogen, notată cu (O/H) , în galaxie. O compilație a măsurărilor (O/H) și a abundenței heliului, Y , pentru diferite galaxii este reprezentată grafic mai jos.



Folosește toate punctele din acest grafic (care este reprodus în foaia de răspuns) pentru a răspunde la următoarele.

- (T10.6a) Estimați Y pentru o galaxie pitică compactă albastră cu o valoare de $(O/H) = 1,75 \times 10^{-6}$ [2]
- (T10.6b) Obțineți panta $dY/d(O/H)$ a fitării cu o linie dreaptă a datelor de mai sus. [2]
- (T10.6c) Estimați abundența primordială de heliu, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, pe baza observațiilor de mai sus. [2]
- (T10.7) Abaterea dintre Y_{prim} și $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ poate fi reconciliată prin modificarea raportului barion-foton η . [3]
Când η scade, așa cum este indicat de $\downarrow$ în foaia de răspuns, indicați creșterea ($\uparrow$) sau scăderea ($\downarrow$) a $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (când $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{\text{n, nuc}}$ și Y_{prim} în căsuțele prevăzute în foaia de răspuns.

(T11) Stele prin grafice

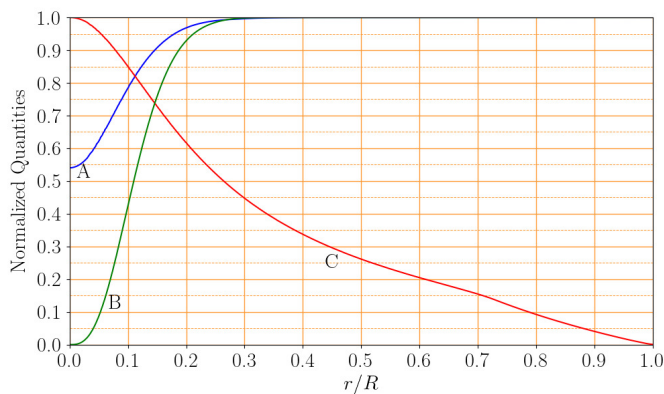
[50 de puncte]

Stelele pot fi approximate cu ușurință ca obiecte sferice simetrice și, prin urmare, distanța radială r față de centru poate fi aleasă ca singura variabilă independentă în modelarea interioarelor stelare. Masa conținută într-o sferă de rază r este notată cu $m(r)$. Luminozitatea $l(r)$ este definită ca energia netă care curge spre exterior printr-o suprafață sferică de rază r pe unitatea de timp. Alte mărimi de interes, de exemplu, densitatea $\rho(r)$, temperatura $T(r)$, fracția de masă a hidrogenului $X(r)$, fracția de masă a heliului $Y(r)$ și energia nucleară generată pe unitatea de masă pe unitatea de timp $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, sunt considerate funcții ale r . Pe parcursul acestei probleme vom neglija efectele difuziei și sedimentării gravitaționale a elementelor în interiorul stelei.

Simbolul „log” se referă la logaritmul în baza 10. Problema constă din trei părți independente.

(T11.1) Partea 1: În interiorul unei stele

Graficul de mai jos prezintă variația a trei mărimi structurale, A, B și C, în funcție de raza fracționară r/R într-un model stelar cu masa $1 M_{\odot}$ și vârsta 4 Gyr, unde R este raza fotosferică a stelei. Valorile fracției de masă a heliului la suprafața (fotosferică), Y_s , și metalitatea (fracția de masă a tuturor elementelor mai grele decât heliul) la suprafața (fotosferică), Z_s Y_s Z_s (0,28, 0,02). Toate mărimile prezentate în grafice sunt normalizate după valorile lor maxime respective.



(T11.1a) Identificați cele trei mărimi A, B și C în mod unic dintre cele cinci posibilități: [6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Scrieți A/B/C în căsuțele de lângă mărimile corespunzătoare în foaia de răspuns. Nu este necesară nicio justificare pentru răspunsul dumneavoastră.)

(T11.1b) Care este fracția de masă a heliului în centrul steii, Y_c ? [3]

(T11.1c) Schițați cele două mărimi rămase din lista de cinci (care nu au fost identificate ca curbe A, B sau C) date în (T11.1a), ca funcții ale lui r/R pe același grafic în foaia de răspunsuri și etichetați-le cu mărimile respective. [5]

(T11.2) Partea a 2-a: Evoluția stelelor

Să luăm în considerare evoluția unei stele $1M_{\odot}$ a cărei compoziție inițială uniformă este dată de fracțiile de masă ale heliului, $Y_0 = 0.28$, și ale metalelor, $Z_0 = 0.02$. Figurile de mai jos arată variația diferitelor cantități globale ale acestei stele pe măsură ce evoluează de la ZAMS (Secvența Principală de Vârstă Zero) până la sfârșitul arderii heliului în miezul său.

Graficul de mai jos prezintă traiectoria evolutivă a steii pe diagrama HR (reprezentarea grafică a lui $\log L/L_{\odot}$ vs $\log T_{\text{eff}}$, unde L este luminozitatea suprafeței și T_{eff} este temperatura efectivă).

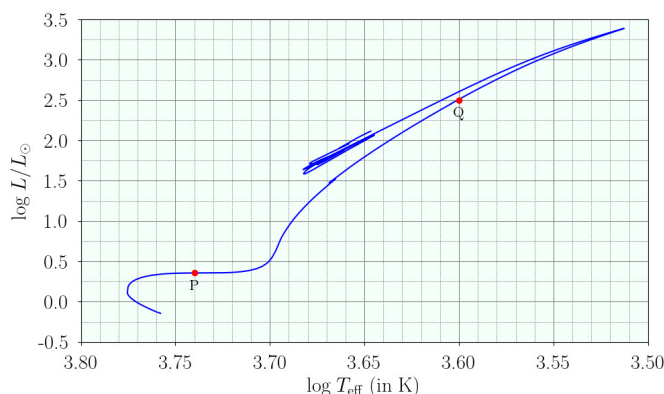
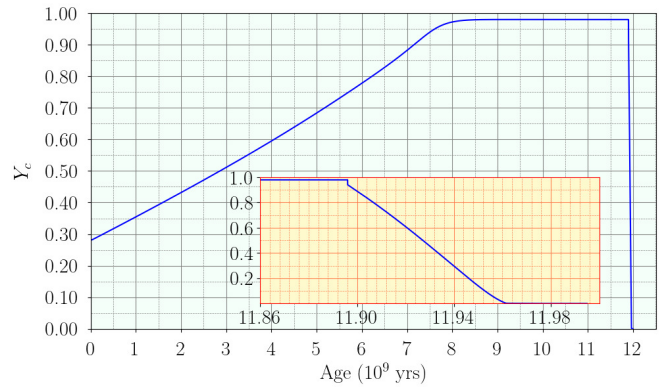
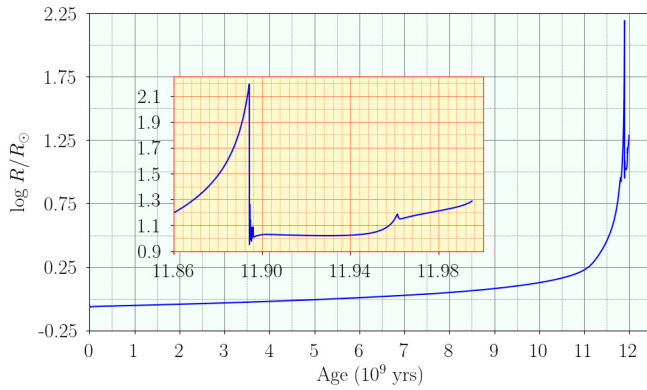
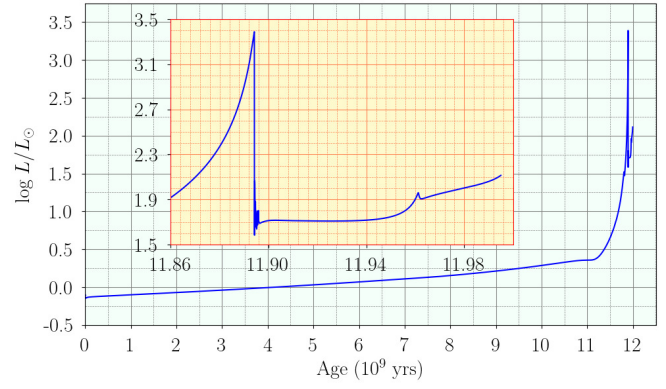
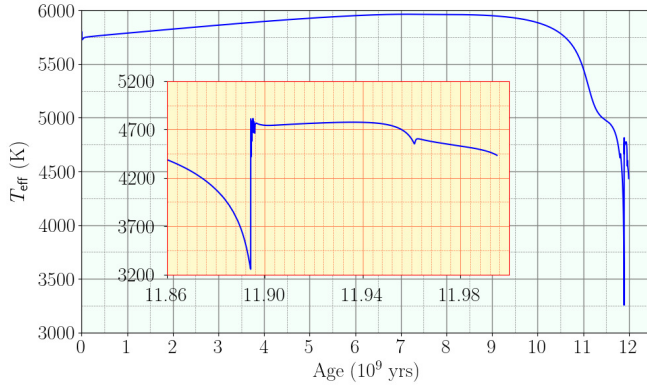


Figura de mai jos prezintă patru grafice care arată variația lui T_{eff} (în K), L (reprezentată grafic ca $\log L/L_{\odot}$), R (reprezentată grafic ca $\log R/R_{\odot}$) și Y_c în funcție de vârsta (în 10^9 ani) a aceleiași stele. În fiecare dintre aceste patru grafice, inserțiile prezintă variațiile cantităților respective în detaliu între vârstele de $11,86 \times 10^9$ ani și $12,00 \times 10^9$ ani, pentru o mai mare claritate.



Folosește aceste grafice pentru a răspunde la întrebările de mai jos.

- (T11.2a) Care este durata de viață aproximativă a stelei în secvența principală, t_{MS} (în ani)? [1]
- (T11.2b) Care este durata aproximativă, Δt_{He} (în ani), pentru care steaua arde heliu în miezul său? [1]
- (T11.2c) Ce fracțiune, f_H , din cantitatea inițială de hidrogen din centrul său a fost arsă când luminozitatea stelei este de $1 L_\odot$? [3]
- (T11.2d) Care este raza stelei, R_1 (în unități de $R_\odot$) când 60% din cantitatea inițială de hidrogen din centrul său a fost arsă? [3]
- (T11.2e) Care sunt razele stelei, R_P și R_Q (în unități de $R_\odot$), corespunzătoare pozițiilor sale P și respectiv Q, așa cum sunt marcate pe diagrama HR? [4]

(T11.3) **Partea 3: Distribuția masei în interiorul unei stele**

Ecuția care guvernează distribuția masei în interiorul unei stele este dată de

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Ar fi convenabil să exprimăm această ecuație în termeni de trei variabile adimensionale, și anume masa fracționară, q , raza fracționară, x și densitatea relativă, σ , pe care o definim ca

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

unde M și R sunt masa totală și raza stelei, respectiv, iar $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ este densitatea medie a stelei.

Pentru steaua particulară pe care o vom lua în considerare în această parte, sunt furnizate următoarele informații:

- Densitatea centrală $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$
- Jumătate din masa stelei se află în 25% din raza sa totală, iar 70% din masa sa se află în 35% din raza sa totală.

În toate părțile ulterioare ale acestei probleme, va fi suficient să se rotunjească toți coeficienții numerici obținuți la o marjă de 0,005.

(T11.3a) Exprimați ecuația de mai sus care descrie dependența masei de rază în funcție de x , [2]
 $\frac{dq(x)}{dx}$ și $\sigma(x)$.

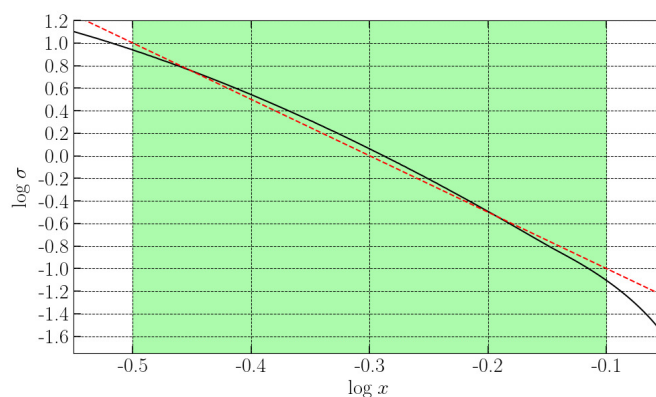
Pentru a obține distribuția masei în funcție de rază, trebuie să cunoaștem profilul densității în interiorul stelei. În scopul acestei probleme, vom descrie variația densității în funcție de rază prin forme aproximative în două domenii ale lui x :

- partea interioară a stelei: $0 \leq x \leq 0.32$
- partea din mijloc a stelei: $0.32 < x < 0.80$

Nu facem nicio aproximare pentru partea cea mai exterioară, adică $0.80 \leq x \leq 1.00$.

(T11.3b) **Aproximare pentru partea din mijloc :**

Variația lui $\log \sigma$, în funcție de $\log x$ în partea din mijloc a stelei este prezentată (prin curba neagră) în graficul de mai jos. Vom face o aproximare liniară (prezentată ca o linie roșie punctată în grafic) pentru $\log \sigma$ în funcție de $\log x$ în domeniul $-0.5 < \log x < -0.1$, adică $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (prezentat de domeniul colorat cu verde). În plus, vom aproxima panta acestei linii cu cel mai apropiat număr întreg.



Utilizați această aproximare pentru a scrie o expresie pentru $\sigma(x)$ ca funcție de x în [4]
 domeniul $0.32 < x < 0.80$.

(T11.3c) Folosește rezultatul ecuației (T11.3b) pentru a obține o expresie pentru $q(x)$ în [6]
 domeniul $0.32 < x < 0.80$.

(T11.3d) **Aproximare pentru partea interioară :**

În partea interioară a stelei ($0 \leq x \leq 0.32$), densitatea poate fi aproximată ca o funcție liniară a razei, adică $\sigma(x) = Ax + B$, unde A, B sunt constante. Determinați A și B și, prin urmare, obțineți o expresie pentru $q(x)$ în domeniul $0 \leq x \leq 0.32$. Rețineți că aproximările adoptate în partea anterioară și în această parte pot duce la mici discontinuități în densitate sau masă la $x = 0.32$. [8]

- (T11.3e) Expresiile pentru $q(x)$ obținute în părțile (T11.3c) și (T11.3d) sunt aproximări care descriu destul de bine variația masei cu raza, dar numai în regiuni specifice ale steii. Pentru domeniul $0.80 \leq x \leq 1$ (pentru care nu am obținut nicio expresie), este posibil să se utilizeze o extrapolare adecvată din regiunea învecinată. Folosiți aceste expresii aproximative și datele furnizate pentru a schița o curbă (fără discontinuități nici în $q(x)$ nici în derivata sa) pentru $q(x)$ vs x pentru întreaga stea ($0 \leq x \leq 1$) care reprezintă variația masei cu raza. [4]

(T12) Radiația Hawking de la găurile negre

[50 de puncte]

- (T12.1) O gaură neagră (BH) se formează de obicei prin colapsul gravitațional al unei stele masive la sfârșitul ciclului său de viață într-un punct numit singularitate. Datorită gravitației extreme a unui astfel de obiect, nimic din ceea ce intră în așa-numitul orizont al evenimentelor (o suprafață sferică cu $r = R_{SC}$, unde r este distanța față de singularitate) nu poate scăpa de aceasta. Aici, R_{SC} este denumită raza Schwarzschild.

- (T12.1a) **Modelarea originii radiației Hawking:** Luați în considerare o pereche de particule, fiecare cu masa m , produsă de o parte și de alta a orizontului BH. O particulă se află puțin în afara orizontului la $r \approx R_{SC}$, în timp ce cealaltă particulă se află în interiorul orizontului la $r = \kappa R_{SC}$. Presupuneți că energia totală a unei particule este suma dintre energia masei sale în repaus mc^2 și energia potențială gravitațională datorată BH.

Determinați valoarea lui κ pentru care perechea de particule are energie totală zero. [4]

- (T12.1b) **Temperatura unei găuri negre:** Dacă particula produsă în afara orizontului în procesul de mai sus are suficientă energie cinetică, aceasta poate scăpa de gaura neagră într-un proces numit radiație Hawking. Cea din interiorul orizontului, care are energie negativă, este absorbită și scade masa găurii negre.

Presupunem că toată radiația Hawking este alcătuită din fotoni cu un spectru de corp negru care atinge vârful la lungimea de undă $\lambda_{bb} \approx 16R_{SC}$. Se știe că pentru o masă solară BH, $R_{SC, \odot} = 2,952$ km.

Obțineți o expresie pentru temperatura, T_{bh} , a corpului negru corespunzător radiației acestui corp negru, în funcție de masa sa M_{bh} și constantele fizice. Calculați raza Schwarzschild, $R_{SC, 10\odot}$, și temperatura, $T_{bh, 10\odot}$, pentru un corp negru cu masa $10 M_{\odot}$. [4]

- (T12.1c) **Pierderea de masă a unei găuri negre:** Presupunem că radiația Hawking este emisă dinspre orizontul evenimentelor.

Folosind echivalența masă-energie, obțineți o expresie pentru rata de pierdere de masă, $dM_{bh}(t)/dt$, în funcție de masa $M_{bh}(t)$ a BH și constante fizice.

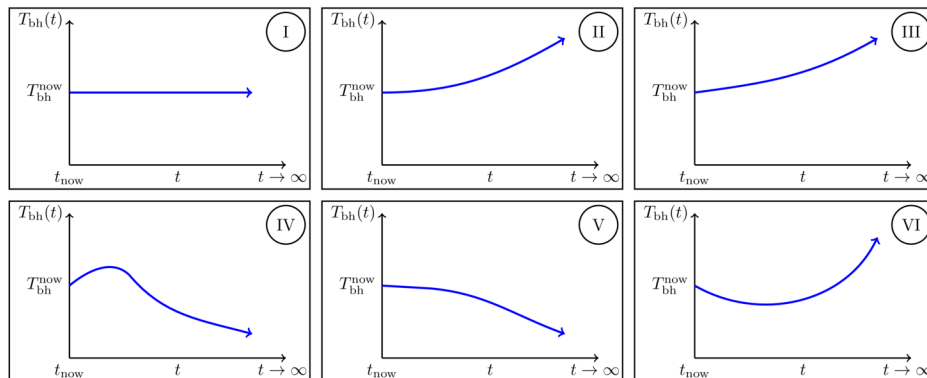
Prin urmare, obțineți o expresie pentru $M_{bh}(t)$ pentru un BH cu masa inițială M_0 . [8]
Reprezentați schițat $M_{bh}(t)$ în funcție de t de la $M_{bh} = M_0$ la $M_{bh} = 0$.

- (T12.1d) **Durata de viață a unei găuri negre:** Obțineți o expresie pentru durata de viață τ_{BH} la care o gaură neagră cu masa inițială M_0 se evaporă complet din cauza radiației Hawking, în termeni de M_0 și constante fizice. Calculați durata de viață $\tau_{bh, 10\odot}$ (în secunde) pentru o gaură neagră cu $M_0 = 10 M_{\odot}$. [3]

- (T12.1e) **Gaură neagră într-o baie de radiații CMB:** Luați în considerare o gaură neagră izolată în spațiu, departe de alte corpuri, cu o temperatură actuală T_{bh}^{now} , înconjurată de fundalul cosmic de microunde (CMB) cu o temperatură actuală $T_{cmb}^{now} = 2,7$ K. Gaura neagră poate crește în masă prin absorbția radiației CMB și își poate pierde masa prin radiația Hawking.

Având în vedere expansiunea accelerată a Universului, identificați care dintre următoarele figuri arată evoluția în timp pe termen lung a lui T_{bh} în următoarele trei cazuri:

(X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Indicați răspunsul bifând căsuța corespunzătoare (doar una) pentru fiecare caz X, Y sau Z din tabelul din foaia de răspunsuri, corespunzător numărului figurii respective. [6]

(T12.2) Găurile negre primordiale (PBH) cu mase mult mai mici se pot forma în Universul timpuriu. Toate întrebările următoare sunt legate de PBH-uri. Aici, orice fenomene care cresc masa găurii negre pot fi neglijate.

(T12.2a) **Evaporarea PBH în epoca actuală:** După cum ați observat probabil din răspunsurile la întrebările anterioare, găurile negre cu masa solară ar avea nevoie de mult timp pentru a se evapora. Cu toate acestea, deoarece PBH-urile pot avea o masă mult mai mică, este posibil să le putem vedea evaporându-se în prezent.

Găsiți masa inițială M_0, PBH (în kg), raza Schwarzschild $R_{SC, PBH}$ (în m) și temperatura T_{PBH} (în K) ale unei găuri negre care s-ar putea evapora complet în epoca actuală, adică cele cu o durată de viață $\tau_{PBH} = 14$ miliarde de ani. [4]

(T12.2b) **Formarea unui PBH:** În Universul timpuriu dominat de radiații, factorul de scală variază cu $a(t) \sim t^{1/2}$. În această eră, PBH-urile se formează datorită colapsului întregii energii conținute într-o regiune de dimensiune fizică ct , unde t este vârsta Universului la momentul respectiv.

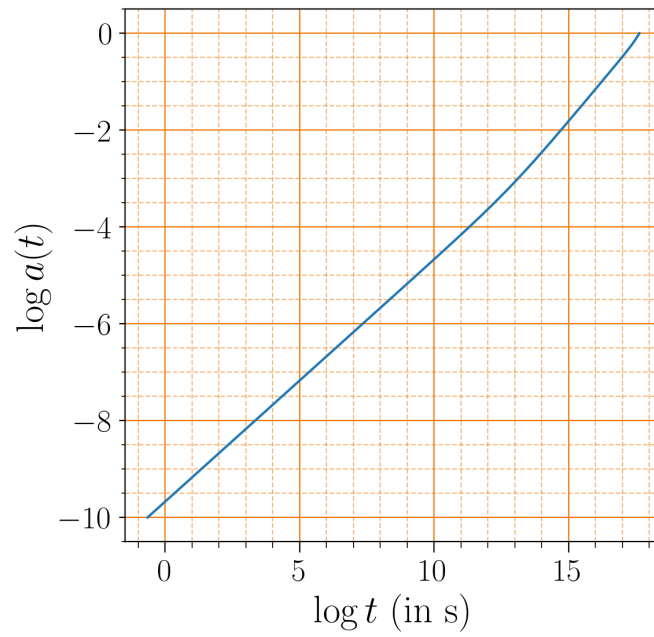
Un PBH cu masa de 1×10^{12} kg se formează atunci când vârsta Universului este de aproximativ 1×10^{-23} s. Calculați vârsta Universului, t_{20} , când se formează un PBH cu masa de 1×10^{20} kg. [6]

(T12.2c) **Spectrul radiației Hawking observat de la PBH:** Considerăm un PBH cu masa inițială de 1×10^{10} kg care se evaporă complet la sfârșitul duratei sale de viață τ_{PBH} . Pentru această parte, presupunem pentru simplitate că cea mai mare parte a radiației Hawking este emisă în acest moment, cu o temperatură corespunzătoare masei sale inițiale. De asemenea, considerăm factorul de scală al Universului ca fiind în evoluție ca $a(t) \sim t^{2/3}$.

Calculați lungimea de undă maximă a acestei radiații Hawking, așa cum a fost observată pe Pământ, λ_{earth} , la epoca actuală (la $t = 14$ miliarde de ani). [5]

(T12.2d) **Radiație cosmică de înaltă energie de la PBH:** Presupunem acum că radiația Hawking emisă la un moment dat t corespunde fotonilor emiși cu o energie $k_B T_{bh}(t)$. De asemenea, cea mai ridicată temperatură posibilă pentru o gaură neagră este temperatura Planck T_{Planck} unde $k_B T_{Planck} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Evoluția factorului de scală pe scări de timp relevante este prezentată în figura următoare. Factorul de scală este setat astăzi la unitate. $t(s)$ pe axa timpului reprezintă vârsta universului în secunde.



Dacă pe Pământ se observă un foton cu o energie de $E_{\text{det}} = 3,0 \times 10^{20}$ eV, determinați [10]
cea mai mare și cea mai mică valoare posibilă ale masei inițiale a PBH (M_0^{max} și
 M_0^{min} , respectiv) care ar putea fi responsabile pentru acest foton.