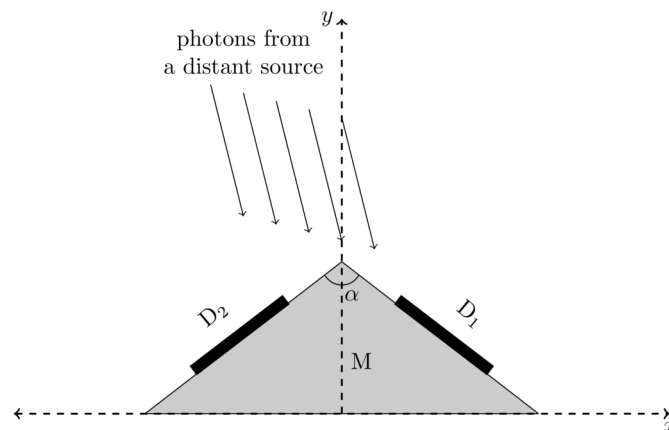


(T01) Daksha misija
[10 taškų]

"Daksha" yra planuojama Indijos kosminė misija, kurią sudaro du palydovai S_1 ir S_2 , skriejantys aplink Žemę ta pačia $r = 7000$ km spindulio apskritimine orbita, bet su 180° fazės skirtumu. Šie palydovai stebi visatą didelės energijos srityje (rentgeno ir gama spindulių diapazone). Kiekviename iš Daksha palydovų naudojami keli plokšti stačiakampiai detektoriai.

Stebimo šaltinio vietos danguje nustatymui naudosime supaprastintą Daksha misijos modelį. Tarkime, kad S_1 palydovas turi du vienodus detektorius D_1 ir D_2 , kurių kiekvieno plotas $A = 0,50$ m². Detektoriai pritvirtinti prie neskaidraus laikiklio M , kaip parodyta žemiau pateiktame paveikslėlyje. Detektoriai yra simetriški y -ašies atžvilgiu ir yra plokštumoje, statmenoje plokštumai x - y . Detektoriai tarpusavyje sudaro $\alpha = 120^\circ$ kampą.



- (T01.1) Stebėdamas tolimą šaltinį, esantį x - y plokštumoje, detektorius D_1 užregistravo $P_1 = 2,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ galią, o detektorius D_2 užregistravo $P_2 = 4,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ galią.

Apskaičiuokite kampą η tarp krypties į šaltinį ir teigiamos y -ašies. Teigiamos kampo vertės [5] skaičiuojamos kryptimi nuo teigiamos y -ašies krypties ir prieš laikrodžio rodyklę.

Tarkime, abu Daksha palydovai (S_1 ir S_2) užregistravo impulsą iš tolimo šaltinio, kuris nebūtinai yra x - y plokštumoje. Impulsų, kuriuos užregistravo palydovai S_1 ir S_2 , laikai žymimi, atitinkamai, t_1 ir t_2 .

- (T01.2) Išmatuota, kad $t_1 - t_2$ lygu $10,0 \pm 0,1$ ms. Apskaičiuokite kokią dangaus sferos dalį, f , užima [5] plotas, kuriame galėjo būti stebimas šaltinis.

(T02) Makar-Sankranti
[10 taškų]

Indijoje Makar-Sankranti švenčiama kai, žiūrint iš Žemės, Saulė atsiduria Ožiaragio žvaigždyne (Makar = Ožiaragis, Sankranti = Įėjimas). Pastraisiais metais ji švenčiama apie sausio 14 d. Prieš daugelį metų šventė sutapo su žiemos saulėgrįža šiauriniame pusrutulyje, kuri, tarkime, visada yra gruodžio 21 d.

- (T02.1) Remdamiesi šiais duomenimis, raskite metus, y_c , kai paskutinį kartą šios šventės data sutapo su [3] žiemos saulėgrįža šiauriniame pusrutulyje.
- (T02.2) 2006 m. sausio 14 d. 11:50:13 vietiniu laiku Mumbajuje Saulė įžengė į Ožiaragio žvaigždyną. [3] Apskaičiuokite datą, D_{enter} , ir vietinį laiką, t_{enter} , kada Saulės įžengs į Ožiaragio žvaigždyną 2013 metais.
- (T02.3) Makar-Sankranti šventė švenčiama kai Saulei atsidūria Ožiaragio žvaigždyne pirmojo saulėlydžio dieną. Tarkime, sausio mėn. saulėlydžio Mumbajuje vietinis laikas 18:30:00.

Nurodykite šventės datą kiekvienais metais nuo 2006 iki 2013 m. (pažymėkite varnelę (✓) [4] atitinkamame lentelės langelyje. Lentelė yra Summary Answersheet lape).

(T03) Gravitacinės bangos

[15 taškų]

Besisukančios viena aplink kitą juodosios skylės skleidžia gravitacines bangas. Dvi juodosios skylės, esančios mūsų Galaktikoje, kurių masės $M = 36 M_{\odot}$ ir $m = 29 M_{\odot}$, sukasi apskritimine orbita. Jų apsisukimo aplink bendrą masės centrą kampinis dažnis ω .

(T03.1) Remdamiesi Niutono gravitacijos interpretacija, išveskite juodųjų skylių kampinio dažnio, ω_{ini} , išraišką laiko momentu, t_{ini} , kai juodąsias skyles skiria 4,0 kartų už jų Švarcšildo spindulių sumą didesnis atstumas. Išraiškoje turi būti naudojamos tik masės M, m ir reikiamos konstantos.

Raskite ω_{ini} vertę, išreikštą vienetais rad/s.

[5]

(T03.2) Pagal bendrąją reliatyvumo teoriją dvinarės juodosios skylės skleidžia gravitacines bangas, kurių dažnis f_{GW} išreiškiamas $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. Todėl mažėja juodųjų skylių orbitos spindulys ir didėja f_{GW} . f_{GW} kitimo sparta yra

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

kur $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ vadinama "čirpuota mase" ("chirp mass").

Raskite α, β ir δ skaitines vertes.

[4]

(T03.3) Tarkime, gravitacinės bangos užfiksuotos laiko momentu $t_{\text{ini}} = 0$.

[6]

Išveskite išraišką, reikalingą apskaičiuoti juodųjų skylių susilieimo momentą, t_{merge} , kai dažnis f_{GW} tampa labai didelis. Išraiškoje naudokite tik $\omega_{\text{ini}}, M_{\text{chirp}}$ ir reikiamas konstantas. Apskaičiuokite t_{merge} vertę sekundėmis.

(T04) Balmerio srauto sumažėjimas

[15 taškų]

Pagrindinės sekos žvaigždę supa ūkas. Žvaigždės regimasis ryškis $V = 11,315$ mag. Artimesnė žvaigždei jonizuota ūko dalis spinduliuoja emisines $H\alpha$ ir $H\beta$ spektro linijas, kurių bangos ilgiai, atitinkamai, $0,6563 \mu\text{m}$ ir $0,4861 \mu\text{m}$.

Teorinis spinduliuotės srauto šiose linijose santykis yra:

$$f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2,86.$$

Tačiau išmatuotas praėjusios pro išorinę šaltesnių dujų ir dulkių ūko dalį spinduliuotės srautas šiose linijose yra:

$$\begin{aligned} H\alpha &= 6,80 \times 10^{-15} \text{ W/m}^2 \\ &\text{ir} \\ H\beta &= 1,06 \times 10^{-15} \text{ W/m}^2. \end{aligned}$$

Ekstinkcija A_{λ} priklauso nuo bangos ilgio ir apskaičiuojama taip:

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

čia, $\kappa(\lambda)$ yra ekstinkcijos kreivė, $E(B - V)$ yra spalvos ekscesas filtrams B ir V. Žemiau užrašyta ekstinkcijos kreivės išraiška, kai λ išreikšta μm vienetais.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2,659 \times \left(-1,857 + \frac{1,040}{\lambda}\right) + R_V, & 0,63 \leq \lambda \leq 2,20 \\ 2,659 \times \left(-2,156 + \frac{1,509}{\lambda} - \frac{0,198}{\lambda^2} + \frac{0,011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0,12 \leq \lambda < 0,63 \end{cases}$$

čia, $R_V = A_V/E(B - V) = 3,1$ yra pilnos ir selektyvios ekstinkcijos santykis.

(T04.1) Raskite $\kappa(H\alpha)$ ir $\kappa(H\beta)$ vertes. [3]

(T04.2) Raskite spalvos ekscesų santykio $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$ vertę. [4]

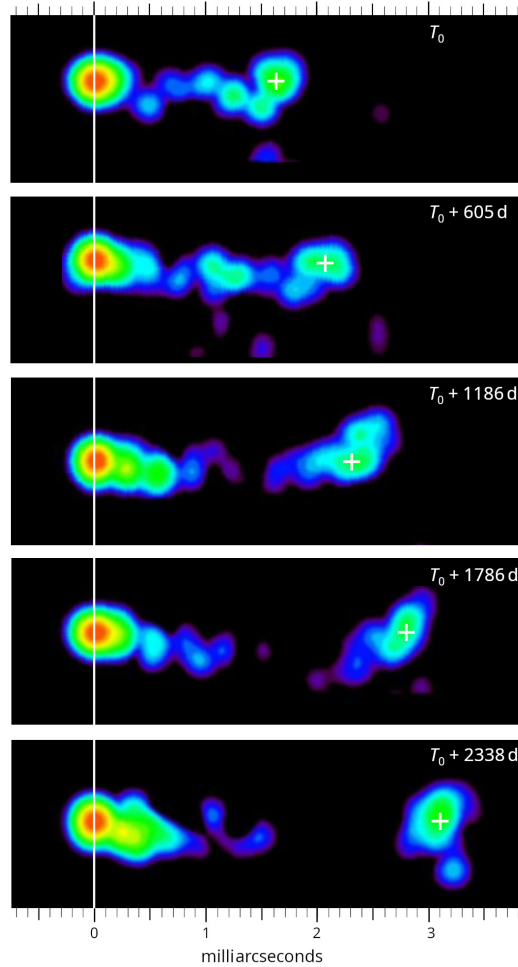
(T04.3) Apskaičiuokite ekstinkciją, $A_{H\alpha}$ ir $A_{H\beta}$, ties $H\alpha$ ir $H\beta$ bangos ilgiais. [6]

(T04.4) Apskaičiuokite ekstinkciją (A_V) ir koks būtų žvaigždės regimasis ryškis, m_{V0} , jeigu ūko nebūtų. [2]

(T05) Kvazarai

[20 taškų]

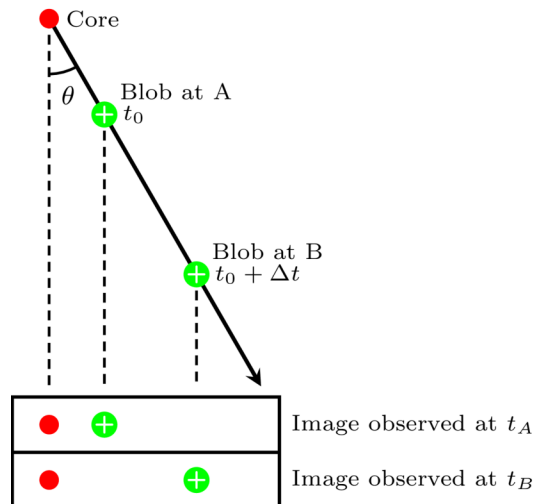
Kvazaras - tai itin ryški aktyvi galaktika, kurioje yra supermasyvi centrinė juodoji skylė, skleidžianti reliatyvistines medžiagos čiurkšles. Žemiau esančiuose paveiksliukuose parodyta kvazaro, kurio raudonasis poslinkis $z = 0,53$ ir atstumas $D_L = 1,00 \times 10^{10}$ ly, vaizdų seka radio diapazone. Vertikali balta linija žymi galaktikos branduolio padėtį, baltas simbolis (+) žymi čiurkšlėje esančio medžiagos gniužulo padėtį skirtingais laiko momentais. Kiekvieno paveiksliuko kampe nurodytas stebėjimo laikas (pradinis momentas pažymėtas T_0), kampinė skalė pateikta paveiksliukų viršutinėje ir apatinėje ašyje.



- (T05.1) Išmatuokite, koks yra gniužulo kampinis atstumas, ϕ_{blob} (kampu milisekundėmis), nuo kvazaro branduolio statmena stebėjimui kryptimi kiekvienu laiko momentu. Apskaičiuokite šiuos atstumus šviesmečiais, l_{blob} . Raskite, koks buvo gniužulo tariamas judėjimo greitis statmena stebėjimui kryptimi tarp gretimų stebėjimo momentų, v_{app} , išreikštas šviesos greičio dalimis, $\beta_{\text{app}} = v_{\text{app}}/c$. Taip pat apskaičiuokite vidutinį tariamą gniužulo judėjimo greitį, $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$, per visą stebėjimų laiką. [5]

Kvazaro čiurkšlė iš tiesų juda reliatyvistiniu greičiu $v \equiv \beta c$, bet judėjimo kryptis nebūtinai yra dangaus plokštumoje; pvz., judėjimo kryptis sudaro kampą θ (matymo kampas) su stebėjimo kryptimi, kuri vaizduojama punktyrinėmis linijomis (žr. schemoje žemiau).

Šiai ir tolimesnėms šio klausimo užduotims neatsižvelkite į kvazaro raudonąjį poslinkį ir kitus reliatyvistinius efektus.



(T05.2) Gniužulo išspinduliuota šviesa dviem skirtingais laiko momentais t_0 (atitinka padėtį A) ir $t_0 + \Delta t$ (atitinka padėtį B) pasiekia stebėtoją momentais t_A ir t_B . Stebėtojo nustatytas laiko skirtumas yra $\Delta t_{app} = t_B - t_A$.

(T05.2a) Išreikškite santykį $\frac{\Delta t_{app}}{\Delta t}$ naudodami dydžius β ir θ . [2]

(T05.2b) Naudodami šią išraišką, užrašykite β_{app} apskaičiavimo išraišką, naudodami dydžius β ir θ . [2]

(T05.3) Judėjimas vadinamas superšviesiniu, jeigu regimasis greitis viršija šviesos greitį ($\beta_{app} > 1$), arba subšviesiniu, jeigu neviršija ($\beta_{app} < 1$).

(T05.3a) Laikydami, kad $\beta_{app} = 1$, nubrėžkite tolydžią kreivę vaizduojančią β priklausomybę nuo θ , kuri žymi ribą tarp subšviesinio ir superšviesinio judėjimo. Atitinkančią superšviesinį greitį grafiko dalį užpildykite lygiagrečiomis pasviromis linijomis (///). [4]

(T05.3b) Raskite mažiausią tikrąjį čiurkšlės judėjimo greitį ($\beta_{low} = v_{low}/c$), kai tenkinama regimojo superšviesinio judėjimo sąlyga, ir jį atitinkantį čiurkšlės matymo kampą θ_{low} . [2]

(T05.4) Išveskite formulę, skirtą apskaičiuoti didžiausiam galimam matymo kampui θ_{max} , kai duota tariamo viršviesinio judėjimo greičio vertė, β_{app} . [2]

Kvazaro branduolys (centrinis kompaktiškas objektas) pasižymi spinduliuotės kintamumu, kurį lemia procesai, vykstantys priežastiniu ryšiu susijusiame regione. Šio regiono spindulys laikomas maždaug penkis kartus didesniu už Švarcšildo spindulį.

(T05.5) Žinoma, kad kvazaro branduolio spindesys kinta maždaug 1 h dydžio intervalais. Raskite tokio centrinio kompaktiško objekto viršutinės masės ribą $M_{c, max}$, išreikštą Saulės masėmis. [3]

(T06) Galaktikos sukimasis

[20 taškų]

Mūsų Galaktikos sukimosi kreivė nustatoma matuojant neutralaus vandenilio (HI) debesų radialinį greitį ties įvairia galaktikos ilguma, stebėjimams naudojant 21 cm HI liniją. Tarkime, kad HI debesui žinoma: l - galaktinė ilguma, R - atstumas nuo Galaktikos centro (GC), o D - atstumas nuo Saulės. Primame, kad Saulė ir debesis juda aplink GC apskritiminėmis orbitomis Galaktikos disko plokštumoje: jų kampiniai greičiai, atitinkamai, yra Ω_0 ir Ω , o erdviniai - V_0 ir V ; Saulės atstumas nuo Galaktikos centro $R_0 = 8,5$ kpc.

Debesies erdvinio greičio dedamosios išilgai regėjimo spindulio (V_r) ir statmena regėjimo spinduliui kryptimi (V_t), kai stebima nuo Saulės, išreiškiamos taip:

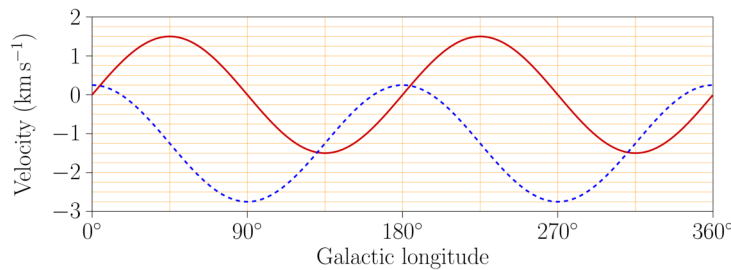
$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Žiūrint iš šiaurinio Galaktikos ašigalio, Galaktika sukasi pagal laikrodžio rodyklę. Šiame uždavinyje priimame, kad HI debesys yra taškiniai objektai, o jų radialiniai greičiai yra teigiami, kai jie tolsta nuo stebėtojo.

(T06.1) Summary Answersheet lape pateiktame grafike, intervale nuo $D = 0$ iki $D = 2R_0$, schematiškai pavaizduokite V_r priklausomybę nuo D stebėjimo kryptimis, kurių $l = 45^\circ$ ir $l = 135^\circ$ (prie kiekvienos kreivės užrašykite ją atitinkančią l vertę). [5]

(T06.2) Žemiau esančiame grafike parodyta 100 pc atstumu nuo Saulės esančių žvaigždžių vidutinio erdvinio greičio dedamosios radialine kryptimi, V_r (ištiesinė raudona kreivė), ir dedamosios statmena regėjimo spinduliui kryptimi V_t (punktyrinė mėlyna kreivė), priklausomybė nuo galaktinės ilgumos.



Naudodami grafiką, apskaičiuokite Saulės apskriejimo aplink GC periodą (P), išreikštą milijonais metų (Myr). [3]

(T06.3) Janas Oortas pastebėjo, kad Saulės aplinkoje ($D \ll R_0$) kampinių greičių skirtumas ($\Omega - \Omega_0$) yra mažas ir išvedė erdvinio greičio dedamųjų suradimui tokį pirmos eilės artinį:

$$V_r = A \times D \sin 2l$$

$$V_t = A \times D \cos 2l + B \times D$$

, kur A ir B vadinamos Oorto konstantomis.

Panagrinėkime du atvejus:

(I) stebima Galaktikos sukimosi kreivė ir

(II) hipotetinė sukimosi kreivė, kai Galaktikoje nėra tamsiosios medžiagos, o visa Galaktikos masė sutelkta jos centre.

(T06.3a) Išveskite sukimosi greičio radialinio gradiento Saulės aplinkoje $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ išraiškas abiem atvejams. [2]

(T06.3b) Išreikškite A ir B naudodami V_0 , R_0 ir radialinį sukimosi greičio gradientą Saulės aplinkoje $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$. [8]

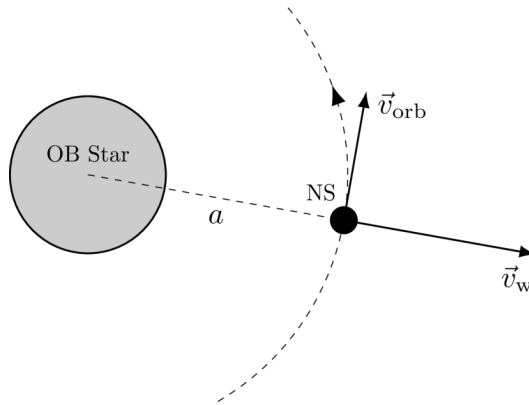
(T06.3c) Oorto konstantų santykis (A/B) atvejams (I) ir (II) žymimas, atitinkamai, F_I ir F_{II} . Raskite F_I and F_{II} išraiškas. [2]

(T07) Neutroninė žvaigždė dvinarėje sistemoje

[20 taškų]

Dvinarėje sistemoje, kurią sudaro įprasta (savo Rošo ertmės neužpildanti) ankstyvojo spektrinio tipo žvaigždė (toliau vadinama OB žvaigždė) ir kompaktiška neutroninė žvaigždė (NS), pagrindinis papildomos medžiagos srauto (akrecijos) į NS šaltinis yra kaimyninės žvaigždės vėjas.

Panagrinėkime tokią NS-OB žvaigždžių sistemą, kurioje NS masė $M_{NS} = 2,0 M_{\odot}$, o spindulys $R_{NS} = 11$ km. Ši NS skrieja apskritimine a spindulio orbita aplink OB žvaigždę centrą greičiu $v_{orb} = 1,5 \times 10^5$ m/s (žr. brėžinį žemiau). Šiame uždavinyje darome prielaidą, kad OB žvaigždės masės netekimas yra sferiškai simetriškas, o jo sparta per metus Saulės masėmis yra $\dot{M}_{OB} = 1,0 \times 10^{-4} M_{\odot}/\text{yr}$.



(T07.1) Akrecijos spindulys R_{acc} apibrėžiamas kaip didžiausias atstumas nuo NS, ties kuriuo NS dar gali sugauti žvaigždės vėją. Šioje sistemoje žvaigždės vėjo greitis ties NS orbitos atstumu yra $v_w = 3,0 \times 10^6$ m/s. Raskite R_{acc} nagrinėjamai sistemai, išreikštą km, panaudodami įprastą pabėgimo greičio išraišką. [3]

(T07.2) NS orbitos spindulys $a = 0,5$ au. Apskaičiuokite medžiagos akrecijos į NS spartą $\dot{M}_{acc}$, išreikštą $M_{\odot}/\text{yr}$ vienetais. Priimame, kad visa pagaunama medžiaga patenka į NS, į spinduliuotės slėgį ir baigtinį akretuojamų dujų atvėsimo laiką neatsižvelgiame. [3]

(T07.3) Panagrinėkime situaciją, kai žvaigždės vėjo greitis ties NS orbitiniu atstumu a (t.y., netoli NS) yra artimas NS orbitiniam greičiui. Tokiu atveju žvaigždės vėjo masės akrecijos į NS sparta būtų išreikšta taip: $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} \times f(\tan \beta, q)$, kur $q = M_{NS}/M_{OB}$ yra dvinarės žvaigždės masių santykis, o β yra kampas tarp vėjo greičio krypties ir radialinės krypties nuo OB žvaigždės NS atskaitos sistemoje. Raskite funkcijos $f(\tan \beta, q)$ išraišką, priimdami, kad $M_{OB} \gg M_{NS}$. [6]

(T07.4) Nagrinėjame situaciją, kai visiškai jonizuotą medžiagą, kuri akretuoja radialine kryptimi, stabdo stiprus NS magnetinis laukas $\vec{B}$. Stabdymas yra tarsi slėgis, P , į krentančią medžiagą, išreiškiamas kaip $\frac{B^2}{2\mu_0}$. NS turi dipolinį magnetinį lauką, kurio stiprio mažėjimas pusiaujo plokštumoje didėjant atstumui r nuo NS, kai $r \gg R_{NS}$, aprašomas taip:

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{NS}}{r} \right)^3$$

, kur B_0 yra magnetinis laukas NS pusiaujoje. Tarkite, kad magnetinio dipolio ašis sutampa su NS sukimosi ašimi.

(T07.4a) Išreikškite magnetinį slėgį $P_{eq, mag}$ pusiaujo plokštumoje naudodami B_0 , R_{NS} , r ir [1]
reikiamas konstantas.

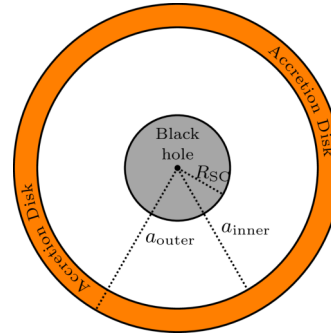
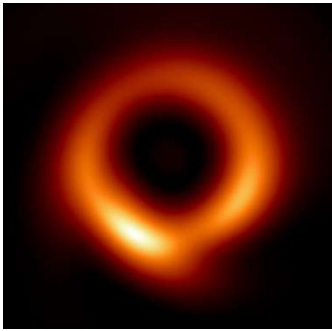
- (T07.4b) Medžiagos akrecija dėl atplūstančio žvaigždės vėjo ir NS santykinio judėjimo sukuria NS kryptimi slėgį. Didžiausias atstumas, kai akrecijos srautą pusiaujo plokštumoje sustabdo magnetinio lauko slėgis, vadinamas magnetosferos spinduliu R_m . Užrašykite apytiksę išraišką kritiniam magnetiniam laukui $B_{0,c}$, kai R_m sutampa su R_{acc} , ir apskaičiuokite jo vertę teslomis. Magnetinio poveikio nepaisykite, kai $r > R_m$ ir tarkite, kad $v_w \gg v_{orb}$. [7]

(T08) Juodosios skylės šešėlis

[20 taškų]

Ivykių horizonto teleskopu (Event Horizon Telescope, EHT) gautas galaktikos M87 centre esančios supermasyvios juodosios skylės vaizdas parodytas kairiajame paveikslėlio lange žemiau.

Naudosime supaprastintą nesisukančios, statiškos ir sferiškai simetriškos juodosios skylės (toliau BH) modelį. BH masė $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$, ją supa masės neturintis, plonas ir plokščias akrecinis diskas, kurio vidinis ir išorinis spinduliai yra, atitinkamai, $a_{inner} = 6R_{SC}$ ir $a_{outer} = 10R_{SC}$, kur R_{SC} yra Švarcšildo spindulys. Žemiau paveikslėlyje dešinėje pavaizduota BH aplinkos schema (ne pagal mastelį).



Darome prielaidą, kad akrecinis diskas yra vienintelis šviesos šaltinis. Kiekvienas disko taškas skleidžia šviesą visomis kryptimis, kurią veikia juodosios skylės gravitacinis laukas. Šviesos spindulių kelią aprašo dvi žemiau pateiktos lygtys (jos yra panašios į lygtis, kurios galioja aplink Saulę skriejančiam objektui):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

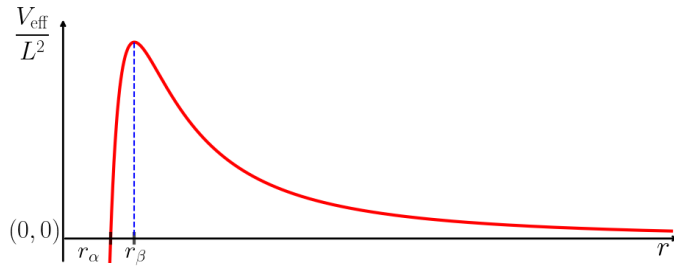
, kur $r \in (R_{SC}, \infty)$ yra radialinė koordinatė, $\phi \in [0, 2\pi)$ yra azimutinis kampas, o E ir L yra konstantos, susijusios su energijos ir judesio kiekio momento (angular momentum) tverme.

Čia $v_r \equiv dr/dt$ yra radialinis greitis, v_ϕ - tangentinis greitis, o $\omega \equiv d\phi/dt$ yra kampinis greitis. Su fotono trajektorijos mažiausiu nuotoliu apie BH susijęs impact parametras b apibrėžiamas kaip $b = L/\sqrt{2E}$. Šiame uždavinyje į laiko tėkmės spartos pasikeitimą neatsižvelgiama.

Kita naudinga lygtis gaunama diferencijuojant pirmąją lygtį:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

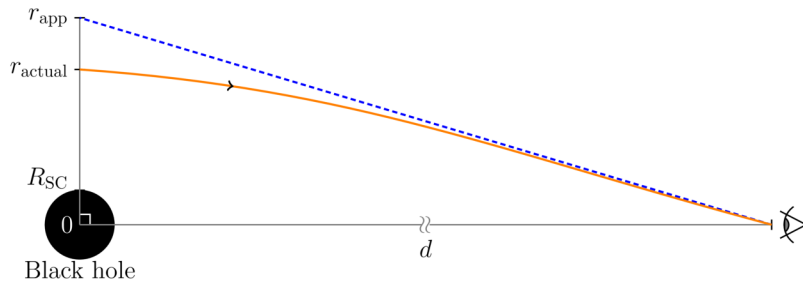
- (T08.1) Fotonai gali judėti aplink BH apskritiminėmis trajektorijomis. Raskite tokių trajektorijų spindulį r_{ph} ir impact parametą b_{ph} , išreikšdami juos per BH masę M ir konstantas. [4]
- (T08.2) Apskaičiuokite, kiek laiko sekundėmis T_{ph} prireiks fotonui vieną kartą pilnai apskrieti BH apskritimine orbita. [2]
- (T08.3) Aukščiau pateiktą pirmąją lygtį (su radialinio greičiu) galima palyginti su šviesos trajektorijas aprašančia lygtimi: $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$. Žemiau esančiame grafike pateikiama V_{eff}/L^2 priklausomybė nuo r .



(T08.3a) Brėžinyje nurodyti du spinduliai: r_α ir r_β . Raskite r_α ir r_β išraiškas, panaudodami M ir tinkamas konstantas. [2]

(T08.3b) Fotonas, judantis iš akrecinio disko link BH, kai kuriais atvejais gali ištrūkti į begalybę. Pateikite fotono ištrūkimo nuo BH mažiausio nuotolio (posūkio taško) išraišką r_t , panaudodami M ir konstantas. Kokia tokio fotono impact parametro $b_{\min}$ išraiška? [3]

(T08.4) Šviesos spindulys sklindantis atstumu r_{actual} pro BH dėl stipraus gravitacijos lauko nukrypsta nuo pirminės trajektorijos ir pasiekia stebėtoją (pažymėtą akies simboliu), esantį dideliu atstumu d , kaip parodyta žemiau.

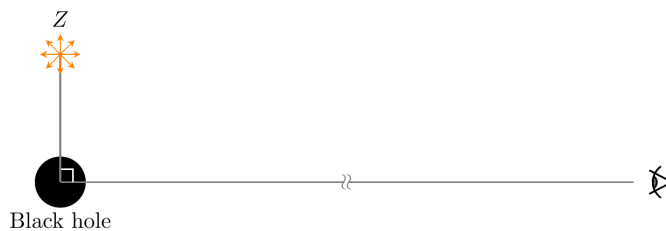


Šiam stebėtojui atrodo, kad spindulys atsklido iš kito taško, esančio dangaus plokštumoje atstumu $r_{\text{app}} \approx b$ nuo BH centro, kur b yra fotono trajektorijos impact parametras. Taškams, esantiems akreciniame diske, kai $r = r_{\text{actual}}$, galima taikyti tokią išraišką:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

Tolimam stebėtojui, matančiam akrecijos diską jo plokštumoje, vaizdas dangaus plokštumoje atrodo apskritimiškai simetriškas. Raskite regimąjį išorinį r_{outer} ir vidinį r_{inner} disko apie BH spindulį, išreikštą astronominiais vienetais (au). [5]

(T08.5) Panagrinėkime izoliuotą supermasyvią juodąją skylę, kurios masė $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$, neturinčią akrecinio disko. Taške Z, esančiame $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ atstumu nuo juodosios skylės, įvyksta 5 s trukmės elektromagnetinės spinduliuotės žybsnis (žr. schemą žemiau). Žybsnis taške Z skleidžia šviesą visomis kryptimis. Stebėtojas, esantis toli nuo juodosios skylės esančiame taške (paveikslėlyje pažymėtas akies simboliu), padaro 60 s trukmės juodosios skylės aplinkos nuotrauką.



Pasirinkite teisingą kiekvieno žemiau esančių teiginių variantą:

- (T08.5a) Galimų kelių, kuriais šviesa gali nukeliauti nuo Z iki stebėtojo, skaičius yra: [2]
 (A) ne daugiau vieno, (B) lygiai vienas, (C) lygiai du, (D) daugiau nei du.
- (T08.5b) Taške Z įvykusio žybsnio vaizdų, užregistruotų ilgos ekspozicijos nuotraukoje, skaičius yra: [2]
 (A) ne daugiau vieno, (B) lygiai vienas, (C) lygiai du, (D) daugiau nei du.

(T09) Atmosferos įtaka vaizdai

[35 taškai]

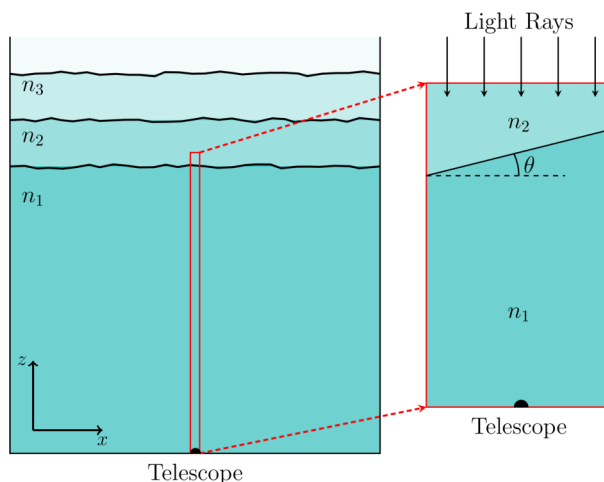
Teleskopas, turintis achromatinį, išgaubtą, $D = 15$ cm skersmens objektyvą, kurio židinio nuotolis $f = 200$ cm, nukreipiamas į žvaigždę zenite.

- (T09.1) Apskaičiuokite taškinio šviesos šaltinio atvaizdo, susidarančio objektyvo židinyje, skersmenį d_{image} , metrais. Šviesos bangos ilgis $\lambda = 550$ nm, atsižvelkite tik į difrakcijos efektą. [1]

Matomą Žemės paviršiuje astronominio šaltinio vaizdą įtakoja ir atmosfera.

Atmosferos sluoksnių ribos ir jų lūžio rodiklis nuolat kinta dėl turbulencijos, temperatūros svyravimų ir kitų veiksnių. Dėl to vaizdų padėtis teleskopo židinio plokštumoje nuolat truputį keičiasi. Šiame uždavinyje toliau naudosime tik difrakcijos ribojamą žvaigždės vaizdą (kaip prieš tai), į kitus trikdžius nesižvelgdami.

Žemiau esančio paveikslėlio kairiojoje dalyje pavaizduotas vertikalus atmosferos pjūvis su keliais skirtingų lūžio rodiklių ($n_1, n_2, n_3, \dots$) sluoksniais. Dešiniojoje brėžinio dalyje pavaizduotas padidintas plono vertikalios atmosferos sluoksnio vaizdas ir riba tarp dviejų žemiausių atmosferos sluoksnių, kurių lūžio rodikliai yra n_1 ir n_2 ($n_1 > n_2$). Šiame uždavinyje nagrinėjami tik šie du sluoksniai ir riba tarp jų. Brėžinys yra ne pagal mastelį.



- (T09.2) Tarkime, kad riba tarp dviejų sluoksnių yra $H = 1$ km aukštyje tiesiai virš teleskopo objektyvo ir pasvirusi $\theta = 30^\circ$ kampui į horizontą. Visose šio uždavinio dalyse kampas $\theta =$ laikomas teigiamas kryptimi prieš laikrodžio rodyklę. Monochromatinės šviesos šaltiniui $n_1 = 1,00027$, o $n_2 = 1,00026$. Žvaigždės, matomos zenite, vaizdo kampinis poslinkis teleskopo židinio plokštumoje žymimas α .
- (T09.2a) Nubraižykite spindulių sklaidimo per ribą diagramą, kurioje pažymėkite n_1, n_2, θ ir α . [2]
- (T09.2b) Raskite α išraišką, naudojant θ, n_1 ir n_2 . Naudokite mažų kampų artinį: $\sin \alpha \approx \alpha$ ir $\cos \alpha \approx 1$. [2]
- (T09.2c) Apskaičiuokite vaizdo padėties poslinkį Δx_θ (metrais), jei θ padidėja 1 % (n_1 ir n_2 nesikeičia). [3]

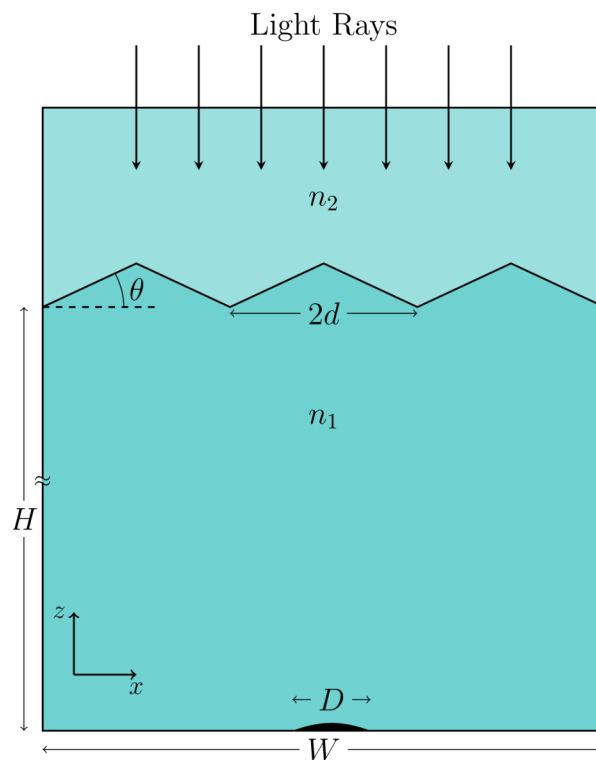
(T09.2d) Apskaičiuokite vaizdo padėties poslinkį Δx_n (metrais), jei n_2 padidėja 0,0001 % [3]
(n_1 ir θ nesikeičia).

(T09.3) Zenite esanti žvaigždė skleidžia baltą šviesą. Pasirinkite, kuris iš žemiau esančių variantų [2]
tiksliausiai apibūdina žvaigždės vaizdo formą ir spalvą. Atsakymą pažymėkite varnele (✓)
atitinkamame langelyje lentelėje Summary Answersheet lape. Žymėti galima tik vieną langelį.
Atkreipkite dėmesį, kad x paveikslėlyje didėja iš kairės į dešinę.

	vaizdo spalva	vaizdo forma	kairysis kraštas	dešinysis kraštas
A	balta	apskritas		
B	balta	elipsinis		
C	spalvotas	apskritas	mėlynas	raudonas
D	spalvotas	apskritas	raudonas	mėlynas
E	spalvotas	elipsinis	mėlynas	raudonas
F	spalvotas	elipsinis	raudonas	mėlynas

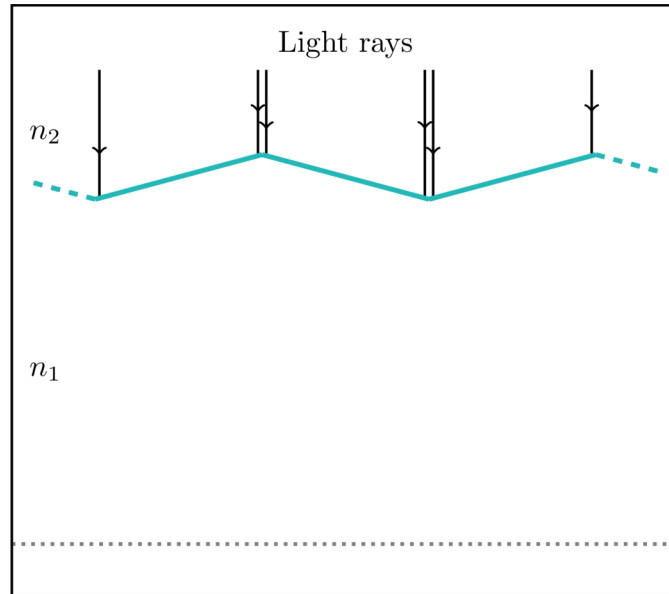
Visose likusiuose šios užduoties klausimuose nagrinėjama monochromatinė žalia šviesa, kurios bangos ilgis $\lambda = 550$ nm. Riba tarp sluoksnių laikoma begaline aibe zigzago formos plokštumų (einančių statmenai puslapio plokštumai), kurias skiria $d = 10$ cm atstumas išilgai x ašies. Kampo vertės yra $\theta = 10^\circ$ arba $\theta = -10^\circ$.

Žemiau esančioje schemoje (ne pagal mastelį) pavaizduotas atmosferos modelio skerspjūvis, kurio plotis W ($W \ll H$). Didelio skersmens teleskopams žvaigždės vaizdas židinio plokštumoje dėl šios zigzaginės ribos tampa atskirų dėmelių (speckles) rinkiniu.



(T09.4) Nagrinėsime supaprastintą atmosferą, kaip aprašyta prieš tai.

(T09.4a) Brėžinyje (ne pagal mastelį) parodytas atmosferos pjūvis su viena po kitos einančiomis zigzaginėmis plokštumomis, kurių parametrai tokie patys, kaip aprašyta aukščiau.



Šios schemos kopijoje Summary Answersheet lape nubrėškite krintančių šviesos spindulių kelią iki plokštumos, kurioje yra teleskopo objektyvas (ji pažymėta pilka punktyrine linija).

Schemoje simboliu "X" pažymėkite sritį (-is), jei tokia (-ios) yra, į kurią (-ias) šviesos spinduliai nepateks. [4]

(T09.4b) Apskaičiuokite tokios (-ių) srities (-čių) plotį W_X . [3]

(T09.4c) Raskite didžiausią teleskopo objektyvo skersmenį $D_{\max}$, su kuriuo, tinkamai parinkus teleskopo vietą atmosferos ribos atžvilgiu, galima gauti vieną žvaigždės atvaizdą. [4]

(T09.5) Nagrinėjame atvejį, kai teleskopo $D = 100$ cm ir $f = 200$ cm, o atmosferos sluoksnių zigzago formos riba yra dvimatė (kaip piramidės) ir tęsiasi plokštumoje x ir y kryptimis. [6]

Nubraižykite šiuo atveju gaunamą žvaigždės vaizdų (speckles) schemą tam skirtoje Summary Answersheet lapo skiltyje.

(T09.6) Turbulentinėje atmosferoje vėl nagrinėjame vieną zigzago formos ribos sluoksnį, kurio forma tęsiasi tik x kryptimi, bet dabar kampas θ kinta vienodu greičiu nuo 10° iki -10° per 1,0 s. Tarkime, kad dėl to vaizdo padėtis taip pat keičiasi vienodu greičiu. [5]

Teleskopo parametrai yra: $D = 8$ cm ir $f = 1$ m. Apskaičiuokite ilgiausią ekspozicijos trukmę $t_{\max}$, su kuria CCD nuotraukoje būtų gautas tik vienas žvaigždės atvaizdas, o bet koks galimas jo padėties nuokrypis būtų mažesnis nei 1% difrakcijos lemiamo atvaizdo skersmens.

(T10) Didžiojo sprogimo nukleosintezė

[35 taškai]

Spinduliuotės eroje ankstyvojoje Visatoje skalės daugiklis išreiškiamas $a \propto t^{1/2}$, kur t yra laikas po Didžiojo sprogimo. Šios eros metu neutronai (n) ir protonai (p) dėl silpnosios sąveikos išlieka tarpusavyje šiluminėje pusiausvyroje. Laisvųjų neutronų arba protonų skaičiaus tankis (N) priklauso nuo temperatūros T ir nuo jų masės m taip:

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

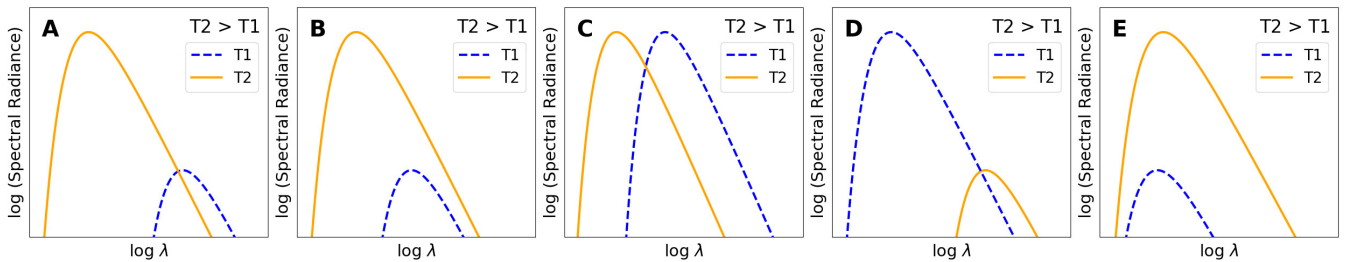
iki laiko momento $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70$ s, čia $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. Praėjus laikui t_{wk} silpnoji sąveika nebegali būti tokioje pusiausvyroje ir laisvieji neutronai, kurių pusėjimo trukmė 610,4 s, skyla į protonus.

(T10.1) Protonų skaičiaus tankis yra N_p , o neutronų - N_n . Apskaičiuokite neutronų santykinę [4]
koncentraciją, išreiškiamą santykiu $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ laiko momentu t_{wk} .

(T10.2) Fotonai išlieka šiluminėje pusiausvyroje ir visais laikotarpiais spektras atitinka absoliučiai juodojo kūno spinduliuotę.

(T10.2a) Raskite laipsnio β vertę, kai $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Pažymėkite, kuris iš žemiau esančių grafikų rodo teisingą spektrinio energijos tankio [2]
kitimą ties dviem temperatūroms vertėms T_1 ir T_2 . Summary Answersheet lape
varnele (✓) pažymėkite pasirinktą variantą.



(T10.3) Praėjus laikui t_{wk} deuterio sintezė iš protonų ir neutronų aprašoma Saha lygtimi, kurią išvedė indų fizikas prof. Meghnad Saha. Lygtis supaprastintai užrašoma:

$$\frac{N_D}{N_n} = 6,5 \eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n) c^2}{k_B T} \right).$$

Čia barionų ir fotonų skaičiaus santykis η yra $6,1 \times 10^{-10}$, o N_D yra deuterio skaičiaus tankis.

(T10.3a) Summary Answersheet lape esančiame šablone pavaizduokite santykį N_D/N_n bent [5]
keturioms pagrįstai pasirinktoms temperatūros vertėms, esančioms intervale $k_B T =$
[60, 70] keV, ir nubrėžkite tolygią kreivę, geriausiai atitinkančią šiuos taškus.

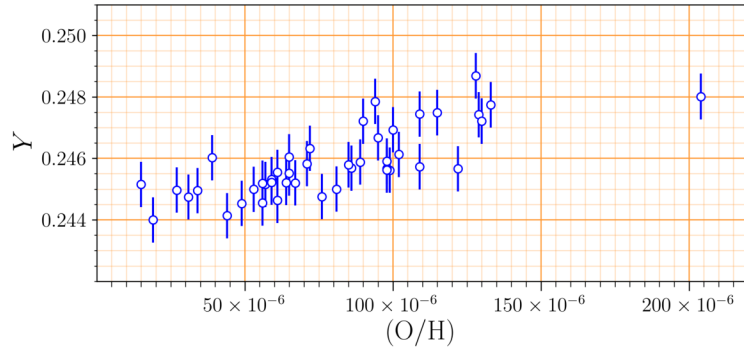
(T10.3b) Iš gauto brėžinio raskite $k_B T_{\text{nuc}}$ (keV), kai $N_D = N_n$. [1]

(T10.3c) Tarkime, kad visi laisvieji neutronai akimirksniu susijungia su protonais kai $k_B T_{\text{nuc}}$ ir [4]
susidaro deuteris. Jis, savo ruožtu, iš karto virsta heliu (${}^4_2\text{He}$). Apskaičiuokite
atitinkamą helio nukleosintezės epochos laiką t_{nuc} (sekundėmis).

(T10.4) Apskaičiuokite $X_{n, \text{nuc}}$ vertę prieš pat momentą t_{nuc} . [5]

(T10.5) Pirmąsio helio kiekis, Y_{prim} , apibūdinamas kaip santykinė dalis nuo visų Visatos barionų masės, [3]
kuri praėjus laikui t_{nuc} susijungė su heliu. Raskite teorinį Y_{prim} įvertį. Šiam skaičiavimui darykite
prielaidą, kad $m_p \approx m_n$ ir kad helio branduolio masė yra $m_{\text{He}} \approx 4m_n$.

- (T10.6) Pirmykščio helio kiekis sunkiai išmatuojamas, nes žvaigždės vandenilį nuolat verčia heliu. Galaktikos žvaigždžių atliekamas vandenilio perdirbimo koeficientas apibūdinamas deguonies (kurį gamina tik žvaigždės) ir vandenilio santykine koncentracija galaktikoje, žymima (O/H) . Žemiau parodyta (O/H) ir helio koncentracijos Y matavimų įvairioms galaktikoms rezultatai.



Naudokite visus šio grafiko taškus (kopija yra Summary Answersheet lape), kad atsakytumėte į toliau pateiktus klausimus.

- (T10.6a) Apskaičiuokite Y mėlynai kompaktiškai nykštukinei galaktikai, kuriai $(O/H) = 1,75 \times 10^{-4}$. [2]
- (T10.6b) Apskaičiuokite tiesės, geriausiai derančios su duomenimis, krypties koeficientą $dY/d(O/H)$. [2]
- (T10.6c) Apskaičiuokite pirmykščio helio koncentraciją $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, remdamiesi pateiktais stebėjimų duomenimis. [2]
- (T10.7) Skirtumą tarp Y_{prim} ir $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ galima sumažinti keičiant barionų ir fotonų santykio η vertę. Kai η sumažėja (vaizduojama simboliu $\downarrow$), Summary Answersheet lape esančios lentelės langeliuose pažymėkite rodykle į viršų ($\uparrow$) padidėjimą arba rodykle į apačią ($\downarrow$) sumažėjimą šiems parametrams: $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (kai $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$, ir Y_{prim} . [3]

(T11) Žvaigždės diagramose

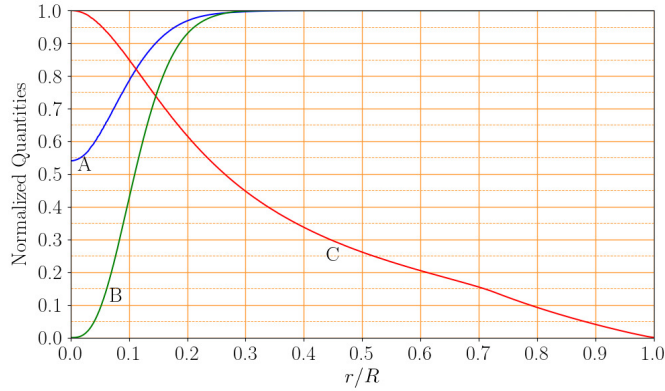
[50 taškų]

Žvaigždės galima aproksimuoti kaip sferiškai simetriškus objektus, todėl modeliuojant žvaigždžių vidinę sandarą vienintelis nepriklausomas kintamasis yra radialinis atstumas r nuo centro. Masė, esanti r spindulio sferos viduje, žymima $m(r)$. Šviesis $l(r)$ apibrėžiamas kaip suminė energija, sklindanti į išorę per sferinį r spindulio paviršių per laiko vienetą. Kiti svarbūs dydžiai, pavyzdžiui, tankis $\rho(r)$, temperatūra $T(r)$, vandenilio masės dalis $X(r)$, helio masės dalis $Y(r)$ ir branduolinė energija, generuojama masės vienetu per laiko vienetą $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$ priklauso nuo r . Šiame uždavinyje nepamisysime cheminių elementų difuzijos ir jų gravitacinio nusėdimo žvaigždės viduje.

Simbolis "log" reiškia dešimtainį logaritmą. Užduotį sudaro trys nepriklausomos dalys.

(T11.1) 1 dalis: Žvaigždės vidus

Žemiau pateiktame grafike pavaizduotas trijų dydžių A, B ir C priklausomybė nuo santykinio spindulio r/R žvaigždės, kurios masė $1 M_{\odot}$ ir amžius 4 Gyr modelyje, kur R yra žvaigždės fotosferos spindulys. Žvaigždės paviršiuje (fotosferoje) esančios helio masės dalies Y_s ir metalingumo (elementų, sunkesnių už helį, masės dalies) Z_s vertės yra $Y_s = 0,28$ ir $Z_s = 0,02$. Visi diagramose pavaizduoti dydžiai normuoti vienetui.



(T11.1a) Identifikuokite, kas grafike yra kintamieji A, B ir C iš penkių galimų variantų:

[6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Summary Answersheet lape šalia atitinkamų dydžių esančiuose langeliuose įrašykite pasirinkimus A/B/C. Atsakymo pagrįsti nereikia.)

(T11.1b) Kokia yra helio masės dalis žvaigždės centre, Y_c ?

[3]

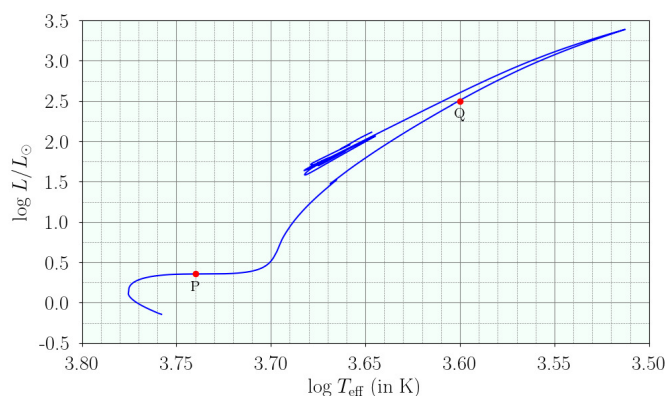
(T11.1c) Schematiškai pavaizduokite kitų dviejų dydžių iš (T11.1a) pateikto penkių dydžių sąrašo (bet kurie nebuvo įvardyti kaip pavaizduoti kreivėmis A, B arba C) priklausomybę nuo r/R tame pačiame Summary Answersheet lape esančiame grafiko šablone ir užrašykite, kokie tai kintamieji.

[5]

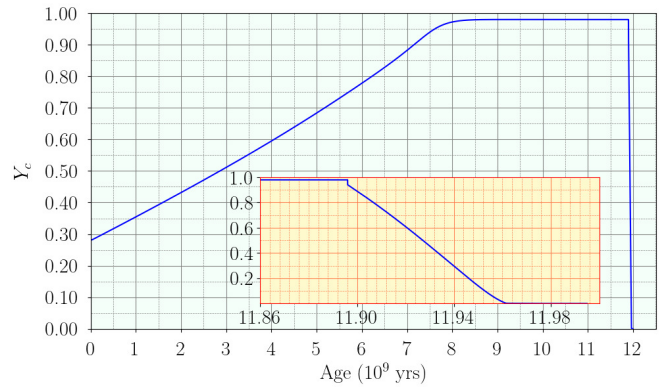
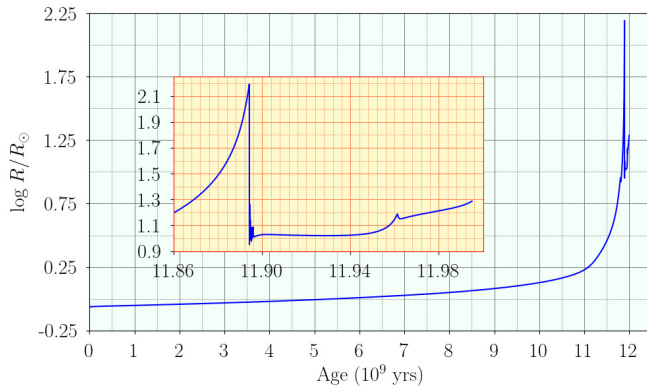
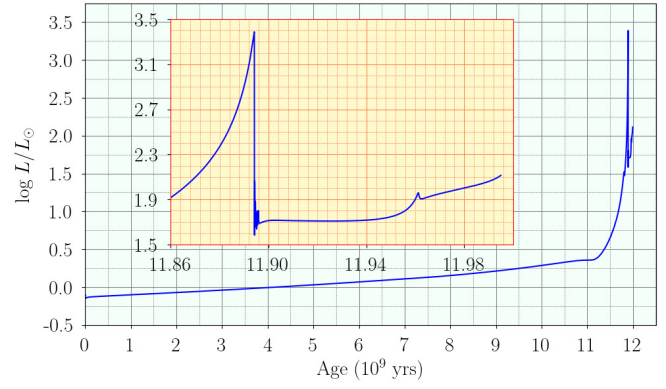
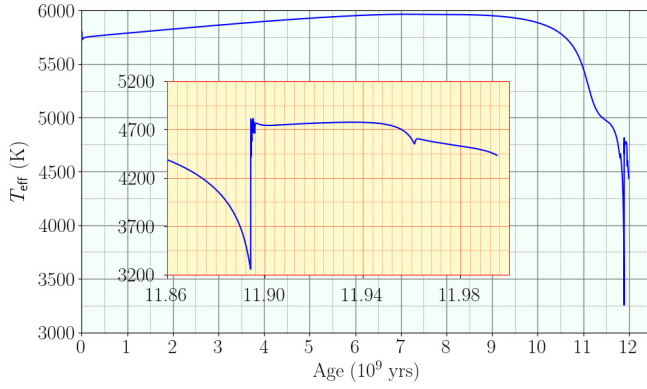
(T11.2) **2 dalis: Evoliucionuojančios žvaigždės**

Panagrinėkime $1M_{\odot}$ žvaigždės, kurios pradinė sudėtis aprašoma helio $Y_0 = 0.28$ ir metalų $Z_0 = 0.02$ santykinės masės dalimis, evoliuciją. Žemiau pateiktuose paveikslukuose parodyta, kaip kinta įvairūs šios žvaigždės parametrai, kai ji evoliucionuoja nuo ZAMS (nulinio amžiaus pagrindinės sekos) iki helio degimo jos branduolyje pabaigos.

Žemiau pateiktame grafike pavaizduotas žvaigždės evoliucinis trekas HR diagramoje ($\log L/L_{\odot}$ priklausomybė nuo $\log T_{\text{eff}}$, kur L yra šviesis paviršiuje, o T_{eff} - žvaigždės efektinė temperatūra).



Žemiau pateiktame paveikslėlyje pavaizduoti keturi grafikai, kuriuose yra T_{eff} (K), L (vaizduojama $\log L/L_{\odot}$), R (vaizduojama $\log R/R_{\odot}$) ir Y_c kitimas priklausomai nuo žvaigždės amžiaus (10^9 metų vienetais). Geresniam matomumui kiekviename iš šių keturių grafikų intarpe detaliau parodyti atitinkamų dydžių pokyčiai amžiaus intervale nuo $11,86 \times 10^9$ m. iki $12,00 \times 10^9$ m.



Naudodami šiuos grafikus atsakykite į žemiau pateiktus klausimus.

(T11.2a) Koks yra apytikslis žvaigždės gyvavimo laikas pagrindinėje sekoje t_{MS} (metais)? [1]

(T11.2b) Kokia apytikslė trukmė Δt_{He} (metais) kai žvaigždė savo branduolyje "degina" helį? [1]

(T11.2c) Kokia pradinė vandenilio masės dalis f_{H} "sudegė" žvaigždės centre, kai žvaigždės šviesis yra $1 L_{\odot}$? [3]

(T11.2d) Koks yra žvaigždės spindulys R_1 ($R_{\odot}$ vienetais), kai "sudegė" 60% pradinės vandenilio masės dalies žvaigždės centre? [3]

(T11.2e) Kokie yra žvaigždės spinduliai R_P ir R_Q ($R_{\odot}$ vienetais), atitinkantys jos padėtis P ir Q pažymėtas HR diagramoje? [4]

(T11.3) **3 dalis. Masės pasiskirstymas žvaigždės viduje**

Masės pasiskirstymas žvaigždės viduje aprašomas taip:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Šią lygtį patogiu išreikšti trimis bedimensiniais kintamaisiais, t. y. santybine mase q , santykinio spinduliu x , ir santykinio tankiu σ , kurie apibrėžiami

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

, kur M ir R yra pilna žvaigždės masė ir spindulys, atitinkamai, o $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ yra vidutinis žvaigždės tankis. Papildomai žinoma tokia informacija:

- Centrinis tankis $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$

- Pusė žvaigždės masės sutelkta vidiniuose 25% viso jos spindulio, o 70% jos masės telpa vidiniuose 35% viso spindulio.

Visose tolesnėse šios užduoties dalyse pakaks suapvalinti visas skaitines vertes 0,005 tikslumu.

- (T11.3a) Aukščiau pateiktą lygtį, nusakančią masės priklausomybę nuo spindulio, išreikškite [2]
kintamaisiais x , $\frac{dq(x)}{dx}$ ir $\sigma(x)$.

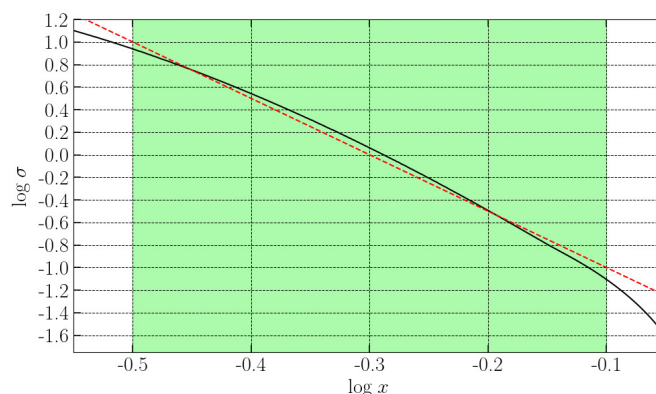
Kad gautume masės pasiskirstymą išilgai spindulio, turime žinoti tankio profilį žvaigždės viduje. Šiam uždaviniui tankio priklausomybė nuo spindulio aprašoma apytikslėmis išraiškomis dviem x intervalams:

- centrinėje žvaigždės dalyje: $0 \leq x \leq 0,32$
- vidurinėje žvaigždės dalyje: $0,32 < x < 0,80$

Išorinei daliai, t. y. $0,80 \leq x \leq 1,00$ jokios aproksimacijos netaikomos.

- (T11.3b) **Vidurinės dalies aproksimacija:**

$\log \sigma$ priklausomybė nuo $\log x$ vidurinėje žvaigždės dalyje pavaizduota juoda kreive žemiau esančiame grafike. Priderinsime tiesę, pavaizduota raudona punktyrine linija, kintamojo $\log \sigma$ priklausomybei nuo $\log x$. Ši aproksimacija galioja intervale $-0,5 < \log x < -0,1$, t. y. $0,32 \lesssim x \lesssim 0,80$ (pavaizduota žaliai nuspalsvinta sritimi). Be to, šios tiesės krypties koeficientas apvalinamas iki artimiausio sveikąjo skaičiaus.



Naudodami šią aproksimaciją, užrašykite $\sigma(x)$ priklausomybės nuo x išraišką [4]
intervale $0,32 < x < 0,80$.

- (T11.3c) Naudodami (T11.3b) rezultata, užrašykite $q(x)$ išraišką intervale $0,32 < x < 0,80$. [6]

- (T11.3d) **Centrinės dalies aproksimacija:**

Žvaigždės vidinėje dalyje ($0 \leq x \leq 0,32$) tankis gali būti aproksimuojamas kaip [8]
tiesinė priklausomybė nuo spindulio, t. y. $\sigma(x) = Ax + B$, kur A, B yra konstantos.
Nustatykite A ir B ir tai naudodami užrašykite $q(x)$ išraišką intervale $0 \leq x \leq 0,32$.
Atkreipkite dėmesį, kad dėl ankstesnėje ir šioje dalyje taikomų aproksimacijų
(supaprastinimų) gali atsirasti nedideli tankio ar masės verčių trūkiai ties $x = 0,32$.

- (T11.3e) (T11.3c) ir (T11.3d) dalyse gautos $q(x)$ išraiškos yra aproksimacijos, kurios gana gerai [4]
apibūdina masės priklausomybę nuo spindulio, tačiau tik tam tikrose žvaigždės srityse.
Intervale $0,80 \leq x \leq 1$ (kuriai negavome jokios išraiškos) galima naudoti atitinkamą
ekstrapoliaciją iš artimiausio intervalo. Naudodami šias apytiksles išraiškas ir
pateiktus duomenis, schematiškai nubrėžkite tolydžią $q(x)$ priklausomybę nuo x (be
jokių $q(x)$ arba šios funkcijos išvestinės trūkių) visai žvaigždei ($0 \leq x \leq 1$), kuri
vaizduoja masės priklausomybę nuo spindulio.

(T12) Juodųjų skylių Hawkingo spinduliuotė

[50 taškų]

(T12.1) Juodosios skylės (BH) paprastai susidaro po gravitacinio masyvios žvaigždės kolapso jos gyvavimo pabaigoje iki taško, vadinamo singularumu. Dėl ypač stiprios tokio objekto gravitacijos niekas, kas patenka į įvykių horizontą (sferinį paviršių, kurio $r = R_{SC}$, kur r yra atstumas nuo singularumo), negali iš jo ištrūkti. Čia R_{SC} vadinamas Švarcšildo spinduliu.

(T12.1a) **Hawkingo spinduliuotės kilmės modeliavimas:** Nagrinėkime porą dalelių, kurių kiekvienos masė m , susidariusių abiejose BH įvykių horizonto pusėse. Viena dalelė yra arti horizonto ribos, bet išorėje, atstumu $r \approx R_{SC}$ nuo BH, o kita dalelė yra horizonto viduje, atstumu $r = \kappa R_{SC}$. Tarkime, kad bendra dalelės energija yra jos rimties energijos mc^2 ir BH gravitacinės potencinės energijos suma.

Nustatykite κ vertę, kai dalelių poros suminė energija lygi nuliui.

[4]

(T12.1b) **Juodosios skylės temperatūra:** Jei dalelė, susidariusi už įvykių horizonto ribų, turi pakankamai kinetinės energijos, ji gali ištrūkti iš juodosios skylės Hawkingo spinduliavimo metu. Horizonto viduje likusi dalelė, turinti neigiamą energiją, neištrūksta ir sumažina BH masę.

Tarkime, kad Hawkingo spinduliuotę sudaro fotonai, kurių spektras yra absoliučiai juodojo kūno spektras, kurio maksimumas yra ties bangos ilgiu $\lambda_{bb} \approx 16R_{SC}$. Saulės masės BH $R_{SC, \odot} = 2,952$ km.

Raskite BH temperatūros T_{bh} , atitinkančios absoliučiai juodojo kūno spinduliavimą, išraišką, naudodami masę M_{bh} ir fizikines konstantas. Apskaičiuokite juodosios skylės, kurios masė $10 M_{\odot}$, Švarcšildo spindulį $R_{SC, 10\odot}$ ir temperatūrą $T_{bh, 10\odot}$. [4]

(T12.1c) **Juodosios skylės masės praradimas:** Tarkime, kad Hawkingo spinduliuotė sklinda iš įvykių horizonto.

Remdamiesi masės ir energijos ekvivalentiškumu, išreikškite masės praradimo spartą $dM_{bh}(t)/dt$ naudodami BH masę $M_{bh}(t)$ ir fizikines konstantas.

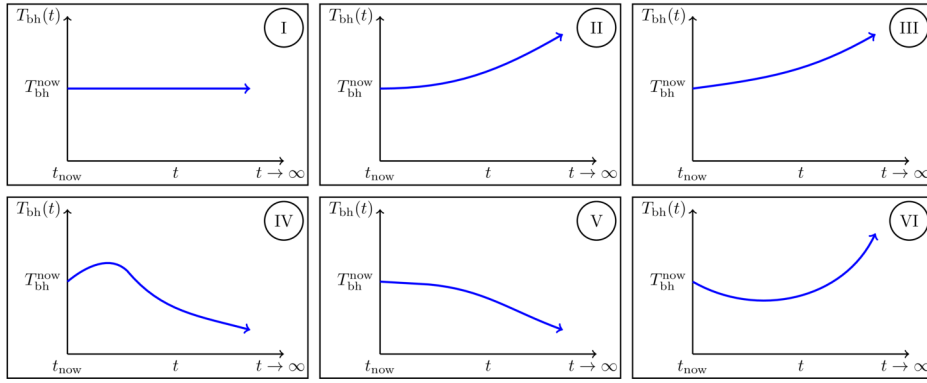
Iš čia gaukite $M_{bh}(t)$ išraišką juodajai skylei, kurios pradinė masė M_0 . Schematiškai nubraižykite $M_{bh}(t)$ priklausomybę nuo t , pradedant $M_{bh} = M_0$ ir iki $M_{bh} = 0$. [8]

(T12.1d) **Juodosios skylės gyvavimo trukmė:** raskite juodosios skylės gyvavimo trukmės išraišką τ_{BH} , kai juodoji skylė, kurios pradinė masė M_0 , visiškai išgaruoja dėl Hawkingo spinduliavimo, naudojant M_0 ir fizikines konstantas. Apskaičiuokite juodosios skylės, kurios $M_0 = 10 M_{\odot}$, gyvavimo trukmę $\tau_{bh, 10\odot}$ (sekundėmis). [3]

(T12.1e) **Juodoji skylė CMB spinduliuotėje:** Juodoji skylė, esanti toli nuo kitų kūnų ir kurios dabartinė temperatūra T_{bh}^{now} yra kosminio mikrobangų fono (CMB) spinduliuotėje, kurios dabartinė temperatūra $T_{cmb}^{now} = 2,7$ K. Juodosios skylės masė didėja dėl CMB fotonų sugerties ir mažėja dėl Hawkingo spinduliuotės.

Atsižvelgdami į spartėjantį Visatos plėtimąsi, pažymėkite, kuriame iš žemiau esančių grafikų pavaizduota ilgalaikė T_{bh} evoliucija šiems trimis atvejais:

(X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Atsakymą nurodykite Summary Answersheet lape esančioje lentelėje pažymėdami [6]
varnelę atitinkamame langelyje. Kiekvienam iš X, Y arba Z atvejų gali turėti tik vieną
pažymėjimą ties atitinkamu grafiko numeriu.

(T12.2) Labai ankstyvoje Visatoje galėjo susidaryti mažiau masyvios pirmųjų juodosios skylės (PBH). Visi žemiau pateikti klausimai yra susiję su PBH. Čia galima nepaisyti jokių procesų, dėl kurių didėja juodosios skylės masė.

(T12.2a) **PBH garavimas dabartinėje epochoje:** Kaip pastebėjote iš atsakymų į ankstesnius klausimus, Saulės masės juodosioms skylėms išgaruoti prireiktų daug laiko. Kadangi PBH masė yra daug mažesnė, galime užfiksuoti kaip jos išgaruoja dabartiniais laikais.

Raskite pradinę masę $M_{0, \text{PBH}}$ (kg), Švarcsildo spindulį $R_{\text{SC, PBH}}$ (m) ir temperatūrą [4]
 T_{PBH} (K) juodajai skylei, kuri dabartiniu metu baigia visiškai išgaruoti, t. y. tokios,
kurios gyvavimo trukmė $\tau_{\text{PBH}} = 14$ milijardų metų.

(T12.2b) **PBH susidarymas:** ankstyvojoje Visatoje, kurioje dominuoja spinduliuotė, skalės daugiklio kitimas laike išreiškiamas $a(t) \sim t^{1/2}$. Šioje eroje PBH susidaro dėl suminės energijos, esančios ct dydžio srityje, kur t yra tuometinis Visatos amžius, kolapso.

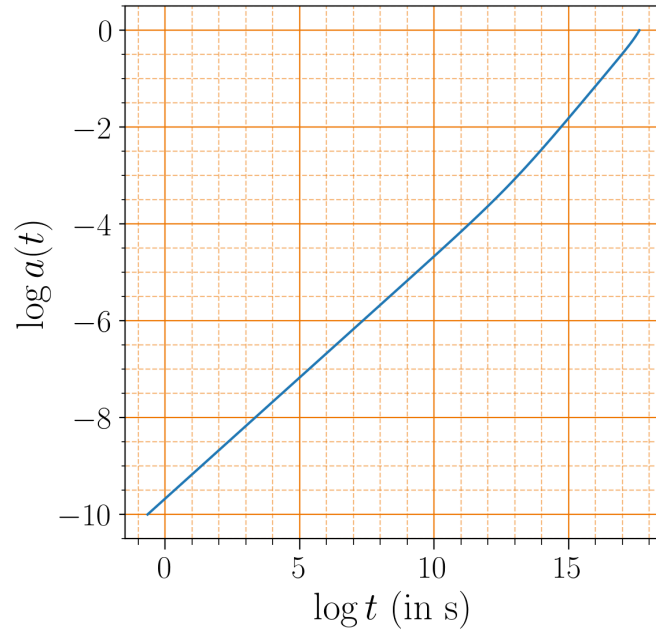
PBH, kurios masė 1×10^{12} kg, susidaro, kai Visatos amžius yra maždaug 1×10^{-23} s. [6]
Apskaičiuokite Visatos amžių t_{20} , kai susidaro PBH, kurios masė 1×10^{20} kg.

(T12.2c) **PBH skleidžiamos Hawkingo spinduliuotės spektras:** Panagrinėkime PBH, kurios pradinė masė 1×10^{10} kg ir kuri visiškai išgaruoja praėjus jos gyvavimo trukmei τ_{PBH} . Šiam uždaviniui dėl paprastumo darykime prielaidą, kad tuo momentu išspinduliuojama didžioji dalis Hawkingo spinduliuotės, kurios temperatūra atitinka pradinę masę. Taip pat laikykite, kad Visatos skalės daugiklio kitimas aprašomas $a(t) \sim t^{2/3}$.

Apskaičiuokite didžiausią Hawkingo spinduliuotės bangos ilgį, stebimą Žemėje, λ_{earth} , [5]
dabartinėje epochoje ($t = 14$ milijardų metų).

(T12.2d) **Didelės energijos kosminė spinduliuotė iš PBH:** Tarkime, kad Hawkingo spinduliuotės, išspinduliuotos tam tikru laiku t , fotonų energija yra $k_B T_{\text{bh}}(t)$. Be to, aukščiausia galima juodosios skylės temperatūra yra Planko temperatūra T_{Planck} , kur $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Skalės daugiklio kitimas atitinkamame laiko intervale parodytas žemiau esančiame grafike. Laikoma, kad skalės daugiklio vertė šiuo metu lygi vienetui. Laiko ašyje dydis $t(s)$ rodo visatos amžių sekundėmis.



Jeif Žemėje stebimas fotonas, kurio energija $E_{\text{det}} = 3,0 \times 10^{20}$ eV, nustatykite [10]
didžiausią ir mažiausią galimą PBH, kuri galėjo išspinduliuoti tokį fotoną, pradinės
masės vertę (atitinkamai M_0^{max} ir M_0^{min}).