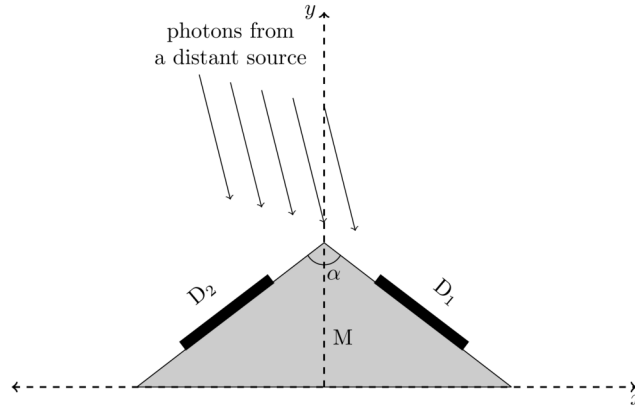


(T01) 다크샤 미션

[10점]

"다크샤(Daksha)"는 인도가 제안한 임무로, 두 개의 위성 S_1 과 S_2 로 구성된다. 이 위성들은 지구를 공전하며, 반경 $r = 7,000\text{km}$ 의 동일한 원궤도를 돌지만 위상차는 180° 이다. 이 위성들은 고에너지 영역(X선과 γ 선)에서 우주를 관측한다. 다크샤의 각 위성은 여러 개의 평평한 직사각형 검출기를 사용한다.

하늘에서 광원의 위치를 파악하는 방법을 이해하기 위해 Daksha 임무의 단순화된 모델을 사용할 것이다. 아래 그림과 같이 S_1 에 각각 면적 $A = 0.50\text{ m}^2$ 의 두 개의 동일한 검출기 D_1 과 D_2 가 불투명한 마운트 M에 부착되어 있다고 가정하자. 두 검출기는 $x - y$ 평면에 수직하게 서있고, y 축을 중심으로 대칭적으로 배치되어 있으며, 서로 $\alpha = 120^\circ$ 의 각도를 이룬다.



- (T01.1) $x - y$ 평면에 위치한 먼 광원을 관찰할 때, 검출기 D_1 은 전력(power) $P_1 = 2.70 \times 10^{-10}\text{ J s}^{-1}$ 을 기록했고, 검출기 D_2 는 전력(power) $P_2 = 4.70 \times 10^{-10}\text{ J s}^{-1}$ 을 기록했다.

광원의 위치 벡터가 양의 y -축과 이루는 각도 η 를 추정하시오. 양의 y -축으로부터 반시계 방향의 [5]
각도가 양수로 간주된다.

먼 거리의 광원(반드시 $x - y$ 평면에 있을 필요는 없음)에서 나온 단일 펄스를 다크샤의 두 위성(S_1 과 S_2)이 검출한다고 가정해보자. S_1 과 S_2 에서 펄스의 피크가 검출된 시간은 각각 t_1 과 t_2 이다.

- (T01.2) 만약 $t_1 - t_2$ 가 $10.0 \pm 0.1\text{ ms}$ 로 측정 되었다면, 천구 전체 영역 대비 천구 상에 광원이 위치할 [5]
수 있는 영역의 비율(fraction) f 를 결정하시오.

(T02) 마카르-산크란티

[10점]

"마카르-산크란티" 축제는 지구에서 바라본 태양이 황도 십이궁의 염소자리(마카르 = 염소자리, 산크란티 = 진입)에 진입하는 시기에 인도에서 기념된다. 현재는 매년 1월 14일경에 기념된다. 오래 전에는 이 축제일이 북반구의 동지와도 일치했으며, 이때는 12월 21일에 일어난 것으로 가정한다.

- (T02.1) 위의 정보를 바탕으로, 이 축제날이 북반구의 동지와 마지막으로 일치했던 년도 y_c 를 구하시오. [3]

- (T02.2) 태양이 2006년 1월 14일 뭄바이에서 현지 시간으로 11:50:13에 염소자리의 황도대 영역 [3]
(zodiacal region)에 진입한 것으로 보였다면, 2013년에 태양이 염소자리에 진입하는 날짜
(date) D_{enter} 와 현지 시간(local time) t_{enter} 을 계산하시오.

(T02.3) 마카르-상크란티 축제는 염소자리의 황도대 영역(zodical region)에서 첫 번째 일몰이 있는 날 특정 장소에서 열린다. 1월 Mumbai의 현지 일몰 시간이 18:30:00이라고 가정할 수 있다.

2006년부터 2013년까지 매년 축제가 열린 날짜를 표시하십시오 (Summary Answersheet에 주어진 표에 ✓ 표시를 하시오). [4]

(T03) 중력파

[15점]

궤도를 도는 블랙홀 쌍성계(binary black holes)는 중력파를 생성한다. 우리 은하에 있는 두 블랙홀을 생각해보자. 질량이 $M = 36 M_{\odot}$ 와 $m = 29 M_{\odot}$ 인 블랙홀들이 질량 중심을 기준으로 원궤도를 돌며 공전 각진동수(각속도의 크기; orbital angular frequency) ω 로 공전하고 있다.

(T03.1) 뉴턴 중력을 가정하여, 두 블랙홀 사이의 거리가 각 블랙홀의 슈바르츠실트 반지름의 합의 4배가 되는 시점 t_{ini} 에서 블랙홀 궤도의 각진동수(각속도의 크기; angular frequency) ω_{ini} 를 M, m 및 물리 상수만으로 유도하십시오.

ω_{ini} 의 값을 계산하십시오 (단위: rad s^{-1}).

[5]

(T03.2) 일반 상대성 이론에 따르면, 궤도를 도는 두 블랙홀은 주파수(frequency) f_{GW} 의 중력파를 방출하며, 이는 $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$ 와 같다. 이는 블랙홀 궤도를 축소시키며, 결과적으로 f_{GW} 를 증가시킨다. f_{GW} 의 변화율은 다음과 같다.

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3}$$

이때 $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ 는 "처프 질량(chirp mass)"이라고 불린다.

α, β 및 δ 의 값을 찾으시오.

[4]

(T03.3) 이 이벤트와 관련된 중력파가 처음 감지된 시간이 $t_{\text{ini}} = 0$ 이라고 가정하자.

[6]

블랙홀 병합(merger)이 관측되는 시간 t_{merge} 을 $\omega_{\text{ini}}, M_{\text{chirp}}$ 및 물리 상수만으로 유도하십시오. 블랙홀 병합은 f_{GW} 가 매우 커질 때 일어난다.

t_{merge} 의 값을 계산하십시오.(단위: 초(second))

(T04) 발머 감쇠

[15점]

성운에 둘러싸인 주계열성에 대해 고려해보자. 이 별의 V-밴드 등급이 11.315 mag으로 관측되었다. 별 가까이에 있는 성운의 이온화된 영역에서는 $H\alpha$ 와 $H\beta$ 선이 방출되며, 이들의 파장은 각각 $0.6563 \mu\text{m}$ 및 $0.4861 \mu\text{m}$ 이다. 이론적으로 예측되는 $H\alpha$ 와 $H\beta$ 선의 플럭스 비율은 $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2.86$ 이다. 그러나 이 방출선이 차가운 먼지 성운의 외부를 통과한 후 $H\alpha$ 및 $H\beta$ 방출선의 플럭스는 각각 $6.80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ 와 $1.06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ 으로 관측된다.

소광 A_{λ} 는 파장의 함수로 표현되며 다음과 같다:

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

여기서 $\kappa(\lambda)$ 는 소광 곡선이고 $E(B - V)$ 는 B와 V 밴드의 색초과(colour excess)를 나타낸다. (파장 λ 가 μm 단위로) 소광 곡선이 다음과 같이 주어진다.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

여기서, $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ 는 전체 대 선택적 소광의 비율(ratio of total-to-selective extinction)이다.

(T04.1) $\kappa(H\alpha)$ 와 $\kappa(H\beta)$ 의 값을 구하시오. [3]

(T04.2) 색초과의 비율(ratio of colour excess) $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$ 의 값을 구하시오. [4]

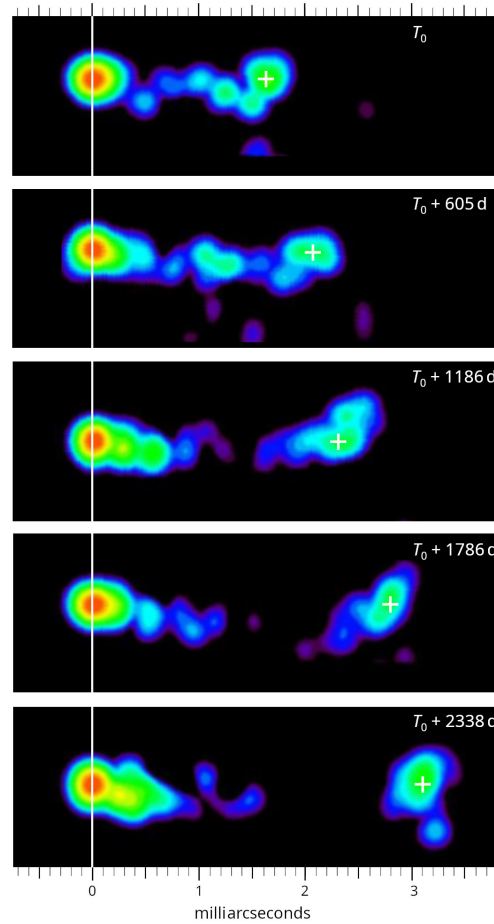
(T04.3) $H\alpha$ 와 $H\beta$ 각 파장에서, 성운에 의한 소광(extinction) $A_{H\alpha}$ 와 $A_{H\beta}$ 를 추정하시오. [6]

(T04.4) 성운의 소광(extinction)(A_V)을 추정하고, 성운이 없을 때 V 밴드에서 별의 겉보기 등급 [2]
(apparent magnitude) m_{V0} 을 추정하시오.

(T05) 퀘이사

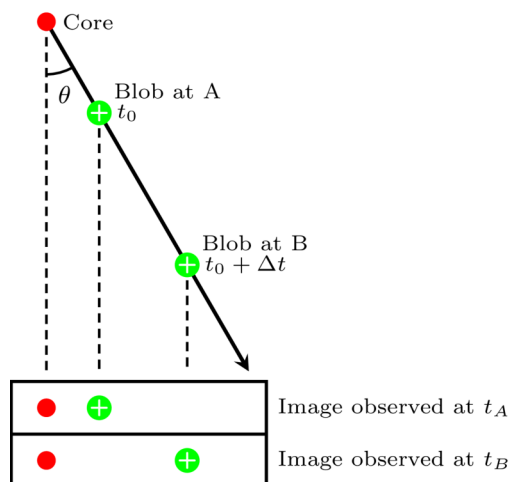
[20 점]

퀘이사는 상대론적 제트를 방출하는 초거대질량 블랙홀에 의해 구동(powered)되는 매우 밝은 활동성 은하이다. 그림은 여러 시간에 걸쳐 관측된 퀘이사의 전파 이미지이다(적색편이 $z = 0.53$, 광도 거리 $D_L = 1.00 \times 10^{10}$ ly). "핵(core)"은 수직 흰색 선과 정렬되어 있고, "블롭(blob)" (흰색 + 표시된 덩어리)으로 구성된 제트는 시간이 지남에 따라 핵에서 멀어진다. 각 패널에는 관측 시간이 표시되어있으며 (첫 번째 이미지를 T_0 로 시작), 각도 척도(angular scale)는 그림의 맨 위와 맨 아래 축에 표시되어 있다.



- (T05.1) 각 관측 시간에 대해 퀘이사 핵으로부터 블롭까지의 분리 각(angular separation) ϕ_{blob} (밀리 각초 milliarcsecond 단위)과 횡방향 거리(transverse distance) l_{blob} (광년 단위)를 결정하십시오. 그리고, 연속적인 관측을 이용하여 블롭의 겉보기 횡방향 속도(apparent velocity) (v_{app})를 빛의 속도에 대한 비율 $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ 로 계산하십시오. 또한 관측 전체(entire) 기간에 대해 평균 겉보기 속도(average apparent velocity) $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ 를 계산하십시오. [5]

퀘이사 제트는 실제로 상대론적 속도 $v \equiv \beta c$ 로 움직이지만, 반드시 천구면(the plane of the sky) 상에서 움직이는 것은 아니다. 예를 들어, 아래 그림에서 보여지듯이 퀘이사 제트의 분출 방향은 멀리 떨어진 관찰자의 시선 방향(line of sight; 점선으로 표시됨)으로부터 특정 각도 θ (“관찰각도 viewing angle”)만큼 기울어져 있다. 이 문제와 이후 모든 문제에서는 퀘이사의 적색편이와 모든 상대론적 효과를 무시한다.



(T05.2) 두 다른 시간 t_0 (위치 A에 해당) 및 $t_0 + \Delta t$ (위치 B에 해당)에서 블롭이 방출한 빛은 각각 t_A 와 t_B 에 관측자에게 도달한다. 따라서 관측된 시간 차이는 $\Delta t_{app} = t_B - t_A$ 이다.

(T05.2a) 비율 $\frac{\Delta t_{app}}{\Delta t}$ 를 β 와 θ 으로 나타내시오. [2]

(T05.2b) 이 비율을 이용하여 β_{app} 를 β 와 θ 으로 나타내시오. [2]

(T05.3) 겉보기 속도가 빛의 속도보다 빠른 운동은 초광속 (superluminal; $\beta_{app} > 1$)이라고 하고, 그렇지 않으면 아광속(subluminal; $\beta_{app} < 1$)이라고 한다.

(T05.3a) $\beta_{app} = 1$ 일 때, θ 의 함수로 β 의 연속적인 곡선을 그리고 아광속과 초광속 운동의 경계를 표시하시오. 그래프에서 초광속 영역을 사선(///)으로 음영 처리하시오. [4]

(T05.3b) 초광속 운동이 발생하기 위한 실제 제트 속도(jet speed; $\beta_{low} = v_{low}/c$)의 최솟값과 그에 해당하는 관찰 각도(viewing angle) θ_{low} 을 찾으시오. [2]

(T05.4) 주어진 β_{app} 값에 대해 가능한 최대 관찰 각도 θ_{max} 의 표현식을 찾으시오. [2]

퀘이사의 핵, 즉 중심의 컴팩트한 물체는 인과적으로 연결된 영역 내에서 발생하는 내부 과정으로 인한 방출의 변동성을 보인다. 이 영역의 크기(= 반지름)는 일반적으로 핵의 슈바르츠실트 반지름의 약 다섯 배로 간주된다.

(T05.5) 어떤 퀘이사의 핵이 약 1시간의 시간 척도로 변동하는 것이 발견되었다. 중심에 있는 컴팩트 물체의 질량의 상한값 $M_{c,\backslash,max}$ 을 태양 질량 단위로 구하라. [3]

(T06) 은하 회전

[20점]

우리 은하의 회전 곡선은 21 cm HI 선을 통해 관측된 다양한 은하 경도에 따른 중성 수소 (HI) 구름의 시선 속도 측정을 사용하여 결정된다. 은하 중심(GC)으로부터 거리 R 에 위치하고 태양으로부터 거리 D 에 위치한 은하 경도 l 을 가진 HI 구름을 생각해 보자. 태양은 은하 중심으로부터 $R_0 = 8.5$ kpc의 거리에 있다고 가정하자. 태양과 HI 구름 모두 은하 평면에서 은하 중심 주위를 원궤도로 돌고 있으며, 태양과 HI구름의 각속도는 각각 Ω_0 와 Ω , 회전 속도는 V_0 와 V 이다.

태양에서 관측된 구름의 시선 속도(V_r)와 횡단 속도(transverse velocity) (V_t) 성분은 다음과 같이 표현될 수 있다:

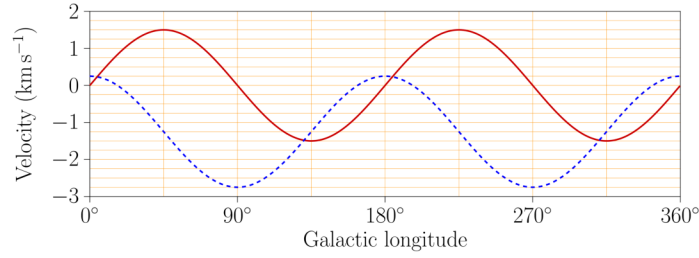
$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

은하의 북쪽 위에서 은하 평면을 내려다 볼 경우 은하 회전은 시계 방향이다. 이 문제를 풀 때, 사물이 시선에서 멀어질 때의 시선속도를 양수로 정의하고 구름은 하나의 점으로 취급하기로 하자.

(T06.1) Summary Answersheet에 제공된 그래프에서 (i) $l = 45^\circ$ 와 (ii) $l = 135^\circ$ 로 정의된 두 시선에 대해 $D = 0$ 에서 $D = 2R_0$ 까지 V_r 를 D 의 함수로 그리시오. 각 선/곡선에 l 값을 표기하시오. [5]

(T06.2) 아래 그래프는 태양으로부터 100pc 거리에 있는 별들의 평균 시선 속도(빨간색 선) 및 횡단속도(파란색 점선) 성분을 은하 경도의 함수로 나타낸 것이다.



그래프를 사용하여 은하 중심(GC)을 도는 태양 공전 주기(P)를 백만년(My) 단위로 추산하시오. [3]

(T06.3) 얀 오르트(Jan Oort)는 태양 부근($D \ll R_0$)에서는 각속도의 차이($\Omega - \Omega_0$)가 작다는 점에 주목하여 시선속도 및 횡단속도 성분에 대하여 다음과 같은 1차 근사치를 도출했다:

$$\begin{aligned} V_r &= AD \sin 2l \\ V_t &= AD \cos 2l + BD \end{aligned}$$

여기서 A 및 B 는 오르트의 상수로 알려져 있다.

다음 두 가지 경우를 생각해 보자.

- (I) 은하의 실제 관측된 회전 곡선
- (II) 은하에 암흑 물질이 없고 은하의 전체 질량이 중심에 집중되어 있다고 가정한 가상의 시나리오에 대한 회전 곡선.

(T06.3a) 태양의 위치에서 회전 속도의 방사형 기울기(radial gradient) $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ 에 대한 [2]
표현을 각각 두 가지 경우에 대해 도출하시오.

(T06.3b) A 와 B 를 V_0 , R_0 , 그리고 태양의 위치에서 회전 속도의 방사형 기울기 $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ [8]
로 표현하시오.

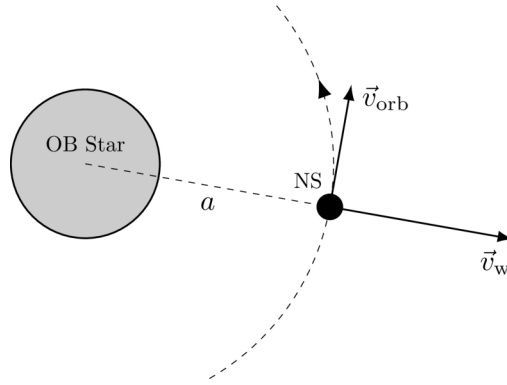
(T06.3c) 두 가지 주어진 경우 (I)와 (II)에 대한 오르트 상수의 비율 (A/B)은 각각 F_I 와 F_{II} 로 [2]
정의된다. F_I 와 F_{II} 를 구하시오.

(T07) 중성자별 쌍성

[20점]

고밀도 별(compact star)이 포함된 쌍성계에서 동반 별이 로슈 로브(Roche lobe) 한계 내에 머물러 있는 경우, 고밀도 별이 동반 별의 물질을 흡수하는 일은 주로 동반별의 항성풍을 통해 발생한다. 이러한 항성풍에 의한 물질 흡수는 초기형 별(예: O형 또는 B형 별, 이하 OB 별로 표시됨)과 중성자별(NS)과 같은 고밀도 천체가 서로 가까운 궤도를 도는 시스템에서 특히 중요하다.

질량이 $M_{NS} = 2.0 M_\odot$ 이고 반지름이 $R_{NS} = 11 \text{ km}$ 인 중성자별이 OB 별의 중심으로 부터 반지름 a 인 원궤도를 $v_{orb} = 1.5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ 의 속력으로 돌고 있는 NS-OB 별 쌍성계를 생각해 보자 (아래 그림 참조). 이 문제 전반에 걸쳐 OB 별의 질량 손실은 구형 대칭으로 발생하며 항성풍에 의한 별의 질량손실률은 $\dot{M}_{OB} = 1.0 \times 10^{-4} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ 라고 가정하자.



- (T07.1) 강착 반경(accretion radius), R_{acc} 은 항성풍이 NS에 의해 포획될 수 있는 거리의 최대 한계값 [3]
(중성자 별로부터의 거리)으로 정의된다. NS의 공전 궤도 위치에서 항성풍의 속도가 $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ 일 때, 표준적인 탈출 속도 계산 방식을 사용하여 이 쌍성계 시스템의 R_{acc} 을 km 단위로 구하시오.
- (T07.2) 모든 포획된 물질이 NS에 강착된다고 가정할 때, 질량강착률 $\dot{M}_{\text{acc}}$ 을 $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ 의 단위로 추정 [3]
하시오. 여기서 $a = 0.5 \text{ au}$ 이다. 복사압의 영향과 강착된 가스의 유한한 냉각 시간에 따른 영향은 무시하시오.
- (T07.3) 이제 공전 궤도 a 에서의 항성풍 속도가 NS의 공전 속도와 열추 비슷한 상황을 고려해보자. 이 경 [6]
우 항성풍으로부터 NS로 강착되는 질량의 강착률은 $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} f(\tan \beta, q)$ 의 형태로 주어진다. 여기서 $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$ 는 두 별의 질량비이고 β 는 NS의 관점에서 바라본 항성풍의 속도 방향과 OB형 별로부터의 방사 방향 (radial direction) 사이의 각도이다. $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$ 를 가정하여 $f(\tan \beta, q)$ 에 대한 표현식을 구하시오.
- (T07.4) 완전히 이온화된 물질이 방사형으로(radially) 강착되고 있으며 이것이 NS의 강한 자기장 $\vec{B}$ 때문 [7]
에 방해받는다고 가정하자. 이 효과는 $\frac{B^2}{2\mu_0}$ 로 주어지는 압력으로 기술될 수 있다 (혹은 모델링 될 수 있다: can be modelled). NS가 자기 쌍극자 자기장을 가지고 있으며 적도면에서의 세기가 NS로부터의 거리 r 에 따라 $r \gg R_{\text{NS}}$ 인 지점부터

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

인 방식으로 변한다고 가정하자. 여기서 B_0 는 NS의 적도 반경에서의 자기장이다. 자기 쌍극자의 축이 NS의 회전축과 정렬되어 있다고 가정하라.

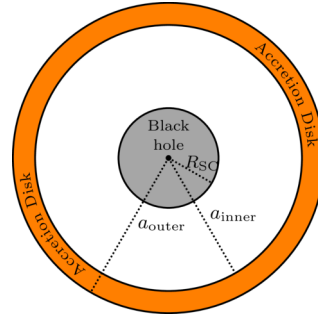
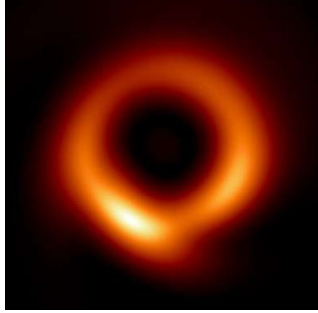
- (T07.4a) 적도면에서의 자기 압력(magnetic pressure) $P_{\text{eq}, \text{mag}}$ 을 B_0, R_{NS}, r 및 기타 적 [1]
절한 상수로 표현하시오.
- (T07.4b) 적도면에서 자기장에 의해 질량 강착이 멈추는 최대 거리 (NS 중심으로부터의 최대 [7]
거리)를 자기권 반경 R_m 이라고 한다. 이 물질의 흐름은 들어오는 항성풍과 NS 사이의 상대적 운동으로 인한 압력을 만들 것이다. R_m 이 R_{acc} 와 일치하는 임계 자기장 $B_{0, \text{c}}$ 의 근사식을 구하고, 테슬라 단위로 값을 계산하시오. $r > R_m$ 에 대해서는 자기 효과를 무시하고, $v_w \gg v_{\text{orb}}$ 라는 사실을 고려하라.

(T08) 블랙홀의 그림자

[20점]

이벤트 호라이즌 망원경(EHT)은 아래 그림의 왼쪽 패널에 표시된 것처럼 M87 은하 중심에 있는 초대질량 블랙홀의 이미지를 공개했다.

이 이미지의 몇 가지 간단한 특징을 이해하기 위해, 질량 $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$ 의 회전하지 않는 정적 구대칭 블랙홀의 단순화된 모델을 고려할 것이다. 이 블랙홀은 평면 상에 내반경과 외반경이 각각 $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ 와 $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$ 인 질량이 없는 얇은 강착 원반으로 둘러싸여 있으며, 여기서 R_{SC} 는 슈바르츠실트 반지름이다. 정면도(face-on view) 스케치는 아래 그림의 오른쪽 패널에 표시되어 있다 (그림은 실제 비율을 반영하지 않았다).



강착 원반이 이 문제에서 고려해야 할 유일한 광원이라고 가정하자. 원반의 모든 지점은 모든 방향으로 빛을 방출한다. 이 빛은 블랙홀의 중력장에 의해 영향을 받으며 이동한다. 빛의 경로는 아래에 주어진 두 개의 방정식에 의해 결정된다 (태양 주위의 물체와 유사하다):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

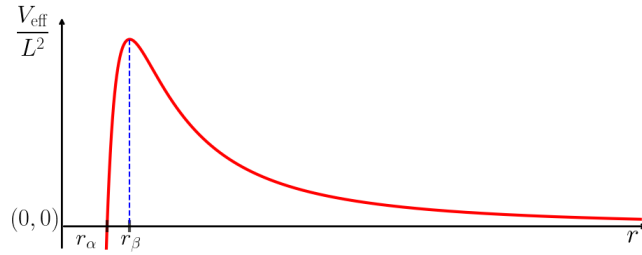
여기서 $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ 는 구면좌표계의 반지름 좌표(radial coordinate), $\phi \in [0, 2\pi)$ 는 방위각(azimuthal angle)이며, E 와 L 은 각각 보존된 에너지와 보존된 각운동량과 관련된 상수이다.

여기서 $v_r \equiv dr/dt$ 는 방사 속도(radial velocity)의 크기, v_ϕ 는 접선 속도(tangential velocity)의 크기이며, $\omega \equiv d\phi/dt$ 는 각속도(angular velocity)이다. 우리는 궤적의 충격 매개변수(impact parameter) b 를 $b = L/\sqrt{2E}$ 로 정의한다. 이 문제에서는 시간 지연(time dilation)을 무시한다.

또 다른 유용한 방정식은 첫 번째 방정식을 미분하여 얻을 수 있다:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

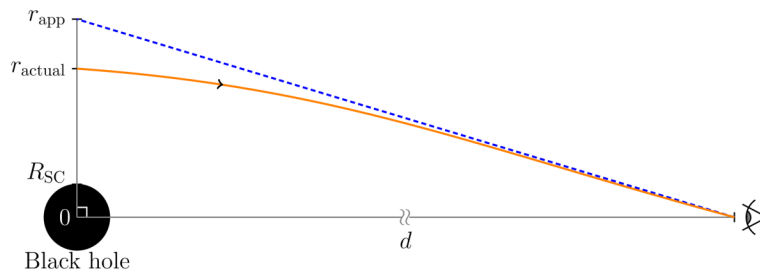
- (T08.1) 블랙홀 주변에는 원형의 빛 궤적(circular light trajectory)이 존재할 수 있다. 이러한 빛 궤적의 반지름 r_{ph} 과 충격 매개변수(impact parameter) b_{ph} 를 M 과 물리 상수로 나타내시오. [4]
- (T08.2) 빛이 원형의 빛 궤적(circular light trajectory)을 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간 T_{ph} 을 초 단위로 계산하시오. [2]
- (T08.3) 위에서 주어진 방사 속도 방정식(이 문제의 첫 번째 방정식)은 빛의 궤적을 기술하는 방정식인 $\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ 와 비교될 수 있다. V_{eff}/L^2 를 r 의 함수로 나타낸 개략적인 그래프가 아래에 주어져 있다.



(T08.3a) 이 그래프는 두 개의 특별한 반지름 r_α 와 r_β 를 나타낸다. r_α 와 r_β 를 M 과 물리 상수로 나타내시오. [2]

(T08.3b) 강착 원반으로부터 안쪽의 블랙홀로 향하는 광자는 경우에 따라 무한대로 탈출할 수 있다. 이러한 광자가 가질 수 있는 전환점 반지름(turning point radius) r_t 의 최소값을 M 과 물리 상수로 나타내시오. 이러한 광자에 대한 충격 매개변수(impact parameter) $b_{\min}$ 의 최소값을 표현하는 식을 구하시오. [3]

(T08.4) 천구면(plane of the sky) 상에서 시스템 중심으로부터 반지름 r_{actual} 에서 오는 광선은 블랙홀의 중력에 의해 강한 굴절을 겪고, 결국 시스템으로부터 먼 거리 d 에 있는 관찰자(눈으로 표시)에 도달하게 된다. 아래에 그림을 참고하라.

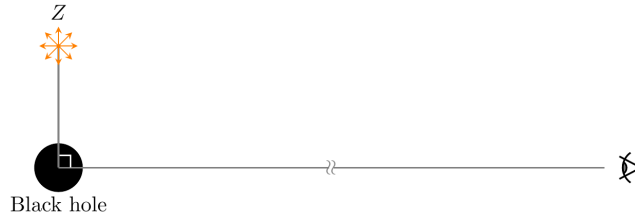


이 관찰자에게는 광선이 천구면에서 블랙홀 중심으로부터 거리 $r_{\text{app}} \approx b$ 에 있는 다른 지점에서 출발한 것처럼 보일 것이다. 여기서 b 는 그 광자 경로의 충돌 매개변수이다. 강착 원반의 출발 지점 $r = r_{\text{actual}}$ 에 대해 다음 관계를 가정할 수 있다:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

우리처럼 멀리 떨어진 관찰자가 강착 원반을 정면으로 볼 때, 시스템의 이미지는 천구면에서 원형 대칭으로 나타날 것이다. 이미지의 가장 바깥쪽 겹보기 반지름(outermost apparent radius) r_{outer} 과 가장 안쪽 겹보기 반지름(inner most apparent radius) r_{inner} 을 au 단위로 결정하시오. [5]

(T08.5) 질량이 $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$ 인 고립된(isolated) 초거대질량 블랙홀이 있고, 이 블랙홀은 어떤 강착 원반도 가지고 있지 않다고 가정하자. 거리 $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ 에 있는 점 Z에서 전자기 복사(electromagnetic radiation)의 강한 폭발이 5초 동안 발생하며, 이는 그림에 표시되어 있다. 점 Z에서의 폭발은 모든 방향으로 빛을 방출한다. 블랙홀로부터 멀리 떨어진 지점에 있는 관측자(아래 그림의 눈으로 표시)는 블랙홀 주변 영역을 60초 동안 장시간 노출로 촬영한다.



다음 중 올바른 것을 고르시오:

- (T08.5a) 빛이 Z에서 관찰자에게 도달할 수 있는 경로의 수는 [2]
(A) 최대 하나 (B) 정확히 하나 (C) 정확히 두 개 (D) 두 개보다 많다.
- (T08.5b) 장노출 이미지에서 보이게 될 Z에서의 전자기 폭발(EM burst)의 이미지 수는 [2]
(A) 최대 하나 (B) 정확히 하나 (C) 정확히 두 개 (D) 두 개보다 많다.

(T09) 대기에서 시상

[35점]

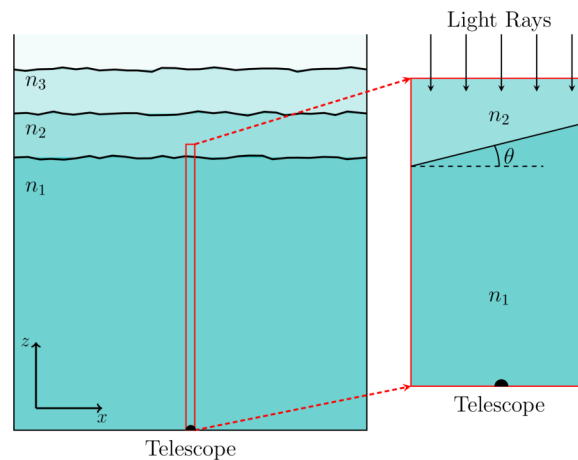
지름 $D = 15 \text{ cm}$ 및 초점 거리 $f = 200 \text{ cm}$ 인 색지움 볼록 대물 렌즈(achromatic convex objective lens)를 가진 망원경이 천정에 있는 별을 향하고 있다.

- (T09.1) 녹색 빛($\lambda = 550 \text{ nm}$)에 대해 회절 효과만 고려하여, 초점면에서 대물렌즈에 의해 생성된 점 광원(point source)의 상(image)의 직경(d_{image} , m 단위)을 구하시오. [1]

천문학적 광원의 상은 소위 "대기 시상(atmospheric seeing)"의 영향을 받는다.

대기층 사이의 경계와 각 층의 굴절률은 난류, 온도 변화 및 기타 요인으로 인해 지속적으로 변한다. 이는 망원경의 초점면에서 상의 위치를 미세하게 변화시키며, 이를 "반짝임 효과(twinkling effect)"라고 한다. 앞으로의 문제에서는 (위에서 사용한 것처럼) 회절 한계로 인한 유한한 별의 상 크기(the diffraction limited finite size of the image)를 사용하는 것 외에는 간섭 효과를 고려하지 않는다.

아래 그림의 왼쪽 패널은 서로 다른 굴절률($n_1, n_2, n_3, \dots$)을 가진 여러 층으로 이루어진 대기의 수직 단면을 보여준다. 오른쪽 패널은 대기의 얇은 수직 구간과 굴절률 n_1 과 n_2 ($n_1 > n_2$)인 두 최하위 대기층 사이의 경계를 확대하여 보여준다. 이 문제에서는 이 두 층과 그 경계만을 고려한다. 그림은 실제 비율을 반영하지 않았다.



(T09.2) 두 층 사이의 경계가 망원경의 대물렌즈 바로 위 1 km 높이에 있으며, 수평면에 대해 $\theta = 30^\circ$ 기울어져 있다고 하자. 이 문제의 모든 부분에서 θ 는 반시계 방향의 각도를 양수로 간주한다. 단색광원(monochromatic light source)에 대해, $n_1 = 1.00027$ 이고 $n_2 = 1.00026$ 이다. 천정에 있는 별의 상이 망원경의 초점면에서 이동한 각도, 각 이동(angular shift)을 α 라고 하자.

(T09.2a) 경계에서의 n_1, n_2, θ 및 α 를 적절히 표시한 광선 다이어그램(ray-diagram)을 그리시오. [2]

(T09.2b) α 를 θ, n_1 와 n_2 로 나타내시오. 작은 각 근사를 사용하시오: $\sin \alpha \approx \alpha$ 및 $\cos \alpha \approx 1$. [2]

(T09.2c) θ 가 1% 증가할 때 (n_1 와 n_2 는 고정), 상의 위치 변화(displacement in the position of the image) Δx_θ (m 단위)를 계산하시오. [3]

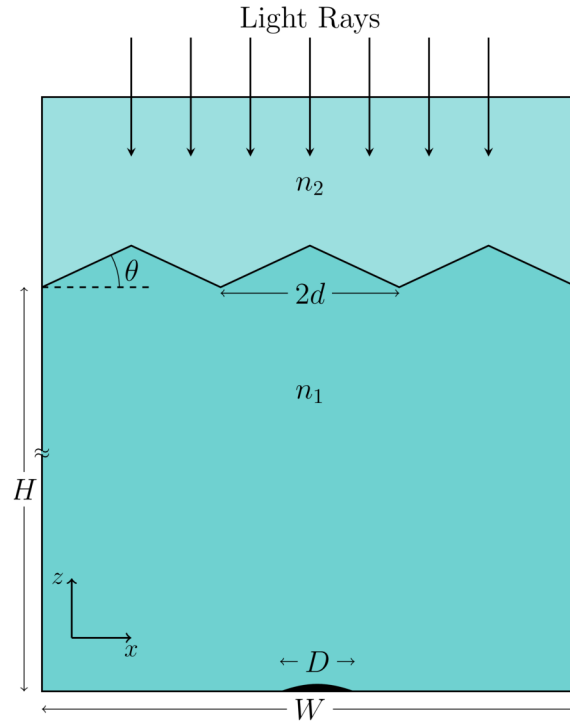
(T09.2d) n_2 가 0.0001% 증가할 때 (n_1 와 θ 는 고정), 상의 위치 변화(displacement in the position of the image) Δx_n (m 단위)를 계산하시오. [3]

(T09.3) 천정에 있는 별에서 오는 백색광(white light)에 대해, 상(image)의 모양과 색상을 가장 잘 설명하는 것을 Summary Answersheet에서 적절한 상자에 체크(✓)하여 선택하시오 (하나만 선택). 그림에서 x 는 왼쪽에서 오른쪽으로 증가한다. [2]

	상의 색상	상의 모양	왼쪽 가장자리	오른쪽 가장자리
A	백색	원형		
B	백색	타원형		
C	색수차가 있는	원형	파란색	빨간색
D	색수차가 있는	원형	빨간색	파란색
E	색수차가 있는	타원형	파란색	빨간색
F	색수차가 있는	타원형	빨간색	파란색

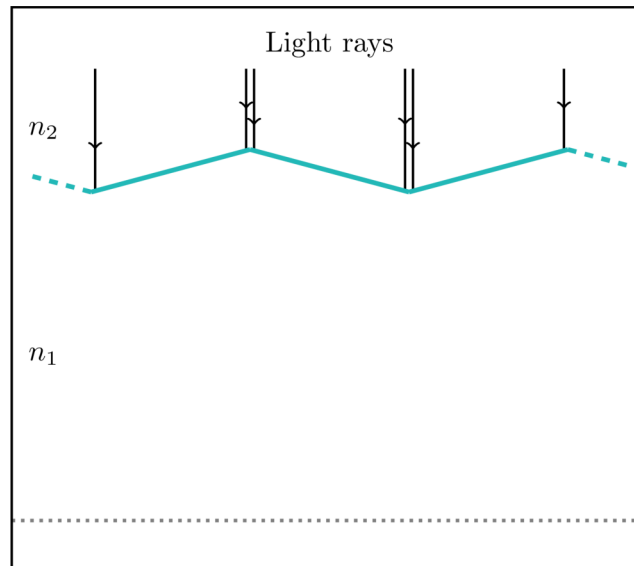
이 문제의 나머지 부분에서는 $\lambda = 550 \text{ nm}$ 인 단색 녹색 빛을 고려한다. 층 사이의 경계를 종이면에 수직인 무한한 지그재그 평면으로 생각하며, x -축을 따라 $d = 10 \text{ cm}$ 로 분리되어 있고, $\theta = 10^\circ$ 또는 $\theta = -10^\circ$ 이다.

아래 그림(실제 비율을 반영하지 않았다)은 이 모델에서 폭 W ($W \ll H$)인 대기의 단면을 보여준다. 큰 구경을 가진 망원경의 경우 경계의 지그재그 특성으로 인해 초점면에서 반점(speckles)이 형성된다.



(T09.4) 위와 같이 모델링된 대기를 고려하십시오.

(T09.4a) 아래 그림에는 위에서 언급한 동일한 매개변수(parameter)를 가진 연속적인 지그재그 평면이 있는 대기의 한 부분이 표시되어 있다 (실제 비율을 반영하지 않았다).



이 그림에서, Summary Answersheet에 재현된, 회색 점선으로 표시된 입사 광선 (incident light ray)의 경로를 망원경의 대물 렌즈가 있는 평면까지 그리시오.

광선이 도달하지 않는 영역이 있다면, 그림에 "X"로 표시하십시오.

[4]

(T09.4b) 그러한 영역의 너비(width) W_x 를 계산하십시오.

[3]

(T09.4c) 경계 구조에 대해 망원경의 적절한 상대적 위치를 선택함으로써 별의 단일 상(single image)를 얻을 수 있는 망원경 대물렌즈의 최대 직경 $D_{\max}$ 을 찾으시오.

[4]

(T09.5) 경계의 지그재그 모양이 x 및 y 방향 모두에서 허용되는 경우를 고려하시오 (피라미드처럼). $(D = 100 \text{ cm}, f = 200 \text{ cm})$ 이다. [6]

이에 따른 반점(speckles)의 정성적 무늬(qualitative pattern)를 Summary Answersheet에 주어진 상자에 그리시오.

(T09.6) 난류 대기를 위해 경계의 동일한 지그재그 모양이 x -방향으로만 나있는 것을 다시 고려하되, 이제 두 평면 사이의 각도가 1.0 초 동안 10° 에서 -10° 로 균일한 속도로 변한다고 가정하자. 이는 상의 위치의 균일한 이동 속도로 이어진다고 가정한다. [5]

지름 $D = 8 \text{ cm}$ 및 초점 거리 $f = 1 \text{ m}$ 인 망원경을 고려하자. CCD 카메라가 단일 상만 얻을 수 있으며 상의 회절 한계 직경(diffraction limited diameter of the image)의 1% 미만으로 상이 움 직이도록 유지되는 최대 노출 시간 $t_{\max}$ 을 추정하시오.

(T10) 빅뱅 핵합성

[35점]

초기 우주의 복사 지배 시대(radiation dominated era) 동안, 우주 척도 인자(scale factor of the Universe)는 $a \propto t^{1/2}$ 이며, 여기서 t 는 빅뱅 이후의 시간이다. 이 시대의 대부분 동안, 중성자(n)와 양성자(p)는 약한 상호작용을 통해 서로 열적 평형 상태를 유지하였다. 자유 중성자 또는 양성자의 개수 밀도(number density; N)는 온도 T 와 각 입자에 상응하는 질량 m 에 대해 다음과 같은 관계식으로 나타난다.

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

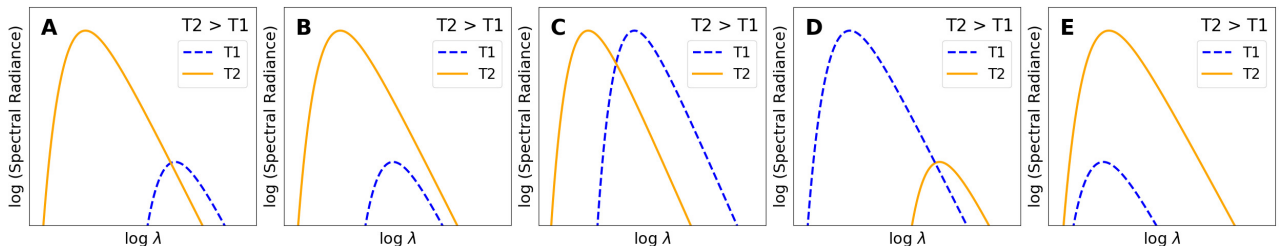
이 관계식은 시간 $t \leq t_{\text{wk}} = 1.70 \text{ s}$, 즉 $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800 \text{ keV}$ 일 때까지 유효하다. t_{wk} 이후에는 약한 상호작용으로는 더 이상 평형을 유지할 수 없으며, 자유 중성자는 610.4 s 의 반감기를 통해 양성자로 붕괴한다.

(T10.1) 양성자의 개수 밀도(number density)를 N_p 라고 하고, 중성자의 개수 밀도를 N_n 라고 하자. [4]
시간 t_{wk} 에서 비율 $X_{n,\text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ 로 주어지는 중성자의 상대적 풍부도 (relative abundance of neutron)를 계산하시오.

(T10.2) 광자는 열적 평형을 유지하고 모든 시기에 흑체복사 스펙트럼을 유지한다.

(T10.2a) 지수 β 를 찾아라. 여기서 $T(a) \propto a^\beta$ 이다. [2]

(T10.2b) 다음 그래프 중 두 온도 T_1 과 T_2 에 대한 스펙트럼 에너지 밀도(spectral energy density)의 올바른 개형을 보여주는 것을 찾으시오. Summary Answersheet에서 올바른 선택지에 체크 (✓)하시오. [2]



- (T10.3) t_{wk} 이후, 양성자와 중성자로부터 중수소(deuterium)가 형성되는 과정은 인도 물리학자 메그나드 사하 교수가 제시한 사하 방정식에 의해 설명되며, 이는 다음과 같이 단순화될 수 있다:

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

여기서, 바리온 대 광자 비율(baryon-to-photon ratio) η 는 6.1×10^{-10} 이며, N_D 는 중수소의 개수 밀도이다.

- (T10.3a) 온도 범위 $k_B T = [60, 70]$ keV 에서 적절한 간격을 둔 적어도 4개 이상의 온도 값에 대해 비율 N_D/N_n 을 Summary Answersheet의 모눈에 플롯하고, 이 점들을 통과하는 부드러운 곡선을 그리시오. [5]

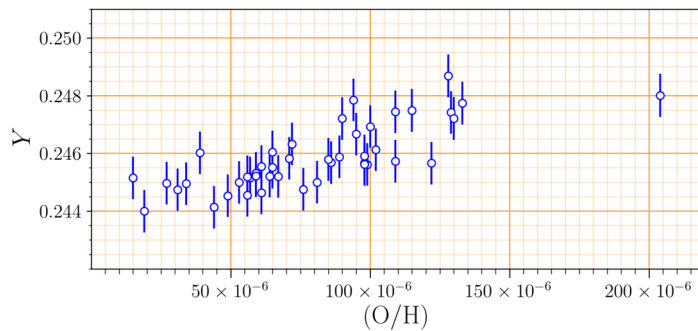
- (T10.3b) 플롯에서 $N_D = N_n$ 일 때의 $k_B T_{\text{nuc}}$ (keV 단위)을 찾으시오. [1]

- (T10.3c) 이제 모든 자유 중성자가 $k_B T_{\text{nuc}}$ 에서 양성자와 즉시 결합하여 중수소를 형성하고, 모든 중수소가 즉시 헬륨(${}^4\text{He}$)으로 변환된다고 가정하자. 헬륨 형성을 위한 핵합성(nucleosynthesis)의 시기(corresponding epoch) 또는 시간 t_{nuc} (초 단위)를 계산하시오. [4]

- (T10.4) t_{nuc} 직전의 $X_{n,\text{nuc}}$ 값을 계산하시오. [5]

- (T10.5) 원시 헬륨의 풍부도(primitive Helium abundance) Y_{prim} 는 t_{nuc} 바로 직후에 우주의 총 바리온 질량 중 헬륨에 결합된 부분으로 정의된다. Y_{prim} 의 이론적 추정치를 구하시오. 이 계산을 위해, $m_p \approx m_n$ 및 헬륨의 질량 $m_{\text{He}} \approx 4m_n$ 이라고 가정한다. [3]

- (T10.6) 헬륨의 원시적 풍부도는 측정하기 매우 어렵다. 이는 우주에서 별들이 지속적으로 수소를 헬륨으로 변환하기 때문이다. 은하에서 별들이 얼마나 많은 원소를 가공했는지는 산소(별들에 의해 생성되는 유일한 원소)와 수소의 상대적인 개수 밀도, 즉 은하 내 (O/H)로 나타낸다. 다양한 은하에 대한 (O/H)와 헬륨 풍부도 Y 의 측정치를 아래에 그림으로 나타냈다.



이 그림의 모든 점을 사용하여 다음 질문에 답하십시오.(이 그림은 Summary Answersheet에 재현되어 있음)

- (T10.6a) $(\text{O}/\text{H}) = 1.75 \times 10^{-4}$ 인 청색 밀집 왜소 은하(blue compact dwarf galaxy)의 Y 를 추정하십시오. [2]

- (T10.6b) 위 데이터에 대한 적합한 직선(straight line fit)의 기울기 $dY/d(\text{O}/\text{H})$ 를 구하십시오. [2]

(T10.6c) 위 관측에 기반하여 원시 헬륨 풍부도(primordial Helium abundance) $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ 를 [2] 추정하시오.

(T10.7) Y_{prim} 과 $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ 사이의 편차는 바리온 대 광자 비율(baryon-to-photon ratio) η 를 변경하여 조 [3] 정할 수 있다. η 가 감소할 때, 즉 Summary Answersheet에서 ↓로 표시된 경우, $N_{\text{D}}/N_{\text{n}}(T)$, T_{nuc} ($N_{\text{D}} = N_{\text{n}}$ 일 때), t_{nuc} , $X_{\text{n},\text{nuc}}$, 그리고 Y_{prim} 의 증가(↑) 또는 감소(↓)를 Summary Answersheet에 제공된 상자에 표시하시오.

(T11) 그래프를 통한 별

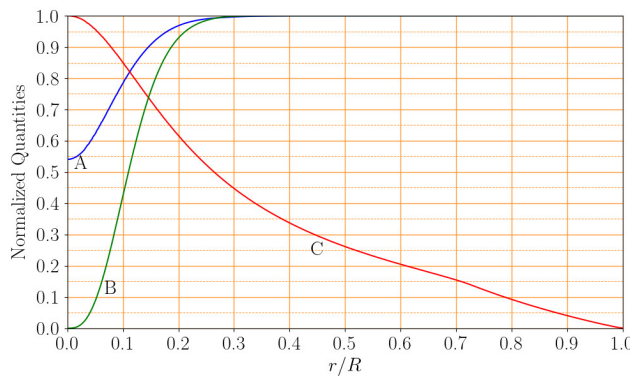
[50점]

별은 구대칭인 물체로 잘 근사될 수 있으며, 따라서 별 내부를 모델링할 때 중심으로부터의 반경 거리 r 을 유일한 독립 변수로 선택할 수 있다. 반경 r 인 구 내에 포함된 질량은 $m(r)$ 으로 나타난다. 광도 $l(r)$ 는 반경 r 인 구면을 통해 단위 시간당 바깥쪽으로 흐르는 순 에너지로 정의된다. 관심 있는 다른 양들, 예를 들어 밀도 $\rho(r)$, 온도 $T(r)$, 수소 질량비 $X(r)$, 헬륨 질량비 $Y(r)$, 그리고 단위 질량당 단위 시간당 생성되는 핵 에너지 $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$ 도 r 의 함수로 간주된다. 이 문제 전반에 걸쳐 우리는 별 내부에서 발생하는 원소들의 확산과 중력 침강 효과를 무시할 것이다.

기호 "log"는 밑이 10인 로그를 나타낸다. 이 문제는 세 개의 독립적인 부분으로 구성되어 있다.

(T11.1) 파트 1: 별 내부

아래 그래프는 질량이 $1 M_{\odot}$ 이고 나이가 4 Gyr인 별 모델에서 별 내부 구조와 관련된 세 물리량 A, B, C의 변화를 분율 반지름 r/R 의 함수로 나타낸 것이다. 여기서 R 은 별의 광구 표면의 반지름을 의미한다. 별의 광구 표면에서의 헬륨 질량비 Y_{s} 와 금속의 질량비(헬륨보다 무거운 모든 원소의 질량 비) Z_{s} 는 $(Y_{\text{s}}, Z_{\text{s}}) = (0.28, 0.02)$ 로 주어진다. 그래프에 표시된 모든 양은 각각의 최댓값으로 정규화되어 있다.



(T11.1a) 다음 다섯 가지 가능성 중에서 세 가지 물리량 A, B, C를 고유하게 식별하시오: [6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Summary Answersheet에서 해당하는 물리량 옆에 A/B/C를 적어 넣으시오. 답변을 정당화하는 설명은 할 필요 없음)

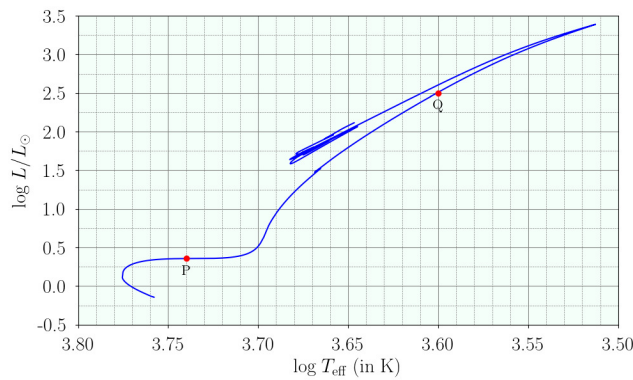
(T11.1b) 별의 중심에서 헬륨의 질량비 Y_{c} 의 값은 얼마인가? [3]

(T11.1c) (T11.1a)에서 다섯 가지 목록 중 A, B, C로 식별되지 않고 남은 나머지 두 물리량을 [5] Summary Answersheet의 동일한 그래프에 r/R 의 함수로 그려놓고 각각에 해당하는 물리량의 라벨을 붙이시오.

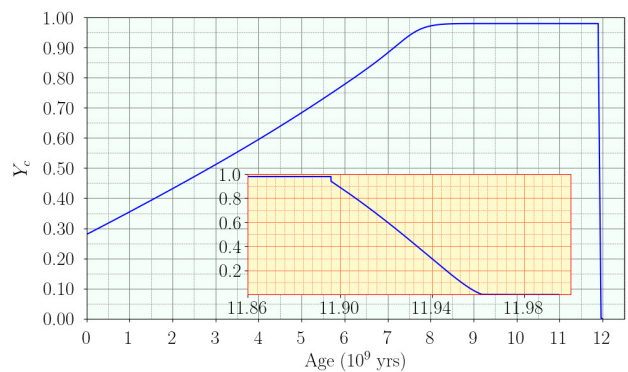
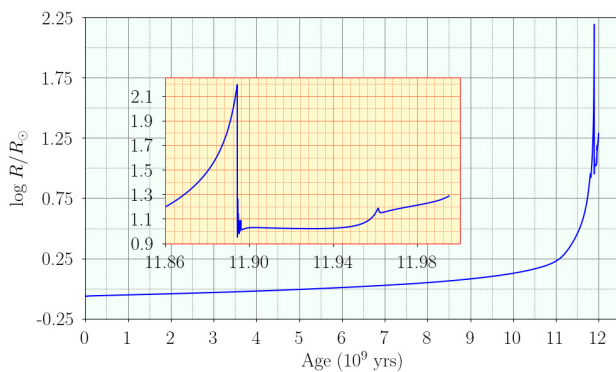
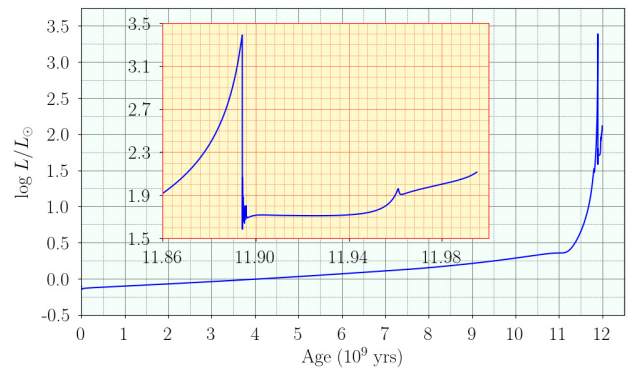
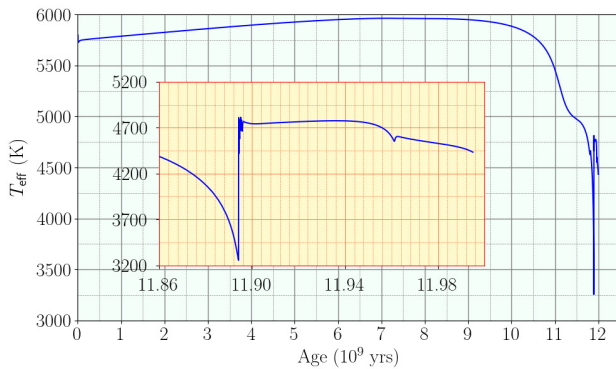
(T11.2) 파트 2: 진화하는 별

초기의 화학 조성이 헬륨의 질량비 $Y_0 = 0.28$ 와 금속의 질량비 $Z_0 = 0.02$ 로 주어진 $1M_{\odot}$ 별의 진화를 생각해 보자. 아래 그림은 이 별이 ZAMS(영년 주계열)에서부터 핵의 헬륨 연소가 끝날 때까지 진화하는 과정에서 다양한 물리량의 변화를 보여준다.

아래 그래프는 HR 다이어그램에서 별의 진화 경로를 보여준다 ($\log L/L_{\odot}$ 대 $\log T_{\text{eff}}$ 의 플롯. 여기서 L 은 표면 광도이고 T_{eff} 는 별표면의 유효 온도이다.).



아래에는 T_{eff} (K 단위), L ($\log L/L_{\odot}$ 로 플롯됨), R ($\log R/R_{\odot}$ 로 플롯됨), 그리고 Y_c (별 중심의 헬륨 질량비)의 변화를 별의 나이 (10^9 단위)의 함수로 보여주는 네 개의 그래프가 있다. 이 네 개의 그래프 각각에 삽입된 작은 그림은 11.86×10^9 년에서부터 12.00×10^9 년까지 구간에서 해당 물리량의 변화를 더 자세하게 보여준다.



이 그래프들을 사용하여 아래 질문에 답하십시오.

(T11.2a) 별의 주계열 수명 t_{MS} (년 단위)은 대략 얼마인가? [1]

(T11.2b) 별이 중심에서 헬륨을 태우는 대략적인 기간 Δt_{He} (년 단위)은 얼마인가? [1]

(T11.2c) 별의 광도가 $1 L_{\odot}$ 일 때, 중심에 있는 초기 수소의 양에서 얼마만큼의 비율(f_{H})이 연소되었는가? [3]

(T11.2d) 중심에 있는 초기 수소의 양 중 60%가 연소되었을 때 별의 반지름 R_1 (단위: $R_{\odot}$)은 얼마인가? [3]

(T11.2e) HR - 도표에 표시된 별의 위치 P와 Q에 해당하는 별의 반지름 R_P 및 R_Q (단위: $R_{\odot}$)은 각각 얼마인가? [4]

(T11.3) 파트 3: 별 내부의 질량 분포

별 내부의 질량 분포를 결정하는 방정식은

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

로 주어진다. 이 방정식을 세 가지 무차원 변수, 즉 분수 질량 q , 분수 반지름 x , 상대 밀도 σ 로 표현하면 편리하다. 이 변수들은 다음과 같이 정의된다:

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

여기서 M 과 R 은 각각 별의 총 질량과 별 표면의 반지름이며, $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ 는 별의 평균 밀도이다. 이 부분에서 우리가 고려할 특정 별에 대한 정보는 다음과 같다.

- 중심 밀도 $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$
- 별의 질량의 절반은 전체 반지름의 25% 이내에 포함되어 있으며, 질량의 70%는 전체 반지름의 35% 이내에 포함되어 있다.

이 질문의 모든 후속 부분에서는 모든 유도된 수치 계수를 0.005 이내로 반올림하는 것으로 충분하다.

(T11.3a) 질량이 반지름에 의존하는 위의 방정식을 x , $\frac{dq(x)}{dx}$ 및 $\sigma(x)$ 로 표현하십시오. [2]

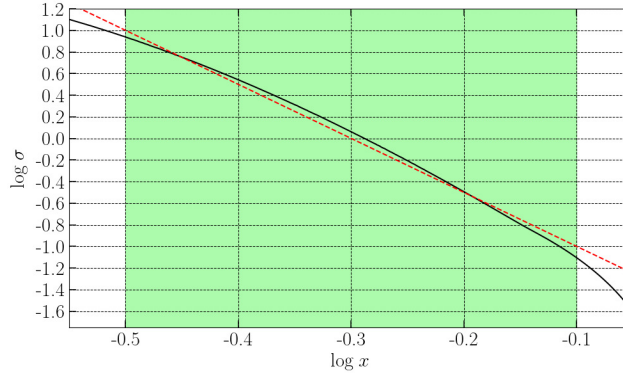
반지름에 따른 질량 분포를 얻기 위해서는 별 내부의 밀도 프로파일을 알아야 한다. 이 문제의 목적을 위해, 우리는 x 의 두 영역에서 반지름에 따른 밀도의 변화를 근사 형태로 설명할 것이다.

- 별의 안쪽 부분: $0 \leq x \leq 0.32$
- 별의 중간 부분: $0.32 < x < 0.80$

가장 바깥쪽 부분, 즉 $0.80 \leq x \leq 1.00$ 에 대해서는 어떠한 근사도 하지 않는다.

(T11.3b) 중간 부분에 대한 근사:

별의 중간 부분에서 $\log \sigma$ 의 변화를 $\log x$ 의 함수로 나타낸 것이 아래 그래프의 검은 곡선으로 표시되어 있다. 우리는 이 그래프에서 $\log \sigma$ 를 $\log x$ 의 함수로 선형 근사(빨간색 점선으로 표시됨)를 할 것이다. 이 영역은 $-0.5 < \log x < -0.1$, 즉 $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (녹색 음영 영역으로 표시됨)이다. 또한, 이 선의 기울기를 가장 가까운 정수값으로 근사할 것이다.



이 근사를 사용하여 $\sigma(x)$ 를 x 의 함수로 $0.32 < x < 0.80$ 영역에서 표현하라. [4]

(T11.3c) (T11.3b)의 결과를 사용하여 $q(x)$ 에 대한 표현식을 $0.32 < x < 0.80$ 영역에서 구하시오. [6]

(T11.3d) 안쪽 부분에 대한 근사:

별의 안쪽 부분($0 \leq x \leq 0.32$)에서 밀도는 반지름의 선형 함수로 근사될 수 있다. [8] 즉, $\sigma(x) = Ax + B$ 이며, 여기서 A, B 는 상수이다. A 와 B 를 구하고, $q(x)$ 에 대한 표현식을 $0 \leq x \leq 0.32$ 영역에서 구하시오. 이전 부분과 이 부분에서 채택한 근사는 $x = 0.32$ 에서 밀도나 질량에 작은 불연속성을 초래할 수 있음에 주의하라.

(T11.3e) (T11.3c)와 (T11.3d)에서 얻은 $q(x)$ 의 표현은 별의 특정 영역에서 반지름에 따른 질량의 변화를 잘 설명하는 근사이다. $0.80 \leq x \leq 1$ 영역(우리가 어떤 표현도 도출하지 않은 영역)에 대해서는 인접 영역으로부터 적절한 외삽을 사용할 수 있다. 이러한 근사 표현과 주어진 데이터를 사용하여 별 전체($0 \leq x \leq 1$)에 대해 $q(x)$ 대 x 의 매끄러운 곡선을 스케치하십시오. 이 곡선은 $q(x)$ 나 그 도함수에 불연속성이 없어야 하며, 반지름에 따른 질량의 변화를 나타냅니다. [4]

(T12) 블랙홀에서의 호킹 복사

[50점]

(T12.1) 블랙홀(BH)은 일반적으로 수명을 다한 무거운 별이 특이점(singularity)이라 불리는 지점으로 중력 붕괴하면서 만들어진다. 이러한 물체의 극단적인 중력으로 인해, 소위 사건의 지평선(특이점으로부터 거리 $r = R_{\text{SC}}$ 인 구형 표면)이라 불리는 곳에 들어간 어떤 것도 빠져나올 수 없다. 여기서 R_{SC} 는 슈바르츠실트 반경이다.

- (T12.1a) **호킹 복사의 기원 모델링하기:** BH 지평선의 양쪽에서 각각 질량 m 을 가진 한 쌍의 입자가 생성되었다고 가정하자. 한 입자는 $r \approx R_{\text{SC}}$ 로 지평선 약간 바깥쪽에 있고, 다른 입자는 $r = \kappa R_{\text{SC}}$ 로 지평선 안쪽에 있다. 한 입자의 총 에너지는 입자의 정지 질량 에너지 mc^2 와 BH에 의한 중력 포텐셜 에너지의 합이라고 가정하자.

입자 쌍의 총 에너지가 0이 되는 κ 의 값을 구하시오.

[4]

- (T12.1b) **블랙홀의 온도:** 위 과정에서 지평선 외부에서 생성된 입자가 충분한 운동 에너지를 가지면, 호킹 복사라고 불리는 과정을 통해 블랙홀에서 탈출할 수 있다. 사건의 지평선 안쪽에 있는 입자는 음(-)의 에너지를 가지는데, 이 입자는 블랙홀에 흡수되어 블랙홀의 질량을 감소시킨다.

모든 호킹 복사가 파장 $\lambda_{\text{bb}} \approx 16R_{\text{SC}}$ 에서 최대치를 갖는 흑체 스펙트럼을 가진 광자로 이루어져 있다고 가정하자. 태양 질량 블랙홀의 경우, $R_{\text{SC}, \odot} = 2.952 \text{ km}$ 로 알려져 있다.

이 흑체 복사에 해당하는 블랙홀의 온도 T_{bh} 를 블랙홀의 질량 M_{bh} 와 물리 상수들로 [4] 표현하는 식을 구하시오. 질량이 $10 M_{\odot}$ 인 블랙홀의 슈바르츠실트 반경 $R_{\text{SC}, 10\odot}$ 과 온도 $T_{\text{bh}, 10\odot}$ 를 계산하시오.

- (T12.1c) **블랙홀의 질량 손실:** 사건의 지평선에서 호킹 복사가 방출된다고 가정하자.

질량-에너지 등가 관계를 사용하여, 질량 손실률 $dM_{\text{bh}}(t)/dt$ 을 BH의 질량 $M_{\text{bh}}(t)$ 과 물리 상수들로 나타내시오.

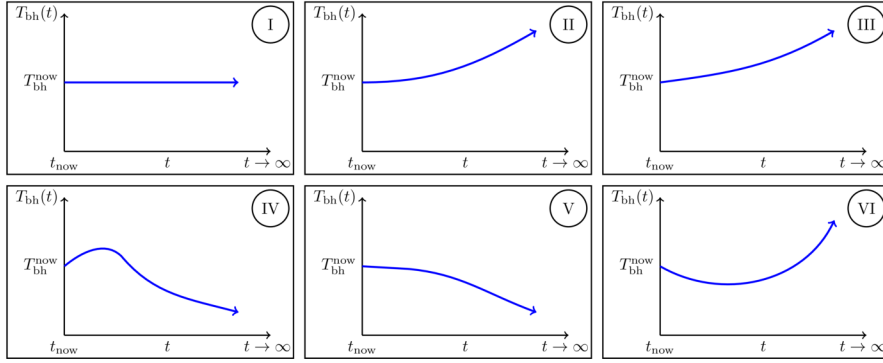
여기서부터, 초기 질량 M_0 인 BH에 대한 $M_{\text{bh}}(t)$ 의 식을 구하시오. $M_{\text{bh}} = M_0$ 에서 $M_{\text{bh}} = 0$ 까지 변하는 동안 t 에 대한 $M_{\text{bh}}(t)$ 변화를 대략적으로 그려보시오. [8]

- (T12.1d) **블랙홀의 수명:** 초기 질량이 M_0 인 블랙홀이 호킹 복사에 의해 완전히 증발하는 수명 τ_{BH} 을 M_0 와 물리 상수들로 나타내시오. $M_0 = 10 M_{\odot}$ 인 블랙홀의 수명 $\tau_{\text{bh}, 10\odot}$ (초 단위)을 계산하시오. [3]

- (T12.1e) **CMB 방사선 욕조 안에 담긴 블랙홀:** 우주에서 다른 천체로부터 멀리 떨어져 있고, 현재 온도가 $T_{\text{bh}}^{\text{now}}$ 인 고립된 블랙홀이 현재 온도가 $T_{\text{cmb}}^{\text{now}} = 2.7 \text{ K}$ 인 우주 마이크로파 배경 복사(CMB)로 둘러싸여 있다고 생각해 보자. 이 블랙홀은 CMB 복사를 흡수하여 질량을 증가시키고 호킹 복사에 의해 질량을 감소시킬 수 있다.

우주의 가속 팽창을 고려할 때, 다음 세 가지 경우의 T_{bh} 의 장기 시간 진화를 나타내는 그림은 아래 그림들 중 어느 그림인지 식별해 보시오:

(X) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} > T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$, (Y) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} = T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$, (Z) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} < T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$.



Summary Answersheet에 주어진 표의 X, Y 또는 Z의 각 경우에 해당하는 그림 번호 [6]를 찾아 각 경우에 해당하는 상자(하나만)에 체크 표시하여 답을 표시하시오.

(T12.2) 아주 초기 우주에서는 질량이 훨씬 작은 원시 블랙홀(PBH)이 형성될 수 있다. 다음 질문은 모두 PBH와 관련된 질문들이다. 여기서는 블랙홀의 질량을 증가시키는 모든 과정은 무시한다.

(T12.2a) **현재 시대(Current epoch)에 증발하는 블랙홀:** 이전 질문에 대한 답변에서 알 수 있듯이, 태양 질량 정도의 블랙홀은 증발하는 데 오랜 시간이 걸린다. 그러나, PBH는 훨씬 더 작은 질량을 가질 수 있기 때문에, 현 시대에도 블랙홀이 증발하는 것을 볼 수도 있다.

현 시대에 완전히 증발하고 있을 수 있는 블랙홀, 즉 수명이 $\tau_{\text{PBH}} = 14$ 억 년인 블랙홀의 초기 질량 M_0, PBH (단위 kg으로), 슈바르츠실드 반지름 $R_{\text{SC, PBH}}$ (단위 m) 및 온도 T_{PBH} (단위 K)를 구하시오. [4]

(T12.2b) **PBH의 생성:** 복사가 지배적이었던 초기 우주에서 척도 인자는 $a(t) \sim t^{1/2}$ 로 변한다. 이 시대에는, 물리적 크기 ct 의 영역에 포함된 모든 에너지가 붕괴되어 PBH가 형성되며, 여기에서 t 는 당시 우주의 나이이다.

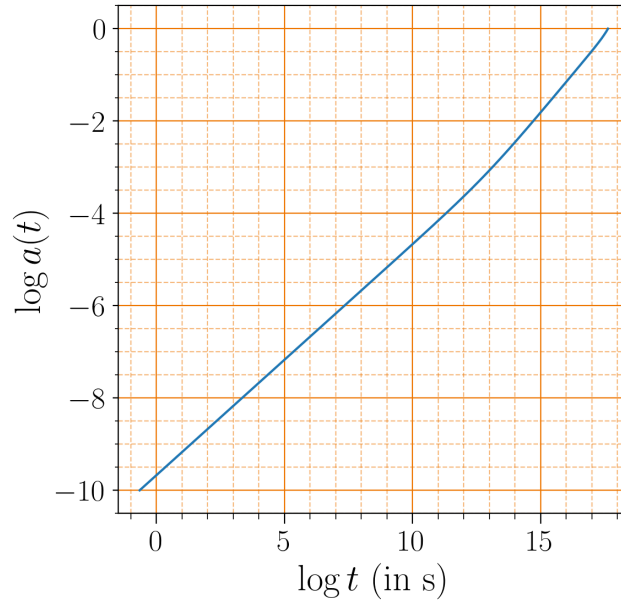
우주의 나이가 약 1×10^{-23} 초 일때, 질량 1×10^{12} kg의 PBH가 형성된다. 질량 1×10^{20} kg의 PBH가 생성될 때의 우주의 나이 t_{20} 를 계산하시오. [6]

(T12.2c) **PBH로부터 관측된 호킹 복사의 스펙트럼:** τ_{PBH} 에 완전히 증발하며 수명을 다 하는 초기 질량 1×10^{10} kg의 PBH를 고려해 보자. 이 소문제에서는 문제를 간단하게 하기 위해, 대부분의 호킹 복사가 초기 질량에 해당하는 온도로 이 시간에 방출된다고 가정하자. 또한, 진화하는 우주의 척도 인자를 $a(t) \sim t^{2/3}$ 로 가정하자.

현 시대 시점(즉 $t = 14$ 억년)에 지구에서 관측되는 이 호킹 복사의 최대 파장 λ_{earth} [5]을 계산하시오.

(T12.2d) **PBH에서 나오는 고에너지 우주 복사:** 이번에는, 주어진 시간 t 에 방출되는 호킹 복사가 에너지 $k_B T_{\text{bh}}(t)$ 로 방출되는 광자에 해당한다고 가정해 보자. 또한 블랙홀의 가능한 최고 온도는 플랑크온도 T_{Planck} 이며, 여기에서 $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV이다.

관련 시간 척도에 따른 척도인자의 진화는 다음 그림에 주어져 있다. 오늘날의 척도인자는 1로 설정되어 있습니다. 시간 축의 $t(s)$ 는 초 단위로 우주의 나이를 나타낸다.



$E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$ eV의 에너지를 가진 광자가 지구에서 관측된다면, 이 광자의 원인이 될 수 있는 PBH의 초기 질량으로 가능한 최대값 M_0^{max} 과 최소값 M_0^{min} 을 결정하시오. **[10]**