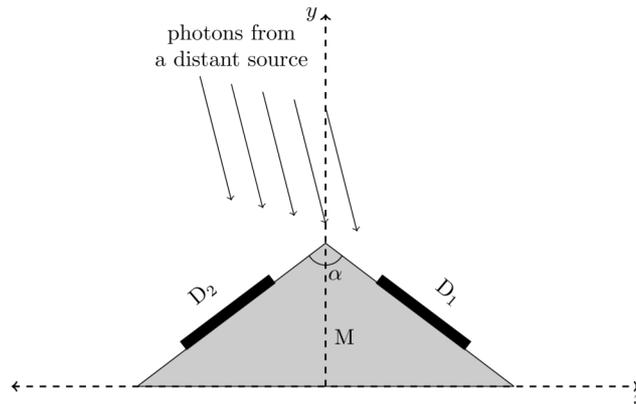


(T01) ダクシャ ミッション

[10 marks]

提案中のインドのミッションである「Daksha」は、2つの衛星 S_1 と S_2 からなり、これらは地球を中心とする半径 $r = 7000$ km の同一円軌道上で常に 180° の角度（位相差）を保ったまま周回する。これらの衛星は、高エネルギー領域（X線および γ 線）で宇宙を観測することを目的としている。「Daksha」のそれぞれの衛星は、いくつかの平らな長方形の検出器を搭載している。

シンプルなモデルを用いて、「Daksha」ミッションにおいて光源の方向を特定する手法を理解してみよう。図のように、衛星 S_1 が、面積 $A = 0.50$ m² の2つの同一の検出器 D_1 、 D_2 によって構成されていると仮定し、それらは不透明な台 M に固定されている。2つの検出器は xy 平面に垂直な方向に、 y 軸に対して対称に固定されており、角度 $\alpha = 120^\circ$ を成している。



- (T01.1) この衛星によって、十分遠方の xy 平面上に位置する一つの光源が観測された。検出器 D_1 はエネルギー $P_1 = 2.70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ を観測し、検出器 D_2 はエネルギー $P_2 = 4.70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ を観測した。

このとき、検出器から見た光源の方向が、 y 軸正方向に対してなす角度 η を求めよ。ただし、角度は反時計回り方向を正とする。 [5]

次に、 xy 平面上にあるとは限らない遠方のある光源から放出された1回のパルス、を、2つの衛星 S_1 、 S_2 で観測することを考える。パルスのピークが衛星 S_1 、 S_2 で観測された時間をそれぞれ t_1 、 t_2 とする。

- (T01.2) いま、到達した時間の差 $t_1 - t_2$ が 10.0 ± 0.1 ms と観測されたとする。ここで、天 [5]
球の中でこの光源の方向としてあり得る領域を考えると、その領域が天球全体で占める面積の割合 f を、天球全体を1として計算せよ。

(T02) マカール・サンクランティ

[10点]

「マカール・サンクランティ」(Makar-Sankranti) は、地球から見て太陽が黄道上のやぎ座 (Capricorn) の領域に入る時期に祝われる、インドの伝統的な祭りである（「Makar」はやぎ座を、「Sankranti」は入ることを意味する）。現在、この祭りは毎年1月14日 前後に祝われているが、かつては北半球における冬至と同じ時期に祝われていたこともあった。この問題では、冬至は毎年12月21日に訪れるとみなしてよい。

- (T02.1) 前の説明をもとに、この祭りと冬至が最後に同時に訪れた年 y_c を西暦で求めよ。 [3]

(T02.2) ムンバイ (Mumbai) における地方時 2006年1月14日 11:50:13 に、太陽が黄道上のやぎ座 (Capricorn) の領域に入ったという。2013年に、同じ事象が起きるのはいつか。領域に入る日付 D_{enter} と地方時 t_{enter} を求めよ。 [3]

(T02.3) この祭りは、太陽がやぎ座 (Capricorn) の領域に入ってから最初の日没時に、決まった場所で行われる。ここで、ムンバイ (Mumbai) の1月の日没時刻は 18:30:00 であることを仮定する。 [4]

このとき、2006年から2013年までの各年において、この祭りが行われる日付を求め、Summary Answersheet の表の当てはまる欄に \checkmark をつけることで示せ。

(T03) 重力波

[15 点]

互いを周回するブラックホール連星は重力波を生成する。銀河系内にある、2つのブラックホールを考える。それぞれの質量は $M = 36 M_{\odot}$ と $m = 29 M_{\odot}$ であり、共通重心のまわりを、軌道角速度 ω で円軌道を描いて公転している。

(T03.1) ニュートン力学に重力が従うと仮定する。2つのブラックホール間の距離が、それぞれのシュワルツシルト半径の和の4.0倍であるとき、時間 t_{ini} におけるブラックホールの軌道の角速度 ω_{ini} を、2つのブラックホールの質量 M 、 m 、および物理定数のみを用いて表せ。

さらに、 ω_{ini} の値を計算せよ (単位は rad s^{-1})。 [5]

(T03.2) 一般相対性理論によれば、軌道上を公転するブラックホールは周波数 f_{GW} の重力波を放射し、ここで公転の角速度を ω とするとき ω の関係がある。重力波を放射することによってブラックホールの軌道が縮小し、結果として周波数 f_{GW} が増加する。 f_{GW} の変化率は

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

であり、ここで $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ は「チャープ質量」と呼ばれる。

このとき、 α 、 β 、 δ を求めよ。 [4]

(T03.3) 時間 $t_{\text{ini}} = 0$ に、ブラックホール連星による重力波が最初に検出された。 [6]

f_{GW} が十分大きい極限をとることで、ブラックホールが合体する時間 t_{merge} を、 ω_{ini} 、 M_{chirp} 、および物理定数のみを用いて表す式を導出せよ。

さらに、 t_{merge} の値を具体的に計算せよ。(時間の単位は秒)

(T04) バルマー減光
[15 marks]

Vバンドの見かけの等級が 11.315 mag である主系列星が星雲に囲まれている。星雲のうち、恒星近傍の電離している領域は波長 $0.6563 \mu\text{m}$ の $\text{H}\alpha$ 線と、波長 $0.4861 \mu\text{m}$ の $\text{H}\beta$ 線を放射している。理論的に計算されるこれらの輝線のフラックスの比は $f_{\text{H}\alpha}/f_{\text{H}\beta} = 2.86$ である。しかし、この放射が冷たくダストを含んだ星雲の外縁を通過することによって、観測される $\text{H}\alpha$ 線と $\text{H}\beta$ 線の輝線フラックスはそれぞれ $6.80 \times 10^{-15} \text{W m}^{-2}$, $1.06 \times 10^{-15} \text{W m}^{-2}$ となった。

一般に、減光量 A_λ は波長に依存し、

$$A_\lambda = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

と表すことができる。ここで、 $\kappa(\lambda)$ は減光曲線であり、 $E(B - V)$ はBバンドとVバンドにおける色超過である。減光曲線 $\kappa(\lambda)$ は具体的に以下のように与えられる（ただし、 λ は μm を単位として表す）：

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

ここで、 $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ は、絶対減光に対する選択減光（基準となる波長での減光と比べて特定の波長における相対的な減光を表す）の比である。

(T04.1) 前の関係を用いて、 $\kappa(\text{H}\alpha)$ と $\kappa(\text{H}\beta)$ の値を計算せよ。 **[3]**

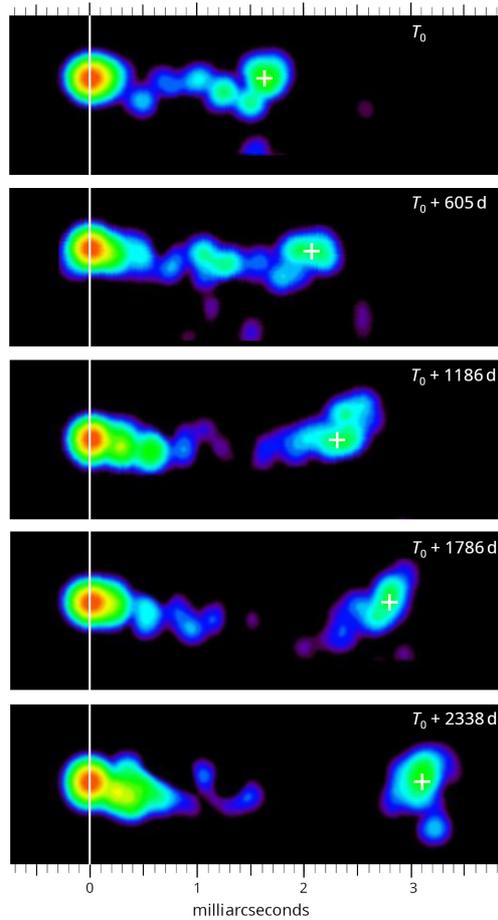
(T04.2) 色超過の比 $\frac{E(\text{H}\beta - \text{H}\alpha)}{E(B - V)}$ を求めよ。 **[4]**

(T04.3) 以上の結果をもとに、 $\text{H}\alpha$ 線と $\text{H}\beta$ 線の波長における、星雲による減光量 $A_{\text{H}\alpha}$ と $A_{\text{H}\beta}$ をそれぞれ計算せよ。 **[6]**

(T04.4) 星雲による減光量 (A_V) を計算し、星雲の影響がない場合のVバンドにおける恒星の見かけの等級 m_{V0} を求めよ。 **[2]**

(T05) クエーサー
[20 marks]

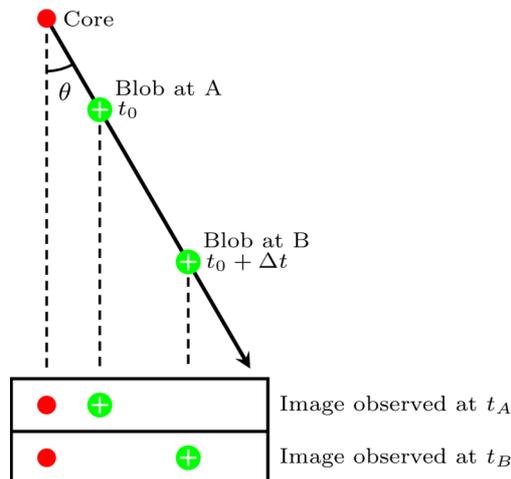
クエーサーは、超巨大質量ブラックホールによって駆動される非常に明るい活動銀河で、相対論的ジェットを放出する。図は、電波によるクエーサーの一連の画像を示している。これらの画像は、クエーサー(赤方偏移 $z = 0.53$ 、光度距離 $D_L = 1.00 \times 10^{10}$ 光年に位置する)を、異なる時刻に観測したものである。核 (core) は、縦の白線に沿って画像を並べており、ジェットは、時間とともに核から離れていく塊 (blob) (白い+で示されている) から成る。各画像には観測時刻 (最初の画像の T_0 から始まる) が示されており、角度スケールの目盛は図の上部と下部に示されている。



(T05.1) 各観測において、塊の分離角 ϕ_{blob} (単位はミリ秒角) と、クエーサー核からの接線方向 (視線方向に垂直な方向) の距離 l_{blob} (単位は光年) を求めよ。その後、隣接する画像を使用して、横方向の見かけの速度 v_{app} を、真空中の光速に対する比率として計算し、 $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ を求めよ。結果として、見かけの速度の平均値 $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ を計算せよ。

クエーサーのジェットは実際には相対論的速度 $v \equiv \beta c$ で移動するが、必ずしも視線方向と同じ方向の移動とは限らない。例えば、以下の図に示されているように、遠方の観測者の視線方向に対して角度 θ (位相角 viewing angle) の傾きを持つ (点線で示されている)。

この問い及びこれより後のすべての問いについては、クエーサーの赤方偏移および相対論的效果を無視する。



(T05.2) 異なる2つの時刻 t_0 (位置Aに対応) と $t_0 + \Delta t$ (位置Bに対応) において塊から放出された光は、それぞれ t_A と t_B のとき、観測者に到達する。したがって、観測された時間差は $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$ である。

(T05.2a) 比 $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ を、 β と θ で表せ。 [2]

(T05.2b) この比を用いることによって、 β_{app} を β と θ で表せ。 [2]

(T05.3) 見かけの速度が光速を超える場合、運動は超光速と呼ばれ、超えない場合は亜光速と呼ばれる (それぞれ $\beta_{\text{app}} > 1$ と $\beta_{\text{app}} < 1$)。

(T05.3a) $\beta_{\text{app}} = 1$ の場合、 θ の関数として β の滑らかな曲線をプロットし、亜光速と超光速の運動の境界を示せ。グラフの超光速領域に斜線 (///) を引け。 [4]

(T05.3b) 超光速運動が発生するための最小の真のジェット速度 ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$) と、対応する方向角 θ_{low} を求めよ。 [2]

(T05.4) 与えられた値 β_{app} に対して可能な最大の位相角 (viewing angle) θ_{max} の表式を求めよ。 [2]

クエーサーの核の部分であるその中心のコンパクトな天体は、因果関係を保持できる領域内で発生する内部プロセスにより、その放射に変動を示す。この領域のサイズ (=半径) は典型的に、核のシュワルツシルト半径の約5倍とされている。

(T05.5) あるクエーサーの核が約1時間の時間スケールで変動することがわかっている。中心のコンパクトな天体の質量の上限 $M_{c, \text{max}}$ を太陽質量を単位として求めよ。 [3]

(T06) 銀河回転

[20 marks]

天の川銀河において、さまざまな銀経方向で中性水素 (HI) ガス雲の視線速度を、波長 21 cm の HI 線を通じて測定することによって、回転曲線を決定することができる。ある HI ガス雲が、銀経 l 、銀河中心 (Galactic Centre; GC) からの距離 R 、太陽からの距離 D に位置している状況を考える。銀河中心から太陽までの距離を $R_0 = 8.5 \text{ kpc}$ とする。太陽と HI ガス雲がそれぞれ、銀河中心を中心とする銀河面内の円軌道上を、角速度 Ω_0, Ω で、速度 V_0, V で公転していると仮定する。

太陽から HI ガス雲を見たときの相対的な視線速度 (V_r) と接線速度 (V_t) が以下のように与えられることを用いてよい。

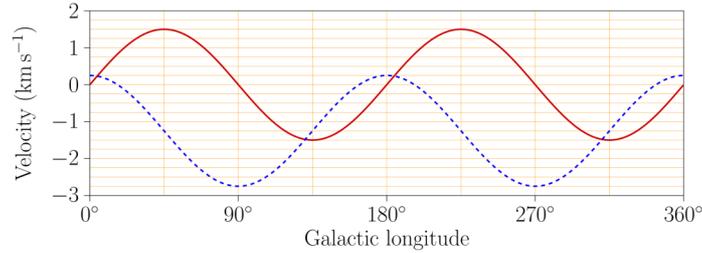
$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

なお、銀河北極から見たとき銀河回転は時計回りであり、この問題を通じて、視線速度は後退する方向を正とするものとし、HI ガス雲は点とみなせるものとする。

(T06.1) HIガス雲の視線速度 V_r を太陽からの距離 D の関数としてプロットするとどうなるはずであるか、(i) $l = 45^\circ$ と (ii) $l = 135^\circ$ の場合のそれぞれについて、 $D = 0$ から $D = 2R_0$ までの範囲で Summary Answersheet 内のグラフ上にスケッチせよ。それぞれの線がどちらの l の値に対応するかを明確に示すこと。 [5]

(T06.2) 次のグラフは、太陽から 100 pc の距離にある恒星について、視線速度 V_r の平均値（赤実線）と接線速度 V_t の平均値（青点線）を銀経 l の関数としてプロットしたものである。



グラフを読み取ることで、太陽が銀河中心の周りを公転する周期 (P) を、100万年 [3] (Myr) を単位として求めよ。

(T06.3) ヤン・オールドは、太陽近傍 ($D \ll R_0$) においては銀河回転の角速度の差 ($\Omega - \Omega_0$) が小さいため、これを一次近似することによって、視線速度と接線速度のそれぞれを以下のように表せることを見出した：

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

ここで、定数 A, B はオールド定数として知られている。

回転曲線として、特に以下の2つのパターンを考える：

- (I) 実際の銀河系と同じ特徴を持った回転曲線
- (II) 銀河系の全質量が中心に集中している（つまり、ダークマターがない）場合の仮想的な回転曲線

(T06.3a) 2つの場合(I), (II)のそれぞれについて、太陽の位置における回転速度の半径方向の微分係数 $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ の表式を求めよ。 [2]

(T06.3b) オールド定数 A と B それぞれを、 V_0, R_0 、および太陽の位置における回転速度の半径方向の微分係数 $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ のみを用いて表せ。 [8]

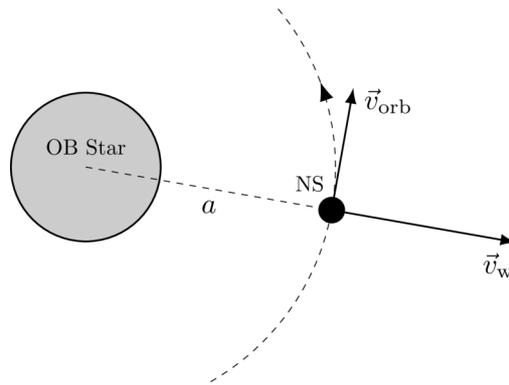
(T06.3c) 2つの場合(I), (II)のそれぞれにおける、オールド定数の比 (A/B) をそれぞれ F_I, F_{II} とする。 F_I, F_{II} をそれぞれ求めよ。 [2]

(T07) 中性子星連星

[20 marks]

コンパクト星を含む連星系において、特に伴星のロッシュ・ローブからのガスのあふれ出しがない場合を考えると、主に伴星からの恒星風がコンパクト星に降着することになる。このような恒星風主体の降着は、早期型星（O型やB型、以下OB）とコンパクト星（例えば中性子星（Neutron Star）、以下NS）が接近した軌道で公転している連星系で顕著に見られる。

そのようなNS-OB連星系を考えてみよう。図のように、質量 $M_{NS} = 2.0 M_{\odot}$ 、半径 $R_{NS} = 11 \text{ km}$ の中性子星が、OB星を中心とする半径 a の円軌道を描いて公転しており、公転速度は $v_{\text{orb}} = 1.5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ である。この問題を通じて、OB星からの恒星風に伴う質量流出が球対称であることを仮定し、その質量流出の速度は $\dot{M}_{\text{OB}} = 1.0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ と与えられる。



- (T07.1) 中性子星の降着半径 R_{acc} は、OB星からの恒星風が中性子星に捕らえられる最大の半径として定義される。 [3]

中性子星の公転軌道上におけるOB星からの恒星風の速度を $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ とするとき、一般的な脱出速度の計算をする際と同様の仮定をすることによって、降着半径 R_{acc} を求めよ。

- (T07.2) 前問で求めた降着半径内に入った物質すべてが、中性子星表面に降着することを仮定する。公転半径 $a = 0.5 \text{ au}$ とするとき、恒星風から中性子星表面への質量降着率 \dot{M}_{acc} を、 $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ を単位として推定せよ。ただし、放射圧の影響や降着ガスの有限の冷却時間は無視できるものとする。 [3]

- (T07.3) ここでは、中性子星の公転速度が、公転軌道上における恒星風の速度に比べて無視できないほど大きい状況を考える。このとき、恒星風から中性子星への質量降着率は $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} \times f(\tan \beta, q)$ の形で与えられる。ここで $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$ は中性子星とOB星の質量の比であり、 β は中性子星を基準とする系で見たときの恒星風の速度ベクトルとOB星から中性子星に向かう方向ベクトルがなす角度である。関数 $f(\tan \beta, q)$ の表式を求めよ。ただし、 $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$ を仮定する。 [6]

- (T07.4) 完全に電離した物質が、中性子星の中心に向かって降着している状況を考える。このとき、中性子星による強い磁場 \vec{B} によって降着は妨げられることになる。この効果は、磁場によって大きさ $\frac{B^2}{2\mu_0}$ の圧力が生じているものとみなすことができる。いま、中性子星による磁場を磁気双極子とみなすこととすると、中性子星の赤道面における磁場の強度は、中心からの距離 r の関数として、 $r \gg R_{\text{NS}}$ の領域においては

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

と表せる。ここで、 B_0 は中性子星の赤道面上における磁場の強度であり、磁気双極子の軸は中性子星の自転軸と一致しているものとする。

- (T07.4a) 中性子星の赤道面における磁場による圧力 $P_{\text{eq, mag}}$ を、 B_0, R_{NS}, r およびその他の必要な定数を用いて表せ。 [1]

- (T07.4b) 降着ガスの流れが磁場によって妨げられて止まりうる最大の半径を、磁気圏半径 R_m と呼ぶ。中性子星に対して恒星風が相対速度を持っているために、降着ガスの流れは磁気圏に対して圧力をかけることになる。 [7]

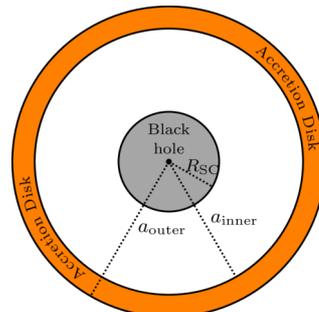
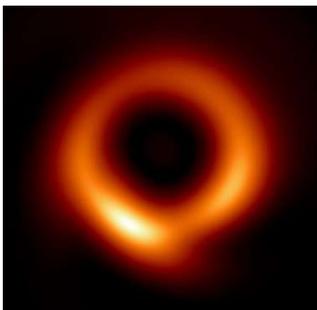
磁気圏半径 R_m が降着半径 R_{acc} にちょうど一致するときの磁場強度 B_0 の値を、臨界磁場強度 $B_{0,c}$ とする。臨界磁場強度 $B_{0,c}$ の表式を求め、前問までの仮定を代入することによってその具体的な数値をテスラ [T] を単位として計算せよ。ただし、 $r > R_m$ の領域における磁場の影響は無視できるものとし、 $v_w \gg v_{\text{orb}}$ を仮定せよ。

(T08) ブラックホールの影

[20点]

イベントホライズン・テレスコープ (EHT) は、M87銀河の中心に位置する超巨大質量ブラックホールの画像を公開した。これは下の図の左側に示されている。

この画像のいくつかの簡単な特徴を理解するために、簡略化したモデルとして、質量 $M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$ を持った、回転していない静的で球対称なブラックホールを考える。このブラックホールは質量を無視できる薄い平面状の降着円盤に囲まれ、降着円盤の内側の半径と外側の半径はそれぞれ $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ および $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$ である。ここで R_{SC} はシュワルツシルト半径である。下の図の右側はこれら全体を円盤の上側から見たスケッチである（縮尺は正しい比率ではない）。



降着円盤が、ここでの唯一の光源であると仮定する。円盤上のすべての点はあらゆる方向に光を放射する。この光はブラックホールの重力場の影響を受けて進む。この経路上の光について、以下の2つの方程式が成り立つ（太陽の周りを回る天体と似ている）：

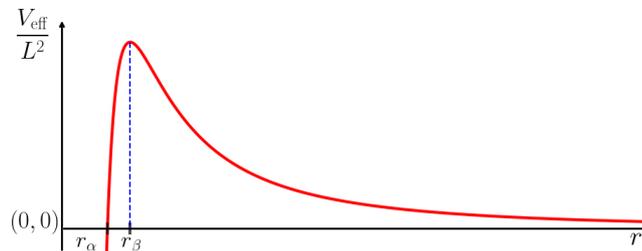
$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

ここで、ブラックホールを中心とする極座標において、 $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ は動径座標、 $\phi \in [0, 2\pi)$ は方位角である。力学的エネルギー E と角運動量 L は光の経路上で保存される定数であり、さらに $v_r \equiv dr/dt$, v_ϕ はそれぞれ動径方向と接線方向の速度、 $\omega \equiv d\phi/dt$ は角速度を表す。軌道の衝突径数（インパクト・パラメータ） b を $b = L/\sqrt{2E}$ と定義する。この問題では時間の遅れを無視する。

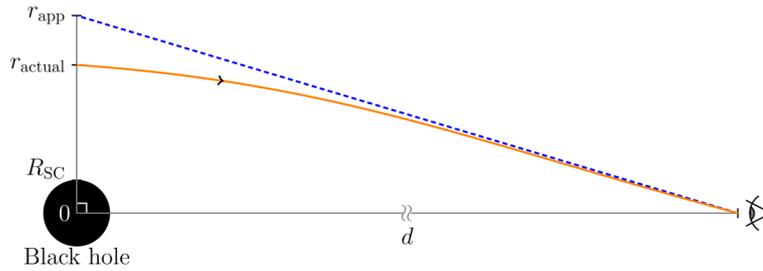
もう一つの有用な方程式は、最初の方程式を微分することによって得られる：

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

- (T08.1) ブラックホールの周りには、光が安定して回る軌道（光子球）が存在できる。そのような軌道の半径 r_{ph} および衝突径数 b_{ph} を、 M および関連する定数を用いて表せ。 **[4]**
- (T08.2) 円形の光子の軌道を一周するのにかかる時間 T_{ph} を計算し、秒の単位で求めよ。 **[2]**
- (T08.3) 前述の動径速度に関する方程式（この問題で最初に示したもの）を、光の軌道に対する方程式 $\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ と比較することにより、重力の影響により生じるポテンシャル V_{eff} の表式を決定できる。 V_{eff}/L^2 を r の関数として示すと、以下のようになる。



- (T08.3a) 上図の中で印をつけて示した r_α と r_β の表式を、 M と関連する定数を用いて表せ。 **[2]**
- (T08.3b) 降着円盤からブラックホールに向かって内側に放射された光子も、場合によっては無限遠に脱出することができる。前の議論を参考にしながら、そのような光子が外向きに転回する点の半径の最小値 r_t の表式を、 M と関連する定数を用いて求めよ。さらに、この光子に対する衝突径数の最小値 b_{min} の表式を求めよ。 **[3]**
- (T08.4) 下図のように、ブラックホールの中心から半径 r_{actual} の場所から放射された光が、ブラックホールの重力によって強く曲げられ、最終的に距離 d に位置する遠く離れた観測者に到達する状況を考える。

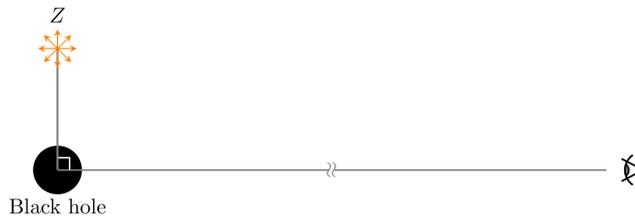


この観測者にとって、届いた光は、ブラックホールの中心から距離 $r_{app} \approx b$ の点から放射されたように見える。ここで b はその光子の軌道の衝突径数である。もし放射された点 $r = r_{actual}$ が降着円盤上に位置しているならば、光子の衝突径数 b は r_{actual} の関数として以下のように表せる： [5]

$$b(r_{actual}) \approx r_{actual} \left(1 + R_{SC}/r_{actual}\right)^{1/2}$$

私たちのような遠くの観測者にとって、降着円盤を正面から見ると、円形に対称な像として見えるだろう。このとき、観測される像の最も外側の見かけの半径 r_{outer} と最も内側の見かけの半径 r_{inner} を、それぞれ天文単位 au の単位で求めよ。

- (T08.5) 降着円盤のない質量 $M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$ の孤立した超巨大質量ブラックホールを考える。下図のように、ブラックホールからの距離が $r_Z = 6R_{SC}$ の点 Z で、5秒間の強い電磁放射の短いバーストが発生することを考える。点 Z でのバーストは全方向に光を放射する。ブラックホールから遠く離れた点にいる観測者（下の図で目で示されている）は、ブラックホール周辺の領域を 60秒間露光して撮影する。



次の各文に対して正しい選択肢を選べ：

- (T08.5a) 光が Z から観測者に到達するための可能な経路の数は [2]
 (A) 最大でも1つ (B) ちょうど1つ (C) ちょうど2つ (D) 3つ以上
- (T08.5b) Z での電磁バーストの長時間露光画像に見られる画像の数は [2]
 (A) 最大でも1つ (B) ちょうど1つ (C) ちょうど2つ (D) 3つ以上

(T09) 大気のシーイング

[35 marks]

直径 $D = 15 \text{ cm}$ 、焦点距離 $f = 200 \text{ cm}$ のアクロマート凸レンズを対物レンズとする望遠鏡が、天頂方向の星に向けられている。

- (T09.1) 回折の影響のみを考慮するとき、この対物レンズを用いて点光源を波長 $\lambda = 550 \text{ nm}$ の緑色の光で観測した際に焦点にできる像の直径 d_{image} を m を単位として求めよ。 [1]

回折の他にも、天体の像は「大気のシーイング」と呼ばれる現象にも影響される。

なお実際には、大気各層の境界や各層での屈折率は擾乱や気温の変化などの要因によって連続的に変化する。こうした変化は望遠鏡の焦点面上での像の位置をわずかに変化させ、これは「またたき」(twinkling effect)として知られている。以降の議論においては、回折限界のために像が有限の大きさを持つことを除いて、その他の干渉要因は無視するものとする。

以下の2つの図のうち左の図は、複数の層で構成される大気の垂直断面図を表し、各層の屈折率は異なっている (n_1, n_2, n_3, \dots)。右の図は、ある細い柱状の領域を切り取って拡大したものであり、屈折率 n_1 の最下層と屈折率 n_2 の一段上の層のみに注目している (ただし $n_1 > n_2$)。この問題を通じて、これらの2層の間での屈折のみを考えることとする。ただし、図の縮尺は実際を反映していない。

- (T09.2) ここで、2層の境界が望遠鏡の対物レンズの直上、高さ $H = 1 \text{ km}$ に位置している状況を考え、水平面に対する境界面の傾きを $\theta = 30^\circ$ としよう。なお、これ以降のすべての問題について、上図と同様に θ は反時計回りを正としてとるものとする。

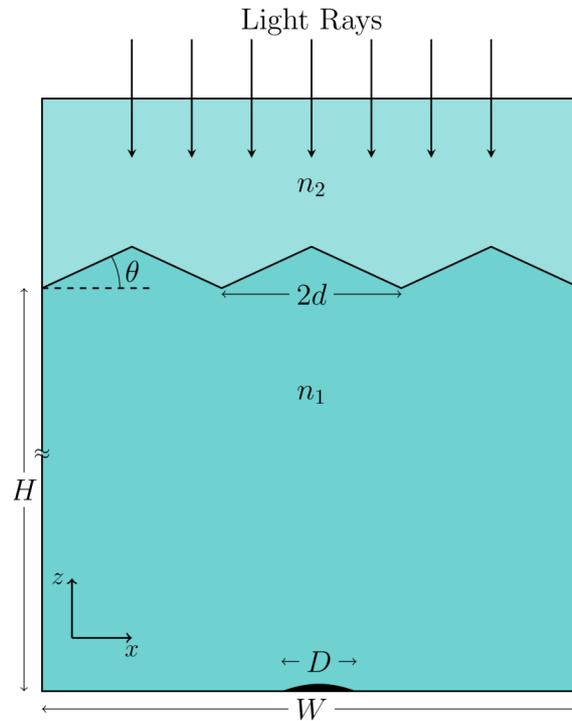
ある単色の光源に対して、それぞれの屈折率は $n_1 = 1.00027, n_2 = 1.00026$ と与えられる。ちょうど天頂方向にある恒星を観測したとき、この境界面での屈折によって、望遠鏡の焦点面での像の位置が角度 α の分だけずれた。

- (T09.2a) 天頂方向の恒星から入射した光について、2層の境界面における光路図を描け。ただし、図の中で角度 θ, α と屈折率 n_1, n_2 がそれぞれどこに対応するかを明示すること。 [2]
- (T09.2b) ずれの角度 α を、 θ, n_1, n_2 を用いて表せ。ただし、 α は十分小さいとみなし、 $\sin \alpha \approx \alpha$ および $\cos \alpha \approx 1$ と近似せよ。 [2]
- (T09.2c) 同じ状況から、 n_1, n_2 を固定したまま θ だけを1%増加させたときの、像の位置の x 座標の変化 Δx_θ を m を単位として求めよ。 [3]
- (T09.2d) 同じ状況から、 n_1, θ を固定したまま n_2 だけを0.0001%増加させたときの、像の位置の x 座標の変化 Δx_n を m を単位として求めよ。 [3]
- (T09.3) 天頂方向の恒星から入射する白色光について、できる像の形と色を最もよく表す選択肢は以下のうちどれか。適切な選択肢を一つ選び、回答用紙 (Summary Answersheet) において対応する欄に \checkmark をつけなさい。ただし、左 (右) とは x 軸の負方向 (正方向) を意味する。 [2]

	像の色	像の形	左端	右端
A	白	円形		
B	白	楕円		
C	色がつく	円形	青	赤
D	色がつく	円形	赤	青
E	色がつく	楕円	青	赤
F	色がつく	楕円	赤	青

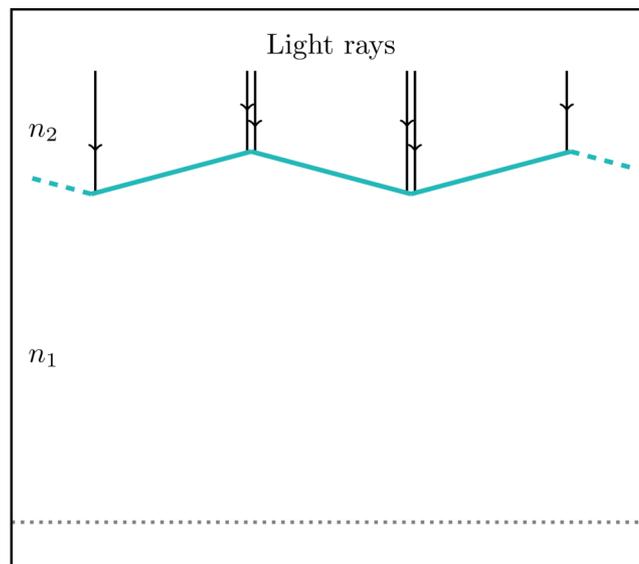
これ以降のすべての問題において、波長 $\lambda = 550 \text{ nm}$ の緑色の単色光が入射する場合を考える。下図のように、境界面としてジグザグに無限遠まで連なる平面からなるものを考えることとする。これらの平面はすべて紙面に垂直であり、 x 軸に沿ってそれぞれ $d = 10 \text{ cm}$ の間隔で、水平面に対して角度 $\theta = 10^\circ$ または $\theta = -10^\circ$ をなして並んでいる。

下に示したこのモデルの断面図（縮尺は正しくない）において、大気の層は幅 W ($W \ll H$) を持っている。開口径が十分大きい望遠鏡の場合、境界面のジグザグな形状のために、焦点面における像にスペckルと呼ばれる模様が生じる。



(T09.4) 上のような大気モデルを仮定するとき、

(T09.4a) 下図には、連続したジグザグの大気モデルが同様に描かれている。ただし、図の縮尺は実際とは異なる。



これと同じ回答用紙 (Summary Answersheet) 内の図において、入射したそれぞれの光が進む経路を、望遠鏡の対物レンズが位置する高さの平面 (グレーの点線) に到達するまで描け。

グレーの点線で光が全く到達しない領域があれば、その領域を太くなぞり「X」と記せ。

(T09.4b) 光が全く到達しない領域の幅 W_X を求めよ。 [3]

(T09.4c) 同じ恒星に対して望遠鏡がちょうど一つの像を結ぶとき、可能な最大の対物レンズの直径 D_{\max} を求めよ。ただし、望遠鏡は大気ジグザグ構造に対して最適な位置に設置することができるものとする。 [4]

(T09.5) 今度は、同様のジグザグ構造が x 方向と y 方向の両方に存在している場合 (つまり、ピラミッドが並んでいるような境界面の構造) を考える。このとき $D = 100 \text{ cm}$ で、 $f = 200 \text{ cm}$ である。 [6]

この際に生じるスペckルの模様の定性的なスケッチを、回答用紙 (Summary Answersheet) の欄内に描け。

(T09.6) 今度は、ゆらいでいる大気を考える。再び、 x 軸方向のみにジグザグした平行な境界面を考えることとし、しかし今度は2つの面の間の角度が時間とともに、 10° から -10° まで 1.0 s かけて一定の速度で変化しているとする。これによって、像の位置も一定の速度で変化しているとみなして良い。 [5]

ここで、口径 $D = 8 \text{ cm}$ 、焦点距離 $f = 1 \text{ m}$ の望遠鏡を考える。ちょうど1つの像が写り、像の位置のずれが回折限界で決まる像の大きさの1%以下となるために、CCDカメラの露光時間として許容される最大の露光時間 t_{\max} を推定せよ。

(T10) ビッグバン元素合成 **[35点]**

初期宇宙の放射優勢期において、宇宙のスケール因子は $a \propto t^{1/2}$ であり、ここで t はビッグバンからの経過時間である。この時代の初期には、中性子 (n) と陽子 (p) は弱い相互作用を通じて熱平衡を保っている。自由な中性子または陽子の数密度 (N) は、温度 T とそれぞれの粒子の質量 m に関連し、

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

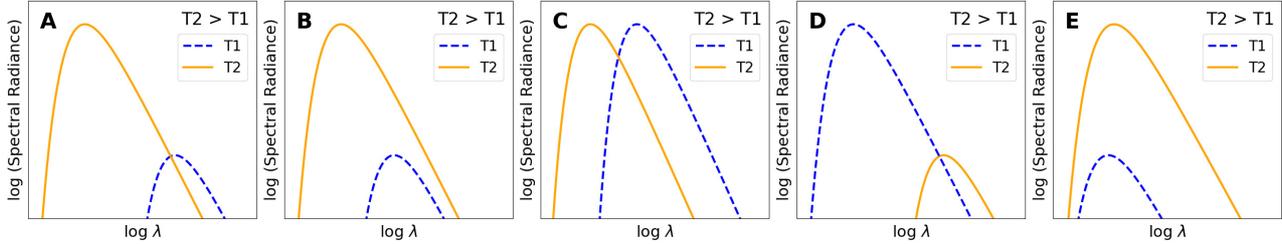
のようになる。これは $t_{\text{wk}} = 1.70 \text{ s}$ の時点まで続き、この時の温度は $k_B T_{\text{wk}} = 800 \text{ keV}$ に相当する。 t_{wk} 以降、弱い相互作用はそれまでの平衡状態を維持できなくなり、自由な中性子は半減期 610.4 s で陽子へ崩壊する。

(T10.1) 陽子の数密度を N_p 、中性子の数密度を N_n とする。時刻 t_{wk} における中性子の数密度比 $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ を計算せよ。 [4]

(T10.2) 光子はすべての時代において熱平衡を維持し、黒体スペクトルを保持する。

(T10.2a) $T(a) \propto a^\beta$ となる指数 β を求めよ。 [2]

(T10.2b) 次のグラフのうち、2つの温度 T_1 と T_2 に対するエネルギー密度のスペクトルとして正しいふるまいを示しているものを特定し、Summary Answersheetで正しい選択肢にチェックマーク(✓)を付けよ。 [2]



(T10.3) t_{wk} の後、陽子と中性子から重水素が形成される過程は、インドの物理学者メグナード・サハ教授によって与えられたサハ方程式によって支配され、この方程式は次のように簡略化できる。

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

ここで、バリオン（陽子や中性子など、3つのクォークから成る粒子）数と光子数の比 η は 6.1×10^{-10} であり、 N_D は重水素の数密度である。

(T10.3a) Summary Answersheetの方眼紙に、温度が $k_B T = [60, 70]$ keV の範囲にあり、適切に間隔を開けた少なくとも4つの温度値に対して、比 N_D/N_n をプロットし、これらの点を通る滑らかな曲線を描け。 [5]

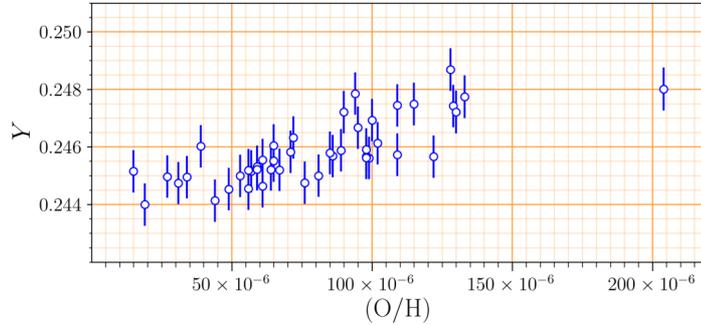
(T10.3b) 上記のプロットから、 $N_D = N_n$ となる $k_B T_{\text{nuc}}$ (keV単位) を見つけよ。 [1]

(T10.3c) 今、すべての自由な中性子が $k_B T_{\text{nuc}}$ で陽子と瞬時に結合して重水素を形成し、それがすべて即座にヘリウム (${}^4_2\text{He}$) へ合成されると仮定する。ヘリウム合成の時期の宇宙年齢 t_{nuc} (秒単位) を計算して求めよ。 [4]

(T10.4) t_{nuc} の直前における $X_{n, \text{nuc}}$ の値を計算せよ。 [5]

(T10.5) 原始ヘリウムの存在量 Y_{prim} は、 t_{nuc} 直後に宇宙の総質量のうちヘリウムに含まれている質量の割合として定義される。 Y_{prim} の理論的な推定値を求めよ。この計算に限っては、 $m_p \approx m_n$ とし、ヘリウムの質量が $m_{\text{He}} \approx 4m_n$ であると仮定する。 [3]

(T10.6) ヘリウムの原始存在量を測定することは非常に難しい。なぜなら、宇宙初期の元素合成でヘリウムを作るだけでなく、宇宙では恒星が水素からヘリウムを合成し続けているから。銀河内の恒星による合成の量は、銀河内の水素に対する酸素（酸素は恒星によってのみ生成される）の相対数密度、すなわち (O/H) で特徴付けられる。さまざまな銀河における (O/H) とヘリウム存在量 Y の測定結果をプロットしたものが下図である。



このプロット (Summary Answersheetに掲載されている) のすべてのデータ点を使用して、以下の質問に答えよ。

(T10.6a) $(O/H)=1.75 \times 10^{-4}$ の値を持つ青色コンパクト矮小銀河の Y を推定せよ。 [2]

(T10.6b) 上記のデータを直線でフィットし、その傾き $dY/d(O/H)$ を求めよ。 [2]

(T10.6c) 上記の観測結果に基づいて、宇宙初期の原始ヘリウム存在量 $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ を推定せよ。 [2]

(T10.7) Y_{prim} と $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ の間の差は、バリオン数と光子数の比 η を変更することで調整できる。 [3]
いま仮に、 η が減少する場合を考えると (Summary Answersheetで示されている通り)、 $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} ($N_D = N_n$ のとき), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$ および Y_{prim} はそれぞれ増加 (\uparrow) するか、あるいは減少 (\downarrow) するか。Summary Answersheetの欄に矢印で示せ。

(T11) グラフを通じて見る恒星

[50 marks]

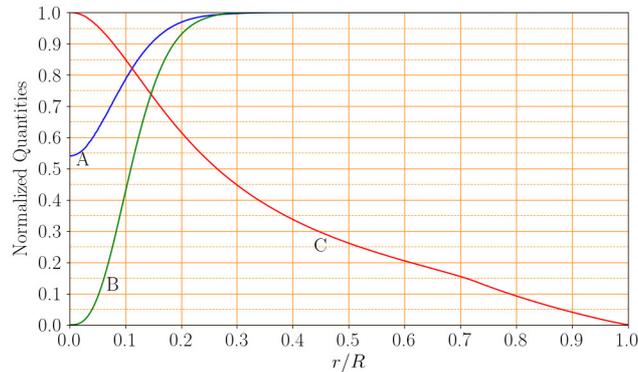
恒星は球対称な天体として精度良く近似することができ、それゆえ恒星内部のモデルとしては半径 r を唯一の独立変数として選ぶことができる。半径 r の球面より内側にある質量を $m(r)$ 、半径 r の球面を単位時間に外向きに通過する正味のエネルギー（光度）を $l(r)$ とする。その他の物理量、密度 $\rho(r)$ 、温度 $T(r)$ 、水素の質量割合 $X(r)$ 、ヘリウムの質量割合 $Y(r)$ 、単位時間単位質量あたりに核融合により生成されるエネルギー量 $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$ はすべて半径 r の関数とみなす。この問題を通じて、拡散の影響と重力による恒星内部への元素の落ち込みの影響は無視できるものとする。

なお、 \log は 10 を底とする対数である。

出題は、3 つの独立な問題から成る。

(T11.1) 恒星の内部

以下のグラフは、質量 $1 M_{\odot}$ 、年齢 4 Gyr の恒星を仮定して計算された、構造において重要な3つの物理量A,B,Cを、相対半径 r/R の関数として示したものである。ここで R は恒星の光球の半径である。恒星表面におけるヘリウムの質量割合 Y_s と、恒星表面における金属量（ヘリウムより重いすべての元素の質量割合） Z_s は $(Y_s, Z_s) = (0.28, 0.02)$ として与えられている。グラフにおいて、それぞれの物理量は「最大値」が1となるように規格化されている。



(T11.1a) 3つの物理量A,B,Cを以下の5つの選択肢のうちからそれぞれ選べ。

[6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(回答用紙の当てはまる欄に A,B,C のいずれかを記入せよ。この問題について説明は不要。)

(T11.1b) この恒星の中心におけるヘリウムの質量割合はいくらか。

[3]

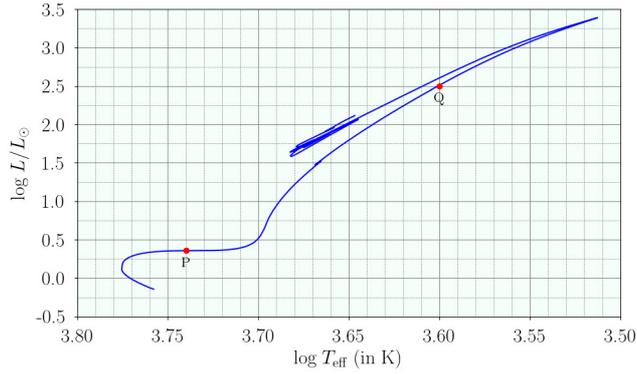
(T11.1c) (T11.1a)の選択肢のうち選ばれていない2つの物理量について、相対半径 r/R の関数として Summary Answersheet の同じグラフ上にプロットせよ。それぞれが何を指しているかがわかるようにすること。

[5]

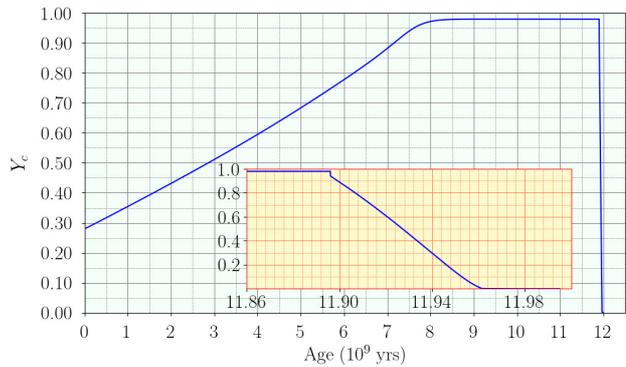
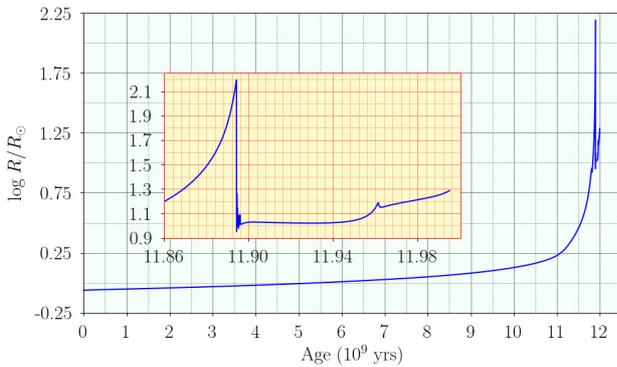
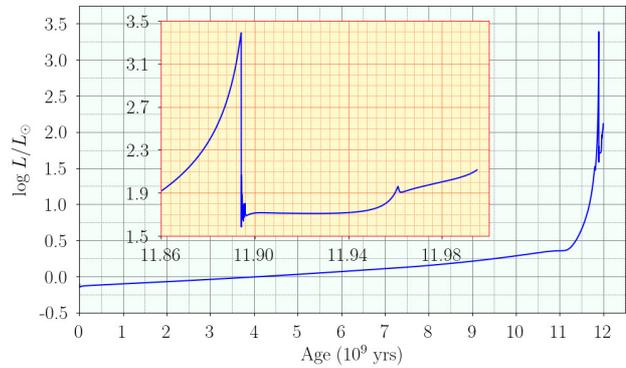
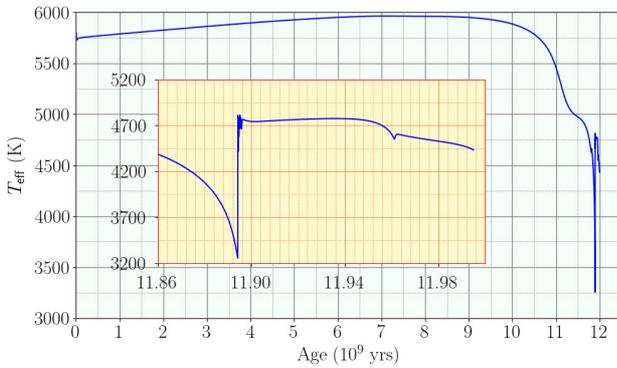
(T11.2) 進化する恒星

質量 $1 M_{\odot}$ の恒星の進化を考える。はじめの状態において、この恒星のヘリウムの質量割合は $Y_0 = 0.28$ 、金属量は $Z_0 = 0.02$ で均一であると仮定する。以降の図は、恒星全体を特徴づけるさまざまな物理量の時間変化を、ZAMS (Zero Age Main Sequence; 誕生直後の主系列星) の状態から中心核でのヘリウム燃焼の終了時点まで示したものである。

まず、下のグラフは、恒星の進化における HR 図上の位置（すなわち、表面光度 $\log L/L_{\odot}$ と有効温度 $\log T_{\text{eff}}$ ）の軌跡を示している。



次に、以下の4つのグラフは、横軸を恒星の年齢（単位： 10^9 yr）として、縦軸に有効温度 T_{eff} (単位：K), 表面光度 $\log L/L_{\odot}$, 半径 $\log R/R_{\odot}$, 中心核におけるヘリウムの質量割合 Y_c をとったものである。それぞれのグラフにおいて、 11.86×10^9 yr から 12.00×10^9 yr までの期間の時間変化が拡大されて挿入されている。



これらのグラフを用いて、以下の問題に回答せよ。

- (T11.2a) この恒星の主系列星としての寿命 t_{MS} は概ねいくらか？ 年を単位として答えよ。 [1]
- (T11.2b) この恒星がその中心核でヘリウムを燃焼するのにかけた時間 Δt_{He} は概ねいくらか。 年を単位として答えよ。 [1]
- (T11.2c) この恒星の光度がちょうど $1L_{\odot}$ となった時点までに、恒星の中心で燃焼した水素の割合 f_{H} はいくらか。 [3]

(T11.2d) この恒星の中心において、誕生時の水素のうちちょうど 60% が燃焼した時点における恒星半径 R_1 はいくらか。 R_\odot を単位として答えよ。 [3]

(T11.2e) HR図上で示した点P, Qに対応する時点における恒星の半径 R_P, R_Q はそれぞれいくらか。 R_\odot を単位として答えよ。 [4]

(T11.3) 恒星内部の質量分布

恒星内部の質量分布は、方程式

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

によって決定される。この方程式を、3つの無次元量（相対質量 q 、相対半径 x 、相対密度 σ ）で表すと便利であり、これらは

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

によって定義される。ここで M と R はそれぞれ恒星全体の質量と半径であり、 $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ は恒星の平均密度である。さらに、ここで考える恒星については以下のことを仮定する：

- 恒星中心の密度 $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$
- 恒星全体の質量の半分は $r < 0.25R$ の領域にあり、質量の 70% は $r < 0.35R$ の領域にある。

なお、これ以降の全ての問題について、すべての計算結果は 0.005 以内の範囲で丸めて構わない。

(T11.3a) 前述の質量分布を表す方程式を $x, \frac{dq(x)}{dx}, \sigma(x)$ を用いて書き直せ。 [2]

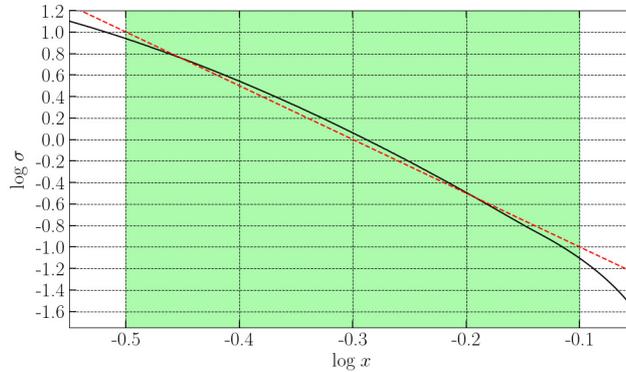
恒星の半径方向の質量分布を求めるためには、恒星内部の密度分布を得る必要がある。この問題においては、半径ごとの密度の違いを表現するため、恒星の以下の2つの領域について、別々の近似を適用することを考える：

- 恒星の内部領域 (inner part) : $0 \leq x \leq 0.32$
- 恒星の中間領域 (middle part) : $0.32 < x < 0.80$

なお、恒星の外部領域 ($0.80 \leq x \leq 1.00$) については近似を適用しない。

(T11.3b) 中間領域に対する近似：

以下のグラフには、相対半径 $\log x$ に対する相対密度 $\log \sigma$ の変化がプロットされている（黒い実線）。これに一次近似を適用することを考え（赤い点線）、 $\log \sigma$ を $-0.5 < \log x < -0.1$ （すなわち $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ 、グラフで緑の領域）の範囲で $\log x$ の一次関数とみなす。さらに、この直線の傾きを最も近い整数値とみなす。



この近似のもとで、 $0.32 < x < 0.80$ の範囲における $\sigma(x)$ を x の関数として [4] 表せ。

(T11.3c) 前問 (T11.3b) の結果を元に、 $0.32 < x < 0.80$ の範囲における $q(x)$ の表式 [6] を導け。

(T11.3d) 内部領域に対する近似：

恒星の内部領域 ($0 \leq x \leq 0.32$) においては、密度は半径の一次関数として、 [8] $\sigma(x) = Ax + B$ のように表せるとみなせる。ここで A, B は定数である。定数 A, B を決定し、それによって領域 ($0 \leq x \leq 0.32$) における $q(x)$ の表式を決定せよ。ただし、本問での近似と中間領域に対する近似は境界 $x = 0.32$ において密度や質量に不連続を生じさせうるため、境界条件として使用できないことに注意せよ。

(T11.3e) ここまでの問題 (T11.3c) や (T11.3d) など得た表式は、半径に対する質量 [4] 分布を精度良く近似できるが、それは恒星の特定の領域に限られる。ここまですべての表式を導いていない恒星の外部領域 $0.80 \leq x \leq 1$ においては、近似的に、隣接する領域における表式をそのまま外挿することとしてみよう。この近似とここまでの結果を合わせて用いることで、恒星全体 ($0 \leq x \leq 1$) における質量分布 $q(x)$ を x の関数として描け。ただし、滑らかな曲線となるように ($q(x)$ とその導関数が不連続とならないように) 注意せよ。

(T12) ブラックホールからのホーキング放射

[50 marks]

(T12.1) ブラックホール (BH) は通常、寿命の最終段階にある大質量星が重力崩壊して特異点と呼ばれる点に至ることで形成される。このような天体の極端に強い重力のため、いわゆる事象の地平面に入ったものは、そこから逃れることができない。事象の地平面とは、特異点からの距離 r が ($r = R_{\text{SC}}$ となる球面である。ここで、 R_{SC} はシュバルツシルド半径と呼ばれる。

- (T12.1a) **ホーキング放射の起源のモデル化:** BH地平線の両側で生成される質量 m の粒子のペア（粒子対）を考える。1つの粒子は地平線の外側にあり、 $r \approx R_{\text{SC}}$ に位置し、もう1つの粒子は地平線の内側にあり、 $r = \kappa R_{\text{SC}}$ に位置する。粒子の全エネルギーは、粒子の静止質量エネルギー mc^2 とBHによる重力ポテンシャルエネルギーの合計であると仮定する。

粒子対の全エネルギーがゼロになる κ の値を求めよ。

[4]

- (T12.1b) **ブラックホールの温度:** 上記のプロセスで地平線の外で生成された粒子が十分な運動エネルギーを持っている場合、ホーキング放射と呼ばれるプロセスでBHから逃れることができる。一方、地平線の内側で生成された負のエネルギーを持つ粒子はBHに吸収され、BHの質量を減少させる。

すべてのホーキング放射が黒体スペクトルを持つ光子から成り、その波長が $\lambda_{\text{bb}} \approx 16R_{\text{SC}}$ で黒体放射のエネルギーのピークに達すると仮定する。太陽質量のBHに対して、 $R_{\text{SC}, \odot} = 2.952 \text{ km}$ であることが知られている。

この黒体放射に対応するBHの温度 T_{bh} を、BHの質量 M_{bh} と物理定数を用いて [4] 表せ。質量が $10 M_{\odot}$ のBHに対して、シュバルツシルド半径 $R_{\text{SC}, 10\odot}$ と温度 $T_{\text{bh}, 10\odot}$ を計算せよ。

- (T12.1c) **ブラックホールの質量損失:** ホーキング放射が事象の地平面から放出されると仮定する。

質量とエネルギーが等価であることを用いて、BHの質量損失率 $dM_{\text{bh}}(t)/dt$ の表式を求めよ。なお、質量損失率は、BHの質量 $M_{\text{bh}}(t)$ と物理定数を用いて表すこと。

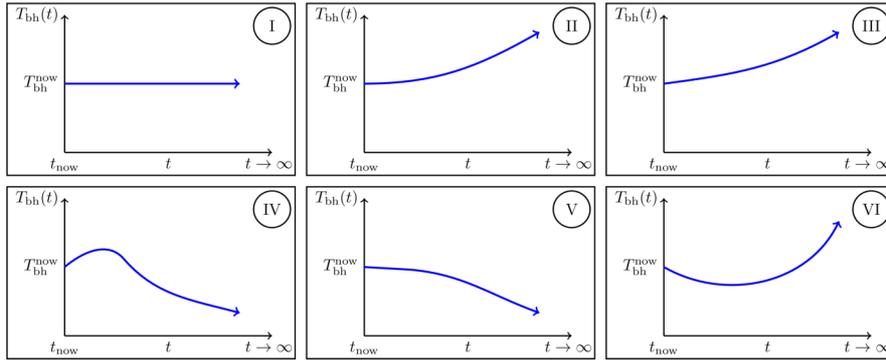
次に、初期質量 M_0 を持つBHの $M_{\text{bh}}(t)$ の表式を求めよ。 $M_{\text{bh}} = M_0$ から [8] $M_{\text{bh}} = 0$ までの t の関数として $M_{\text{bh}}(t)$ のグラフの概形を描け。

- (T12.1d) **ブラックホールの寿命:** 初期質量 M_0 を持つブラックホールがホーキング放射によって完全に蒸発する寿命 τ_{BH} の式を、 M_0 と物理定数を用いて求めよ。 $M_0 = 10 M_{\odot}$ のブラックホールの寿命 $\tau_{\text{bh}, 10\odot}$ を秒単位で計算せよ。 [3]

- (T12.1e) **CMB放射の中のブラックホール:** 他の天体から遠く離れた宇宙空間に孤立したブラックホールを考える。BHの現在の温度は $T_{\text{bh}}^{\text{now}}$ で、周囲に存在している宇宙マイクロ波背景放射（CMB）の現在の温度は $T_{\text{cmb}}^{\text{now}} = 2.7 \text{ K}$ である。ブラックホールは、CMB放射を吸収することで質量を増やし、ホーキング放射によって質量を失うことができる。

宇宙の加速膨張を考慮に入れ、次の3つの場合における T_{bh} の長期的な時間変化を示す図をそれぞれ特定せよ:

(X) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} > T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$, (Y) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} = T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$, (Z) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} < T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$.



各ケースX、Y、Zに対して1つずつ、適切な図の番号に対応するSummary [6] Answersheetの表で適切な欄にチェック✓を記入して答えを示せ。

(T12.2) 非常に軽い原始ブラックホール (PBH) は、ごく初期の宇宙で形成される可能性がある。以下のすべての質問はPBHに関連している。ここでは、ブラックホールの質量を増加させるようなプロセスも無視して構わない。

(T12.2a) **現在蒸発しているPBH:** 前の質問への回答から気づいたかもしれないが、太陽質量のブラックホールは蒸発するのに長い時間がかかる。しかし、PBHは質量がはるかに小さいため、今現在、蒸発しているのを見ることができるとは限らない。

現在の時代に完全に蒸発しているかもしれないブラックホールの初期質量 [4] $M_{0, \text{PBH}}$ (kg)、シュバルツシルド半径 $R_{\text{SC, PBH}}$ (m)、および温度 T_{PBH} (K) を求めよ。つまり、寿命が $\tau_{\text{PBH}} = 140$ 億年のものである。

(T12.2b) **PBHの形成:** 放射優勢期の初期宇宙では、スケール因子は $a(t) \sim t^{1/2}$ として変化します。この時代には、物理的サイズ ct の小さな領域内に含まれるすべてのエネルギーが重力崩壊することにより、PBHが宇宙でいきなり形成される。ここで t はその時点での宇宙の年齢である。

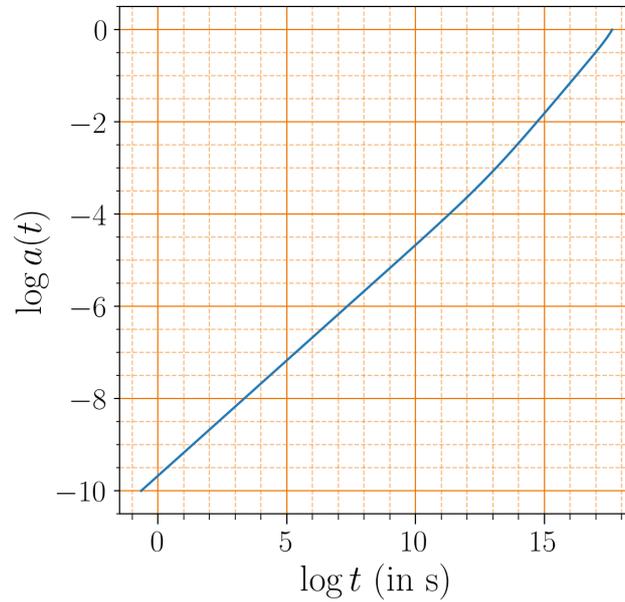
質量が 1×10^{12} kg のPBHは、宇宙の年齢が約 1×10^{-23} 秒のときに形成される [6]。質量が 1×10^{20} kg のPBHが形成される時の宇宙の年齢 t_{20} を計算せよ。

(T12.2c) **PBHからのホーキング放射の観測されるスペクトル:** 初期質量が 1×10^{10} kg のPBHがその寿命の終わりに完全に蒸発すると考える。簡単のために、ホーキング放射の大部分がこの時点で放出され、その温度は、PBHの初期質量に対応する温度を持つと仮定する。また、宇宙のスケール因子が $a(t) \sim t^{2/3}$ として進化しているとする。

このホーキング放射のピーク波長を、現在の時代 ($t = 140$ 億年) に地球で観測される λ_{earth} として計算せよ。 [5]

(T12.2d) **PBHからの高エネルギー宇宙放射線:** ある時点 t で放出されるホーキング放射が、エネルギー $k_B T_{\text{bh}}(t)$ を持つ光子に対応すると仮定する。また、ブラックホールの可能な最高温度はプランク温度 T_{Planck} であり、 $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV に相当する。

スケール因子の進化は、関連する時間スケールにわたって次の図に示されている。現在のスケール因子は1に設定されている。時間軸の $t(s)$ は宇宙の年齢を秒で表したものである。



地球上でエネルギー $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$ eV の光子が観測された場合、この光子の発生原因となり得るPBHの初期質量の最大値と最小値 (M_0^{max} および M_0^{min}) を求めよ。 [10]