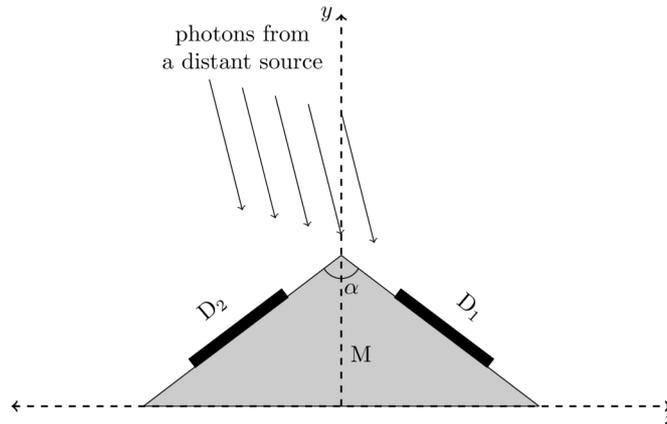


**(T01) Missione Daksha**

**[10 punti]**

“Daksha” è una missione indiana proposta composta da due satelliti  $S_1$  e  $S_2$  che orbitano attorno alla Terra nella stessa orbita circolare di raggio  $r = 7000$  km ma con una differenza di fase di  $180^\circ$ . Questi satelliti osservano l’universo nel dominio delle alte energie (raggi X e  $\gamma$ ). Ciascuno dei satelliti di Daksha utilizza diversi rilevatori piatti e rettangolari.

Per capire come localizzare una sorgente nel cielo, useremo un modello semplificato della missione Daksha. Supponiamo che  $S_1$  abbia solo due rilevatori identici  $D_1$  e  $D_2$ , ciascuno di area  $A = 0.50$  m<sup>2</sup>, attaccati a un supporto opaco M come mostrato nella figura sottostante. I rilevatori sono disposti simmetricamente attorno all’asse  $y$  in piani perpendicolari al piano  $x-y$  e formano un angolo  $\alpha = 120^\circ$  tra loro.



- (T01.1) Quando si osserva una sorgente distante situata nel piano  $x-y$ , il rilevatore  $D_1$  registra una potenza  $P_1 = 2.70 \times 10^{-10}$  J s<sup>-1</sup> e il rilevatore  $D_2$  registra una potenza  $P_2 = 4.70 \times 10^{-10}$  J s<sup>-1</sup>.

Stima l'angolo  $\eta$  formato dal vettore posizione della sorgente con l'asse  $y$  positivo, considerando [5] positivo l'angolo in senso antiorario dall'asse  $y$  positivo.

Considera un singolo impulso da una sorgente distante (non necessariamente nel piano  $x-y$ ) registrato da entrambi i satelliti ( $S_1$  e  $S_2$ ) di Daksha. I tempi dei picchi degli impulsi registrati da  $S_1$  e  $S_2$  sono rispettivamente  $t_1$  e  $t_2$ .

- (T01.2) Se  $t_1 - t_2$  è stato misurato essere  $10.0 \pm 0.1$  ms, determina la frazione,  $f$ , della sfera celeste sulla [5] quale la sorgente potrebbe trovarsi.

**(T02) Makar-Sankranti**

**[10 punti]**

La festa di "Makar-Sankranti" si celebra in India quando il Sole, visto dalla Terra, entra nella regione zodiacale del Capricorno (Makar = Capricorno, Sankranti = Entrata). Attualmente si celebra intorno al 14 gennaio di ogni anno. Molti anni fa, questa festa coincideva con il Solstizio d'Inverno nell'emisfero settentrionale, che assumiamo si verifichi il 21 dicembre.

- (T02.1) Sulla base delle informazioni date, trova l'anno  $y_c$  in cui la celebrazione di questa festa ha coinciso [3] per l'ultima volta con il solstizio d'inverno nell'emisfero settentrionale.

- (T02.2) Se il Sole entra nella regione zodiacale del Capricorno alle 11:50:13 ora locale del 14 gennaio 2006 [3] a Mumbai, calcola la data  $D_{\text{enter}}$  e l'ora locale  $t_{\text{enter}}$  del suo ingresso nel Capricorno nell'anno 2013.

- (T02.3) La festa di Makar-Sankranti si celebra in un luogo specifico il giorno del primo tramonto nella regione zodiacale del Capricorno. Assumere che l'ora locale del tramonto a Mumbai a gennaio sia alle 18:30.

Indicare la data di celebrazione della festa per ogni anno tra il 2006 e il 2013 (segnando con  $\checkmark$  la casella corrispondente nella tabella riportata nel foglio di risposta riassuntivo). [4]

**(T03) Onde Gravitazionali**

[15 punti]

I buchi neri binari in orbita generano onde gravitazionali. Considera due buchi neri nella nostra Galassia con masse  $M = 36 M_{\odot}$  e  $m = 29 M_{\odot}$ , che ruotano in orbite circolari con frequenza angolare orbitale  $\omega$  attorno al loro centro di massa.

(T03.1) Assumendo una gravità newtoniana, ricavare un'espressione per la frequenza angolare,  $\omega_{ini}$ , delle orbite dei buchi neri in un tempo,  $t_{ini}$ , quando la separazione tra i buchi neri era 4.0 volte la somma dei loro raggi di Schwarzschild, in termini soltanto di  $M$ ,  $m$ , e costanti fisiche.

Calcola il valore di  $\omega_{ini}$  (in  $\text{rad s}^{-1}$ ).

[5]

(T03.2) Nella relatività generale, i buchi neri in orbita emettono onde gravitazionali con frequenza  $f_{GW}$ , tale che  $2\pi f_{GW} = \omega_{GW} = 2\omega$ . Questo riduce le orbite dei buchi neri, il che a sua volta fa aumentare  $f_{GW}$ . Il tasso di variazione di  $f_{GW}$  è

$$\frac{df_{GW}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{chirp}^{\alpha/3} f_{GW}^{\delta/3},$$

dove  $M_{chirp} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$  è chiamata "chirp mass".

Trova i valori di  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ .

[4]

(T03.3) Supponiamo che le onde gravitazionali associate all'evento siano state rilevate per la prima volta al tempo  $t_{ini} = 0$ . [6]

Ricavare un'espressione per il tempo osservato della fusione dei buchi neri,  $t_{merge}$ , quando  $f_{GW}$  diventa molto grande, in termini di  $\omega_{ini}$ ,  $M_{chirp}$  e costanti fisiche. Calcolare il valore di  $t_{merge}$  (in secondi).

**(T04) Decremento di Balmer**

[15 punti]

Consideriamo una stella di sequenza principale circondata da una nebulosa. La magnitudine osservata in banda V della stella è 11.315 mag. La regione ionizzata della nebulosa vicina alla stella emette le righe  $H\alpha$  e  $H\beta$ ; le cui lunghezze d'onda sono rispettivamente  $0.6563 \mu\text{m}$  e  $0.4861 \mu\text{m}$ . Il rapporto teorico previsto tra i flussi delle righe  $H\alpha$  e  $H\beta$  è  $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2.86$ . Tuttavia, quando questa radiazione attraversa la parte esterna della fredda nebulosa polverosa, i flussi di emissione osservati nelle righe  $H\alpha$  e  $H\beta$  sono rispettivamente  $6.80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$  e  $1.06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ .

L'estinzione  $A_{\lambda}$  è una funzione della lunghezza d'onda ed è espressa come

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Qui,  $\kappa(\lambda)$  è la curva di estinzione e  $E(B - V)$  indica l'eccesso di colore nelle bande del filtro B e V. La curva di estinzione (con  $\lambda$  in  $\mu\text{m}$ ) è data come segue.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

dove,  $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$  è il rapporto tra estinzione totale e selettiva.

(T04.1) Trova i valori di  $\kappa(H\alpha)$  e  $\kappa(H\beta)$ . [3]

(T04.2) Trova il valore del rapporto di eccesso di colore  $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$ . [4]

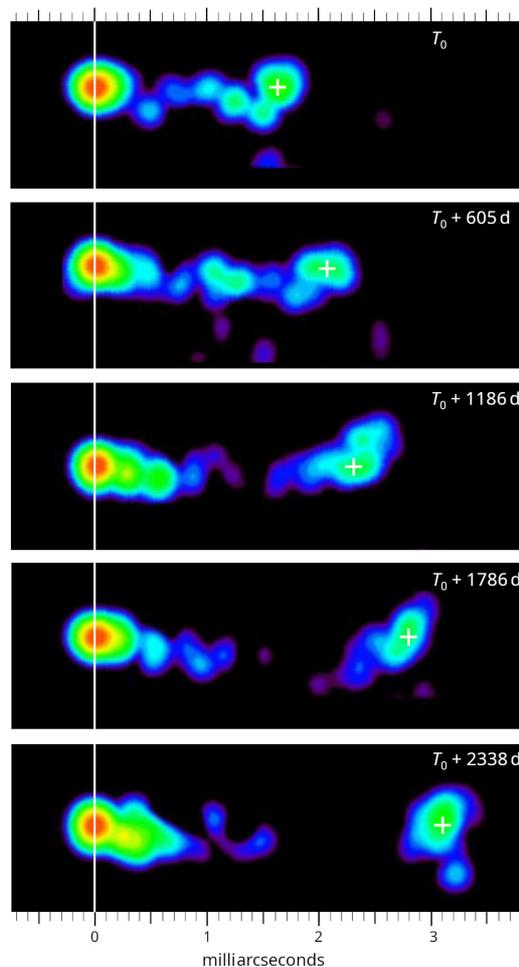
(T04.3) Stimare l'estinzione dovuta alla nebulosa,  $A_{H\alpha}$  e  $A_{H\beta}$ , rispettivamente alle lunghezze d'onda di  $H\alpha$  e  $H\beta$ . [6]

(T04.4) Stimare l'estinzione della nebulosa ( $A_V$ ) e la magnitudine apparente della stella nella banda V,  $m_{V0}$ , in assenza della nebulosa. [2]

**(T05) Quasar**

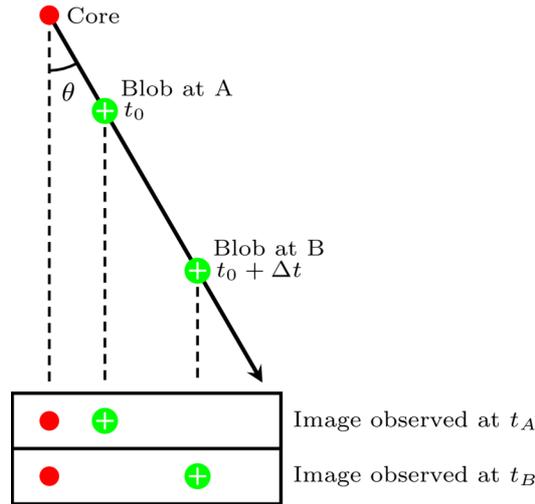
**[20 punti]**

Un quasar è una galassia attiva estremamente luminosa alimentata da un buco nero supermassiccio che emette getti relativistici. La figura mostra una serie di riquadri di immagini radio di un quasar (con redshift  $z = 0.53$  e distanza di luminosità  $D_L = 1.00 \times 10^{10}$  al) in momenti diversi. Il "nucleo" è allineato con la linea bianca verticale, mentre un getto, costituito da una "macchia" (contrassegnata in bianco +, si allontana da essa nel tempo. Ogni riquadro mostra il tempo di osservazione (a partire da  $T_0$  per la prima immagine), e la scala angolare è indicata nella parte superiore e inferiore della figura.



(T05.1) Determina la separazione angolare del blob,  $\phi_{\text{blob}}$  (in milliarcosecondi), e la sua distanza trasversale,  $l_{\text{blob}}$  (in anni luce), dal nucleo del quasar per ogni osservazione. Quindi, calcola la velocità apparente del blob nella direzione trasversale ( $v_{\text{app}}$ ) come frazione della velocità della luce,  $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$  utilizzando osservazioni consecutive. Calcola anche la velocità apparente media  $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$  su tutto il periodo di osservazione. [5]

Il getto del quasar si muove effettivamente a una velocità relativistica  $v \equiv \beta c$ , ma non necessariamente nel piano del cielo; ad esempio, forma un angolo  $\theta$  (l'“angolo di visione”) rispetto alla linea di vista di un osservatore distante (indicato dalle linee tratteggiate), come mostrato nel disegno sotto. Per questa e tutte le parti successive, ignora il redshift del quasar e qualsiasi effetto relativistico.



(T05.2) La luce emessa dal blob in due momenti diversi  $t_0$  (corrispondente alla posizione A) e  $t_0 + \Delta t$  (corrispondente alla posizione B) raggiunge l'osservatore in  $t_A$  e  $t_B$ , rispettivamente. Pertanto, la differenza di tempo osservata è  $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$ .

(T05.2a) Trova un'espressione per il rapporto  $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$  in termini di  $\beta$  e  $\theta$ . [2]

(T05.2b) Usando questo rapporto, esprimi  $\beta_{\text{app}}$  in termini di  $\beta$  e  $\theta$ . [2]

(T05.3) Il moto è chiamato superluminale se la velocità apparente supera quella della luce ( $\beta_{\text{app}} > 1$ ), e subluminale se non lo fa ( $\beta_{\text{app}} < 1$ ).

(T05.3a) Per  $\beta_{\text{app}} = 1$ , traccia una curva continua di  $\beta$  come funzione di  $\theta$  per segnare il confine tra i moti subluminali e superluminali. Nel grafico, tratteggiare la regione superluminale con linee oblique (///). [4]

(T05.3b) Trova la velocità minima reale del getto ( $\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$ ) affinché si verifichi il moto superluminale e il corrispondente angolo di vista  $\theta_{\text{low}}$ . [2]

(T05.4) Ricavare un'espressione per l'angolo di osservazione massimo,  $\theta_{\text{max}}$ , per il quale sia plausibile un dato valore di  $\beta_{\text{app}}$ . [2]

L'oggetto compatto che si trova al centro di un quasar, presenta variabilità nella sua emissione a causa di processi interni che si verificano all'interno di una regione causalmente connessa. La dimensione (= raggio) di questa regione viene tipicamente considerata pari a circa cinque volte il raggio di Schwarzschild del nucleo.

(T05.5) Si è osservato che il nucleo di un certo quasar varia su scale temporali di circa 1 ora. Ricavare un limite superiore,  $M_{c, \text{max}}$ , per la massa dell'oggetto compatto centrale, in unità di masse solari. [3]

**(T06) Rotazione galattica**

**[20 punti]**

La curva di rotazione della nostra Galassia è determinata utilizzando misure di velocità lungo la linea di vista di nubi di idrogeno neutro (HI) che si trovano a diverse longitudini galattiche, osservate attraverso la linea HI a 21 cm. Si consideri una nube HI con longitudine galattica  $l$ , situata a una distanza  $R$  dal Centro Galattico (GC) e a una distanza  $D$  dal Sole. Si consideri il Sole a una distanza  $R_0 = 8.5$  kpc dal GC. Si supponga che sia il Sole che la nube HI siano in orbite circolari attorno al GC nel piano galattico, con velocità angolari  $\Omega_0$  e  $\Omega$  e velocità di rotazione  $V_0$  e  $V$ , rispettivamente.

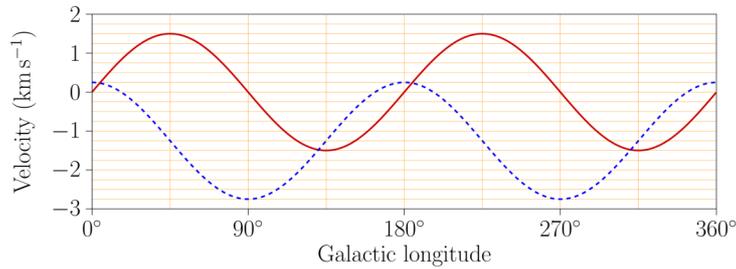
Le componenti della velocità lungo la linea di vista ( $V_r$ ) e la velocità trasversale ( $V_t$ ) della nube, osservate dal Sole, possono essere espresse come

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Vista dal Polo Nord Galattico, la rotazione galattica è in senso orario. Nello svolgimento del problema, considereremo come positiva la velocità lungo linea di vista durante la fase di allontanamento e che le nubi siano oggetti puntiformi.

- (T06.1) Nel grafico fornito nel foglio di risposta riassuntivo, traccia  $V_r$  in funzione di  $D$  da  $D = 0$  a  $D = 2R_0$  per due linee di vista definite da (i)  $l = 45^\circ$  e (ii)  $l = 135^\circ$ . Etichetta ciascuna delle tue linee/curve con il rispettivo valore di  $l$ . **[5]**
- (T06.2) Il grafico sottostante mostra le componenti medie della velocità radiale (curva continua rossa) e trasversale (curva tratteggiata blu) delle stelle a una distanza di 100 pc dal Sole, rappresentate in funzione della longitudine galattica.



Utilizzando il grafico, stima il periodo orbitale del Sole ( $P$ ) attorno al GC in mega-anni (Myr). **[3]**

- (T06.3) Jan Oort notò che nel vicinato solare ( $D \ll R_0$ ), la differenza nelle velocità angolari ( $\Omega - \Omega_0$ ) è piccola e, quindi, derivò le seguenti approssimazioni al primo ordine per la velocità nelle sue componenti lungo la linea di vista e trasversale:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

dove  $A$  e  $B$  sono note come costanti di Oort.

Consideriamo due casi:

- (I) la curva di rotazione corrisponde a quella osservata della Galassia, e  
 (II) la curva di rotazione corrisponde a quella della Galassia nel caso ipotetico in cui la stessa sia priva di materia oscura, supponendo, inoltre, che l'intera massa della Galassia sia concentrata al suo centro.

- (T06.3a) Ricavare le espressioni per il gradiente radiale della velocità di rotazione nella **[2]** posizione del Sole,  $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ , per i due casi.

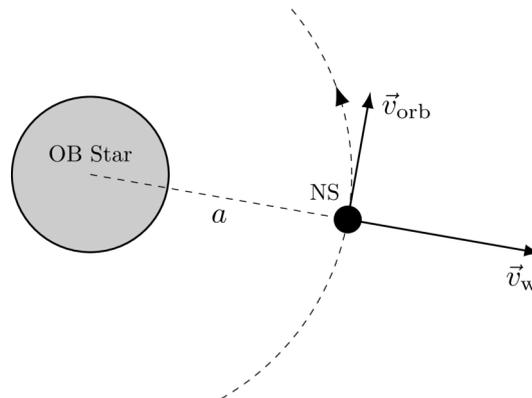
- (T06.3b) Esprimi  $A$  e  $B$  in termini di  $V_0$ ,  $R_0$ , e il gradiente radiale della velocità di rotazione [8]  
nella posizione del Sole,  $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ .
- (T06.3c) Il rapporto ( $A/B$ ) delle costanti di Oort per i due casi dati, (I) e (II), è definito [2]  
rispettivamente come  $F_I$  e  $F_{II}$ . Determinare  $F_I$  e  $F_{II}$ .

**(T07) Stella di neutroni binaria**

**[20 punti]**

Un sistema binario include una stella compatta e una stella compagna che non supera il lobo di Roche della prima. La principale fonte di accrescimento per la stella compatta è il vento stellare proveniente dalla stella compagna. Questo accrescimento alimentato dal vento è particolarmente significativo nei sistemi che includono una stella "early-type" (come una stella di tipo O o B, indicata d'ora in poi come stella OB), insieme a un oggetto compatto come una stella di neutroni (NS) in orbita ravvicinata.

Consideriamo un sistema binario formato da NS-stella OB, in cui una stella di neutroni di massa  $M_{NS} = 2.0 M_{\odot}$  e raggio  $R_{NS} = 11$  km orbita in un'orbita circolare di raggio  $a$  attorno al centro della stella OB con velocità  $v_{orb} = 1.5 \times 10^5$  m s<sup>-1</sup> (vedi figura sotto). In questo problema assumere che la perdita di massa dalla stella OB avvenga in modo sfericamente simmetrico e il tasso di perdita sia pari a  $\dot{M}_{OB} = 1.0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$ .



- (T07.1) Il raggio di accrescimento,  $R_{acc}$ , è definito come la distanza massima dalla NS alla quale il vento stellare può essere catturato dalla NS. Se la velocità del vento stellare alla distanza orbitale della NS è  $v_w = 3.0 \times 10^6$  m s<sup>-1</sup>, trovare  $R_{acc}$  in km per il sistema sopra indicato, utilizzando il calcolo standard della velocità di fuga. [3]
- (T07.2) Assumendo che tutto il materiale catturato venga accresciuto dalla NS, stimare il tasso di accrescimento di massa,  $\dot{M}_{acc}$ , dal vento stellare sulla NS in unità di  $M_{\odot} \text{yr}^{-1}$  se  $a = 0.5$  au. Trascurare gli effetti della pressione di radiazione e del tempo di raffreddamento finito del gas in accrescimento. [3]
- (T07.3) Consideriamo il caso in cui la velocità del vento stellare alla distanza orbitale  $a$  (vicino alla NS) diventa paragonabile alla velocità orbitale della NS. In questo caso, il tasso di accrescimento di massa dal vento stellare sulla NS sarebbe dato dall'espressione  $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$ , dove  $q = M_{NS}/M_{OB}$  è il rapporto tra le masse del sistema binario, mentre  $\beta$  è l'angolo tra la direzione della velocità del vento e la direzione radiale rispetto alla NS, nel sistema di riferimento della NS stessa. Ottenere l'espressione per  $f(\tan \beta, q)$  assumendo  $M_{OB} \gg M_{NS}$ . [6]

(T07.4) Si consideri che il materiale completamente ionizzato accresca radialmente e sia ostacolato dal forte campo magnetico  $\vec{B}$  della NS. Questo effetto può essere modellato come una pressione, data da  $\frac{B^2}{2\mu_0}$ . Assumeremo che la NS abbia un campo magnetico dipolare la cui intensità nel piano equatoriale varia con la distanza  $r$  dalla NS  $r \gg R_{NS}$  come

$$B(r) = B_0 \left( \frac{R_{NS}}{r} \right)^3$$

dove  $B_0$  è il campo magnetico all'equatore della NS. Si supponga che l'asse del dipolo magnetico sia allineato con l'asse di rotazione della NS.

(T07.4a) Ottenere la pressione magnetica,  $P_{eq, mag}$ , nel piano equatoriale in termini di  $B_0$ ,  $R_{NS}$ ,  $r$ , e costanti. [1]

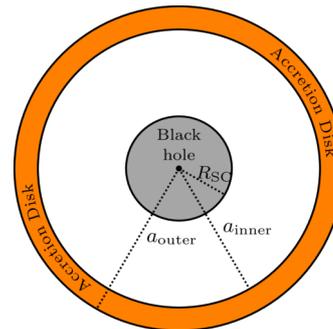
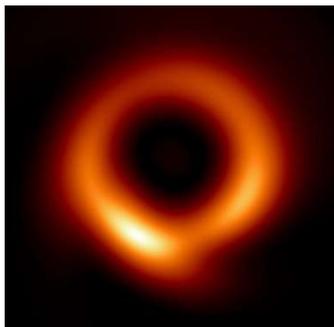
(T07.4b) La distanza massima alla quale il flusso di accrescimento viene arrestato dal campo magnetico all'equatore è chiamata raggio magnetosferico  $R_m$ . Questo flusso di materia eserciterà una pressione dovuta al moto relativo tra il vento stellare in arrivo e la NS. Si ottenga un'espressione approssimata per il campo magnetico critico  $B_{0, c}$  per cui  $R_m$  coincide con  $R_{acc}$  e si calcoli il suo valore in Tesla. Si trascurino gli effetti magnetici per  $r > R_m$  e si consideri  $v_w \gg v_{orb}$ . [7]

### (T08) Ombra di un buco nero

[20 punti]

Il Telescopio Event Horizon (EHT) ha rilasciato un'immagine del buco nero supermassiccio al centro della galassia M87 come mostrato nel riquadro sinistro della figura sottostante.

Per comprendere alcune caratteristiche semplici di questa immagine, considereremo un modello semplificato di un buco nero statico, non rotante e simmetricamente sferico di massa  $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$ , circondato da un disco di accrescimento sottile, piano e senza massa con raggi interno ed esterno,  $a_{inner} = 6R_{SC}$  e  $a_{outer} = 10R_{SC}$ , rispettivamente, dove  $R_{SC}$  è il raggio di Schwarzschild. Uno schizzo visto frontalmente è mostrato nel pannello destro della figura sottostante (la figura non è in scala).



Assumiamo che il disco di accrescimento sia l'unica fonte di luce da considerare. Ogni punto del disco emette luce in tutte le direzioni. Questa luce viaggia sotto l'influenza del campo gravitazionale del buco nero. Il percorso dei raggi di luce è governato da due equazioni date di seguito (simili a quelle di un oggetto intorno al Sole):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

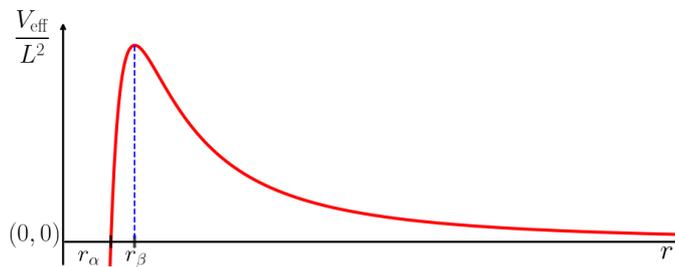
dove  $r \in (R_{SC}, \infty)$  è la coordinata radiale,  $\phi \in [0, 2\pi)$  è l'angolo azimutale, e  $E$  e  $L$  sono costanti relative all'energia conservata e al momento angolare conservato, rispettivamente.

Qui  $v_r \equiv dr/dt$  è la magnitudine della velocità radiale,  $v_\phi$  è la magnitudine della velocità tangenziale, e  $\omega \equiv d\phi/dt$  è la velocità angolare. Definiamo il parametro d'impatto  $b$  per una traiettoria come  $b = L/\sqrt{2E}$ . La dilatazione temporale è trascurata in questo problema.

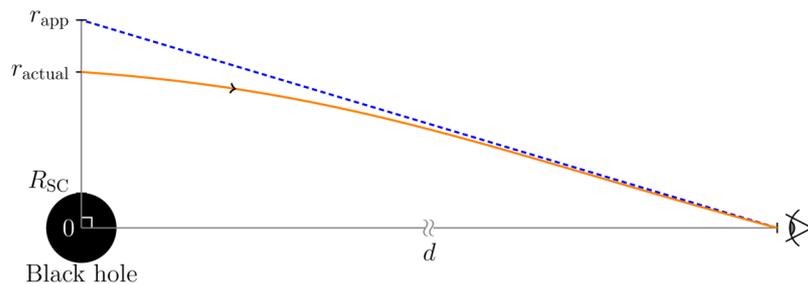
Un'altra equazione utile si ottiene differenziando la prima equazione:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

- (T08.1) Attorno al buco nero possono esistere traiettorie di luce circolari. Trova il raggio,  $r_{ph}$ , e il parametro d'impatto,  $b_{ph}$ , per tali traiettorie di fotoni in termini di  $M$  e costanti rilevanti. [4]
- (T08.2) Calcolare il tempo,  $T_{ph}$ , impiegato dalla luce per completare un'intera orbita della traiettoria circolare in secondi. [2]
- (T08.3) L'equazione della velocità radiale data sopra (la prima equazione in questa domanda) può essere confrontata con un'equazione della forma  $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$  per le traiettorie della luce. Un grafico schematico di  $V_{eff}/L^2$  in funzione di  $r$  è dato di seguito.



- (T08.3a) Il grafico indica due raggi in particolare,  $r_\alpha$  e  $r_\beta$ . Ottieni le espressioni per  $r_\alpha$  e  $r_\beta$  in termini di  $M$  e costanti rilevanti. [2]
- (T08.3b) Un fotone che viaggia verso l'interno dal disco di accrescimento verso il buco nero può ancora sfuggire all'infinito in alcuni casi. Trova l'espressione per il valore più piccolo del raggio del punto di inversione,  $r_t$ , per tale fotone, in termini di  $M$  e costanti rilevanti. Trova l'espressione per il valore minimo del parametro d'impatto,  $b_{min}$ , per questo fotone. [3]
- (T08.4) Un raggio di luce proveniente da una distanza radiale  $r_{actual}$  dal centro del sistema nel piano del cielo subirà una forte deviazione a causa della gravità del buco nero, e alla fine raggiungerà un osservatore (indicato da un occhio) a una grande distanza  $d$  dal sistema, come mostrato di seguito.

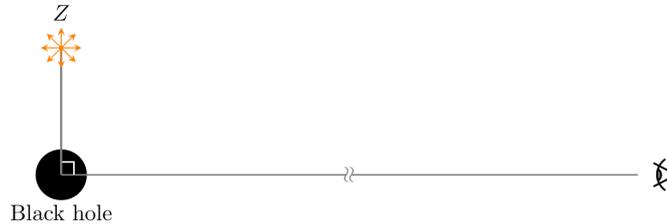


Per questo osservatore, il raggio sembrerebbe provenire da un punto diverso a una distanza  $r_{app} \approx b$  dal centro del buco nero nel piano del cielo, dove  $b$  è il parametro d'impatto per quella traiettoria del fotone. Per i punti sul disco di accrescimento a  $r = r_{actual}$ , si può assumere la seguente relazione:

$$b(r_{actual}) \approx r_{actual} \left(1 + R_{SC}/r_{actual}\right)^{1/2}$$

Per l'osservatore distante, come noi, con una vista frontale del disco di accrescimento, l'immagine del sistema apparirà simmetricamente circolare nel piano del cielo. Determina il raggio apparente più esterno,  $r_{outer}$ , e il raggio apparente più interno,  $r_{inner}$ , dell'immagine in unità di  $au$ . [5]

- (T08.5) Considera un buco nero supermassiccio isolato di massa  $M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$  senza alcun disco di accrescimento. Un breve e forte impulso di radiazione elettromagnetica si verifica per 5 s in un punto Z a una distanza,  $r_Z = 6R_{SC}$  dal buco nero come mostrato nella figura. L'impulso al punto Z emette luce in tutte le direzioni. Un osservatore in un punto lontano dal buco nero (indicato da un occhio nella figura sotto) scatta un'immagine a lunga esposizione della regione intorno al buco nero per 60 s.



Scegli l'opzione corretta per ciascuna delle affermazioni seguenti:

- (T08.5a) Il numero di percorsi possibili per la luce per viaggiare da Z all'osservatore è [2]  
 (A) Al massimo uno (B) Esattamente uno (C) Esattamente due (D) Maggiore di due.
- (T08.5b) Il numero di immagini del lampo EM in Z che saranno visibili nell'immagine a lunga esposizione è [2]  
 (A) Al massimo una (B) Esattamente una (C) Esattamente due (D) Maggiore di due.

**(T09) Seeing atmosferico**

[35 punti]

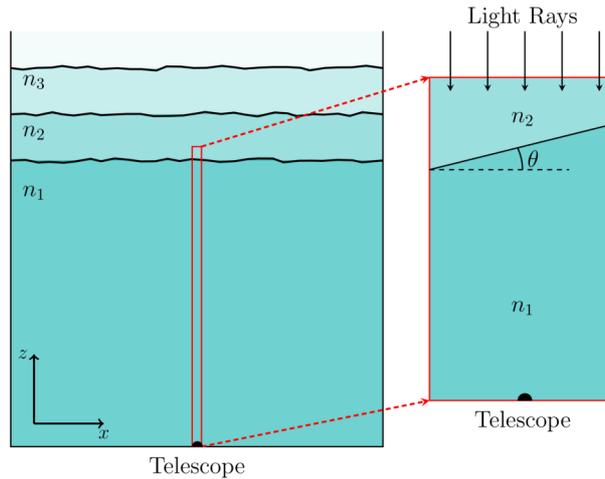
Un telescopio con una lente convessa acromatica di diametro  $D = 15$  cm e lunghezza focale  $f = 200$  cm è puntato verso una stella allo zenit.

- (T09.1) Trova il diametro (in m),  $d_{\text{image}}$ , dell'immagine di una sorgente puntiforme prodotta dalla lente [1] dell'obiettivo sul suo piano focale considerando che la luce sia verde ( $\lambda = 550$  nm), e considerando solo gli effetti della diffrazione.

L'immagine di una sorgente astronomica è influenzata anche dal cosiddetto "seeing atmosferico".

I limiti tra gli strati dell'atmosfera, così come gli indici di rifrazione degli strati, cambiano continuamente a causa della turbolenza, dovuta alle variazioni di temperatura e altri fattori. Ciò porta a piccole variazioni nella posizione dell'immagine sul piano focale del telescopio, note come "effetto di scintillazione". Per il resto del problema, a parte l'utilizzo della dimensione finita dell'immagine della stella limitata dalla diffrazione (come usato sopra), non verranno considerati effetti di interferenza.

Il pannello sinistro della figura sottostante mostra una sezione verticale dell'atmosfera con più strati di indici di rifrazione diversi ( $n_1, n_2, n_3, \dots$ ). Il pannello destro mostra una vista ingrandita di un sottile segmento verticale dell'atmosfera e il confine tra i due strati atmosferici più bassi di indici di rifrazione  $n_1$  e  $n_2$  ( $n_1 > n_2$ ). Consideriamo solo questi due strati e il loro confine per questo problema. I diagrammi non sono in scala.

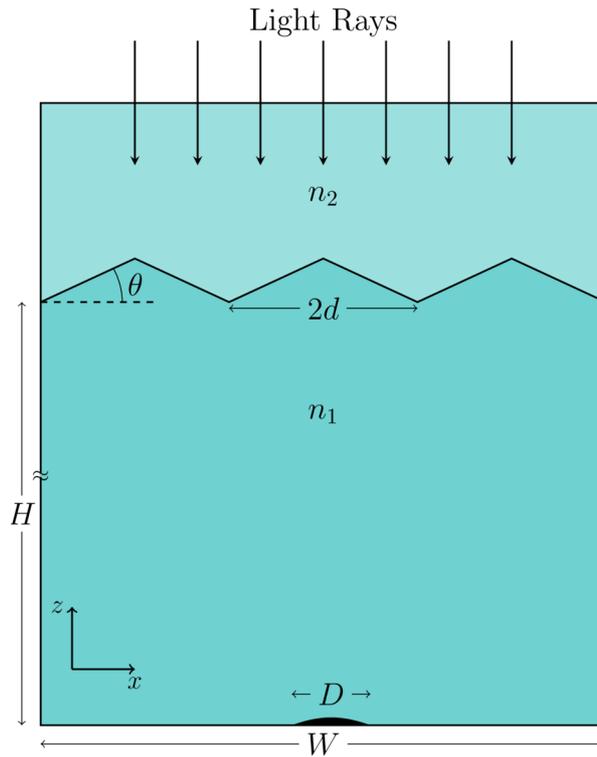


- (T09.2) Consideriamo che il confine tra due strati di atmosfera a un'altezza  $H = 1$  km sia direttamente sopra l'obiettivo del telescopio, con un'inclinazione di  $\theta = 30^\circ$  rispetto al piano orizzontale. In tutte le parti di questo problema,  $\theta$  è considerato positivo in senso antiorario. Per una sorgente luminosa monocromatica,  $n_1 = 1.00027$  e  $n_2 = 1.00026$ . Sia  $\alpha$  lo spostamento angolare dell'immagine sul piano focale del telescopio per una stella allo zenit.
- (T09.2a) Disegna il diagramma dei raggi opportunamente etichettato che mostri  $n_1, n_2, \theta$  e  $\alpha$ . [2]
- (T09.2b) Trova l'espressione per  $\alpha$  in termini di  $\theta, n_1$  e  $n_2$ . Usa le approssimazioni per piccoli angoli:  $\sin \alpha \approx \alpha$  e  $\cos \alpha \approx 1$ . [2]
- (T09.2c) Calcola lo spostamento,  $\Delta x_\theta$  (in m), dell'immagine se  $\theta$  aumenta dell'1% (mantenendo fissi  $n_1$  e  $n_2$ ). [3]
- (T09.2d) Calcola lo spostamento,  $\Delta x_n$  (in m), dell'immagine se  $n_2$  aumenta dello 0.0001% (mantenendo fissi  $n_1$  e  $\theta$ ). [3]
- (T09.3) Per la luce bianca proveniente da una stella allo zenit, scegli quale delle seguenti descrive meglio la forma e il colore dell'immagine spuntando (✓) la casella appropriata (solo una) nel foglio di risposta riassuntivo. Nota che  $x$  aumenta da sinistra a destra nella figura. [2]

	Colore dell'immagine	Forma dell'immagine	bordo sinistro	bordo destro
A	Bianco	Circolare		
B	Bianco	Ellittica		
C	Colorato	Circolare	Blu	Rosso
D	Colorato	Circolare	Rosso	Blu
E	Colorato	Ellittica	Blu	Rosso
F	Colorato	Ellittica	Rosso	Blu

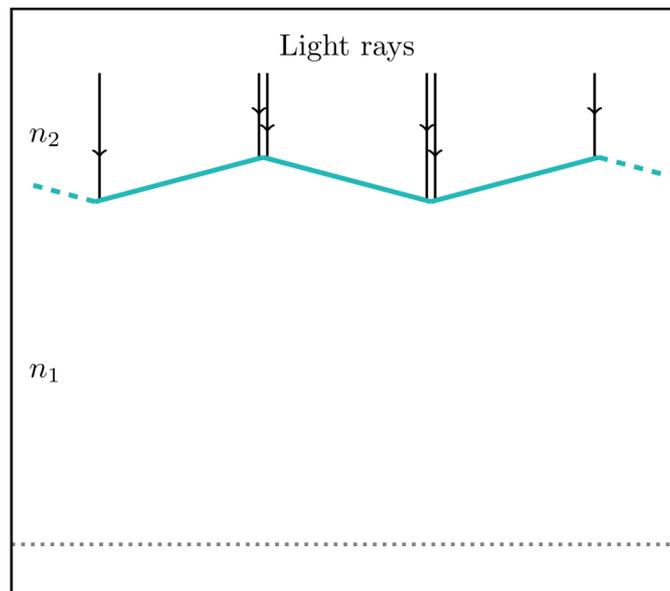
Per tutte le parti rimanenti di questa domanda consideriamo la luce verde monocromatica con  $\lambda = 550$  nm. Modelliamo il confine tra gli strati come un insieme di piani a zigzag infiniti (perpendicolari al piano della pagina) separati da  $d = 10$  cm lungo l'asse  $x$ , con  $\theta = 10^\circ$  o  $\theta = -10^\circ$ .

La figura sottostante (non in scala) mostra una sezione trasversale di questo modello dell'atmosfera di larghezza  $W$  ( $W \ll H$ ). Per i telescopi con grande apertura, questa natura a zigzag del confine provoca la formazione di macchie nel piano focale.



(T09.4) Considera un'atmosfera modellata come sopra.

(T09.4a) Nel diagramma sottostante (non in scala) è mostrata una sezione dell'atmosfera con piani a zigzag consecutivi, con gli stessi parametri indicati sopra.



In questo diagramma, riprodotto nel foglio delle risposte riassuntive, traccia i percorsi dei raggi di luce incidente fino al piano dove è posizionato l'obiettivo del telescopio, mostrato dalla linea tratteggiata grigia.

Segna la/le regione/i, se presenti, con una "X" nel diagramma dove non arriveranno [4] raggi di luce.

(T09.4b) Calcola la larghezza  $W_X$  di tali regione/i. [3]

(T09.4c) Trova il diametro massimo,  $D_{\max}$ , dell'obiettivo del telescopio con cui sarà possibile ottenere un'unica immagine di una stella, scegliendo opportunamente la posizione del telescopio lungo la linea tratteggiata. [4]

(T09.5) Considera il caso in cui la forma a zigzag del confine è consentita in entrambe le direzioni  $x$  e  $y$  (come un campo di piramidi), e  $D = 100$  cm (con  $f = 200$  cm). [6]

Disegna il modello qualitativo delle macchie risultanti nella casella fornita nel foglio riassuntivo delle risposte.

(T09.6) Per un'atmosfera turbolenta, considera nuovamente la stessa forma a zigzag parallela allo strato limite solo lungo la direzione  $x$ , ma ora l'angolo tra due piani cambia a un tasso uniforme da  $10^\circ$  a  $-10^\circ$  in 1.0 s. Supponi che ciò porti a uno spostamento uniforme della posizione dell'immagine. [5]

Considera un telescopio con  $D = 8$  cm e  $f = 1$  m. Stima il tempo di esposizione più lungo  $t_{\max}$  consentito per la sua fotocamera CCD in modo che si ottenga solo un'immagine singola, e qualsiasi possibile deviazione nella sua posizione rimanga inferiore all'1% del diametro limitato dalla diffrazione dell'immagine.

**(T10) Nucleosintesi del Big Bang**

**[35 punti]**

Durante l'era dominata dalla radiazione nell'Universo primordiale, il fattore di scala dell'Universo  $a \propto t^{1/2}$ , dove  $t$  è il tempo trascorso dal Big Bang. Durante la maggior parte di questa era, neutroni (n) e protoni (p) rimangono in equilibrio termico tra loro tramite interazioni deboli. La densità numerica ( $N$ ) di neutroni o protoni liberi è correlata alla temperatura  $T$  e alle loro masse corrispondenti  $m$  tale che

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

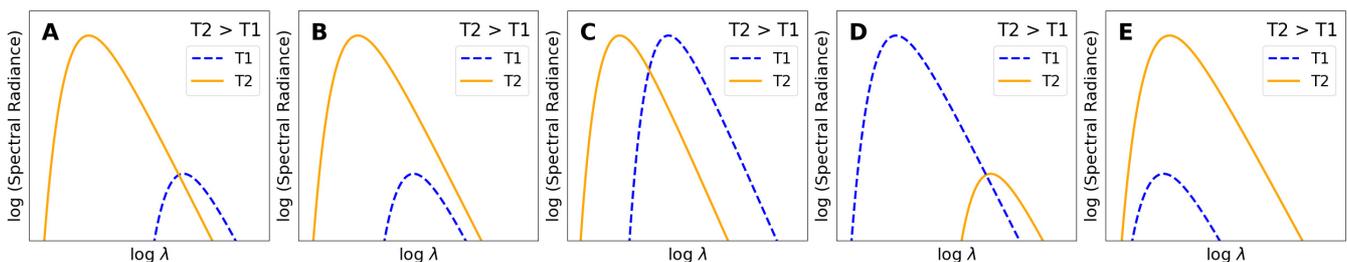
finché il tempo  $t \leq t_{\text{wk}} = 1.70$  s, quando  $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$  keV. Dopo  $t_{\text{wk}}$ , le interazioni deboli non possono più mantenere tale equilibrio, e i neutroni liberi decadono in protoni con un tempo di dimezzamento di 610.4 s.

(T10.1) Sia la densità numerica dei protoni  $N_p$ , e quella dei neutroni  $N_n$ . Calcolare l'abbondanza relativa dei neutroni data dal rapporto  $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$  al tempo  $t_{\text{wk}}$ . [4]

(T10.2) I fotoni mantengono l'equilibrio termico e conservano uno spettro di corpo nero in tutte le epoche.

(T10.2a) Trova l'indice  $\beta$ , tale che  $T(a) \propto a^\beta$ . [2]

(T10.2b) Identifica quale dei seguenti grafici mostra il comportamento corretto della densità di energia spettrale per due temperature  $T_1$  e  $T_2$ . Spunta ( $\checkmark$ ) l'opzione corretta nel foglio riassuntivo delle risposte. [2]



(T10.3) Dopo  $t_{\text{wk}}$ , il processo di formazione del deuterio da protoni e neutroni è governato dall'equazione di Saha, data dal fisico indiano Prof. Meghnad Saha, che può essere semplificata in

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left( \frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{(m_D - m_p - m_n) c^2}{k_B T} \right).$$

Qui, il rapporto barione-fotone  $\eta$  è  $6.1 \times 10^{-10}$ , e  $N_D$  è la densità numerica del deuterio.

(T10.3a) Traccia il rapporto  $N_D/N_n$  sulla griglia nel foglio riassuntivo delle risposte, per almeno 4 valori di temperatura ragionevolmente distanziati che si trovano nel dominio  $k_B T = [60, 70]$  keV, e disegna una curva continua che passa attraverso questi punti. [5]

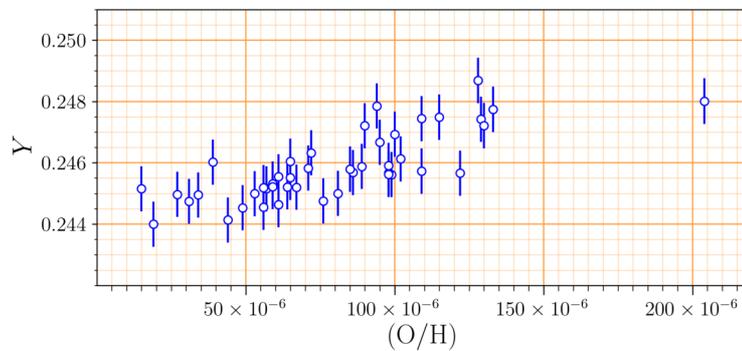
(T10.3b) Dal grafico trova  $k_B T_{\text{nuc}}$  (in keV) quando  $N_D = N_n$ . [1]

(T10.3c) Invece, ora supponi che tutti i neutroni liberi si combinino istantaneamente con i protoni a  $k_B T_{\text{nuc}}$  per formare Deuterio, e che tutto questo venga immediatamente convertito in Elio ( ${}^4_2\text{He}$ ). Calcola l'epoca o il tempo corrispondente della nucleosintesi,  $t_{\text{nuc}}$  (in s), per la formazione dell'Elio. [4]

(T10.4) Calcolare il valore di  $X_{n, \text{nuc}}$  immediatamente prima di  $t_{\text{nuc}}$ . [5]

(T10.5) L'abbondanza di Elio primordiale,  $Y_{\text{prim}}$ , è definita come la frazione della massa barionica totale nell'Universo che è legata in Elio subito dopo  $t_{\text{nuc}}$ . Ottieni una stima teorica per il valore di  $Y_{\text{prim}}$ . Ai fini di questo calcolo, supponi  $m_p \approx m_n$  e che la massa dell'Elio,  $m_{\text{He}} \approx 4m_n$ . [3]

(T10.6) L'abbondanza primordiale di Elio è molto difficile da misurare, poiché le stelle convertono continuamente l'Idrogeno in Elio nell'Universo. La quantità di conversione da parte delle stelle in una galassia è caratterizzata dalla densità numerica relativa dell'Ossigeno (che è prodotto solo dalle stelle) rispetto all'idrogeno, indicata come (O/H), nella galassia. Un estratto delle misurazioni di (O/H) e dell'abbondanza di Elio,  $Y$ , per diverse galassie è tracciata di seguito.



Usa tutti i punti in questo grafico (che è riprodotto nel foglio riassuntivo delle risposte) per rispondere alle seguenti domande.

(T10.6a) Stima  $Y$  per una galassia nana compatta blu con un valore di  $(\text{O}/\text{H})=1.75 \times 10^{-4}$ . [2]

(T10.6b) Calcola la pendenza  $dY/d(\text{O}/\text{H})$  della linea retta adattata ai dati sopra. [2]

(T10.6c) Stima l'abbondanza primordiale di Elio,  $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ , basandoti sulle osservazioni sopra. [2]

(T10.7) Lo scostamento tra  $Y_{\text{prim}}$  e  $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$  può essere compensato modificando il rapporto barione-fotone  $\eta$ . [3]  
 Quando  $\eta$  viene diminuito, come indicato da  $\downarrow$  nel foglio riassuntivo delle risposte, indica l'aumento ( $\uparrow$ ) o la diminuzione ( $\downarrow$ ) in  $N_D/N_n(T)$ ,  $T_{\text{nuc}}$  (quando  $N_D = N_n$ ),  $t_{\text{nuc}}$ ,  $X_{n, \text{nuc}}$ , e  $Y_{\text{prim}}$  nelle caselle fornite nel foglio riassuntivo delle risposte.

**(T11) Stelle attraverso grafici**

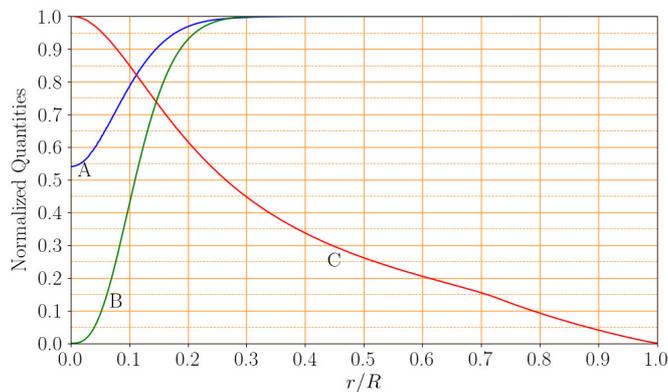
**[50 punti]**

Le stelle possono essere ben approssimate come oggetti a simmetria sferica, e quindi la distanza radiale  $r$  dal centro può essere scelta come unica variabile indipendente nella modellazione degli interni stellari. La massa contenuta in una sfera di raggio  $r$  è indicata con  $m(r)$ . La luminosità  $l(r)$  è definita come l'energia netta che fluisce verso l'esterno attraverso una superficie sferica di raggio  $r$  per unità di tempo. Altre grandezze di interesse, ad esempio la densità  $\rho(r)$ , la temperatura  $T(r)$ , la frazione di massa dell'idrogeno  $X(r)$ , la frazione di massa dell'elio  $Y(r)$  e l'energia nucleare generata per unità di massa per unità di tempo  $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$ , sono considerate funzioni di  $r$ . In questo problema trascureremo gli effetti della diffusione e dell'assestamento gravitazionale degli elementi all'interno della stella.

Il simbolo "log" si riferisce al logaritmo in base 10. Il problema è composto da tre parti indipendenti.

**(T11.1) Parte 1: Dentro una stella**

Il grafico sottostante mostra la variazione di tre grandezze strutturali, A, B e C, in funzione del raggio frazionario  $r/R$  in un modello stellare di massa  $1 M_{\odot}$  ed età 4 Gyr, dove  $R$  è il raggio della fotosfera della stella. I valori della frazione di massa dell'elio sulla superficie (fotosferica),  $Y_s$ , e della metallicità (frazione di massa di tutti gli elementi più pesanti dell'elio) sulla superficie (fotosferica),  $Z_s$ , della stella sono dati da  $(Y_s, Z_s) = (0.28, 0.02)$ . Tutte le grandezze mostrate nei grafici sono normalizzate rispetto ai rispettivi valori massimi.



(T11.1a) Identifica le tre quantità A, B e C in modo univoco tra le cinque possibilità: **[6]**

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Scrivi A/B/C nelle caselle accanto alle quantità appropriate nel foglio di risposta riassuntivo. Non è necessaria alcuna giustificazione per la tua risposta.)

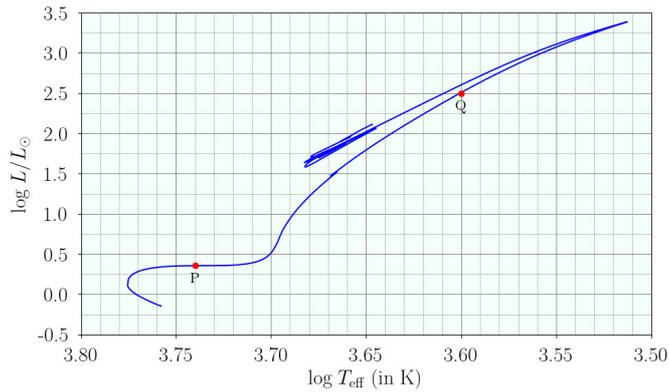
(T11.1b) Qual è la frazione di massa dell'elio al centro,  $Y_c$ , della stella? **[3]**

(T11.1c) Disegna le due quantità rimanenti dall'elenco di cinque (che non sono state identificate come curve A, B o C) fornite in (T11.1a), come funzioni di  $r/R$  sullo stesso grafico nel foglio di risposta riassuntivo, ed etichettale in base alle rispettive quantità. **[5]**

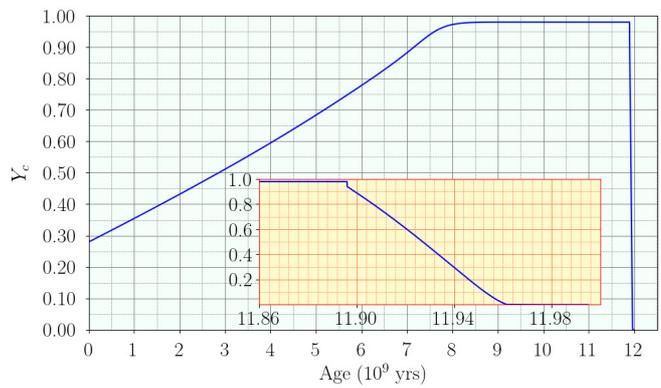
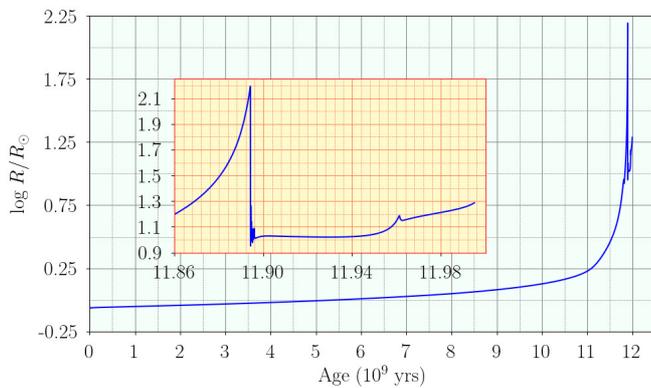
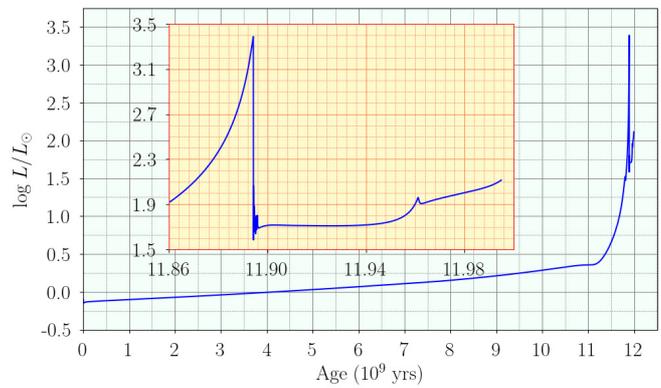
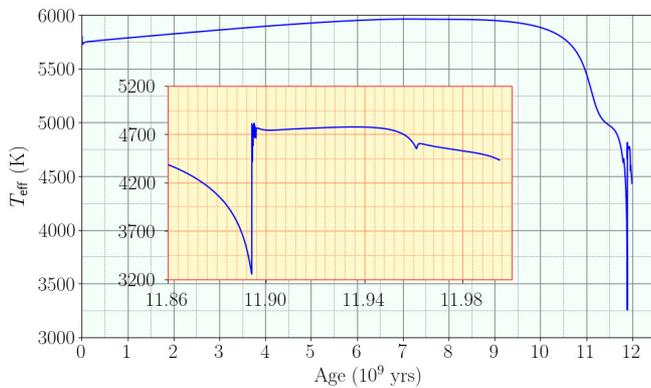
**(T11.2) Parte 2: Stelle in evoluzione**

Consideriamo l'evoluzione di una stella  $1M_{\odot}$  la cui composizione iniziale uniforme è data dalle frazioni di massa dell'elio,  $Y_0 = 0.28$ , e dei metalli,  $Z_0 = 0.02$ . Le figure sottostanti mostrano la variazione delle diverse quantità globali di questa stella mentre evolve dalla ZAMS (Zero Age Main Sequence) fino alla fine della combustione dell'elio nel suo nucleo.

Il grafico sottostante mostra il percorso evolutivo della stella sul diagramma HR (grafico di  $\log L/L_{\odot}$  vs  $\log T_{\text{eff}}$ , dove  $L$  è la luminosità superficiale e  $T_{\text{eff}}$  è la temperatura effettiva).



La figura sottostante presenta quattro grafici che mostrano la variazione di  $T_{\text{eff}}$  (in K),  $L$  (rappresentato come  $\log L/L_{\odot}$ ),  $R$  (rappresentato come  $\log R/R_{\odot}$ ), e  $Y_c$  con l'età (in  $10^9$  anni) della stessa stella. In ciascuno di questi quattro grafici, gli inserti mostrano le variazioni delle rispettive quantità in dettaglio tra le età di  $11.86 \times 10^9$  anni e  $12.00 \times 10^9$  anni, per maggiore chiarezza.



Utilizza questi grafici per rispondere alle domande seguenti.

- (T11.2a) Qual è la durata approssimativa della sequenza principale,  $t_{\text{MS}}$  (in anni), della stella? [1]
- (T11.2b) Qual è la durata approssimativa,  $\Delta t_{\text{He}}$  (in anni), per la quale la stella brucia elio nel suo nucleo? [1]
- (T11.2c) Quale frazione,  $f_{\text{H}}$ , della quantità iniziale di idrogeno al suo centro è stata bruciata quando la luminosità della stella è  $1 L_{\odot}$ ? [3]
- (T11.2d) Qual è il raggio della stella,  $R_1$  (in unità di  $R_{\odot}$ ) quando 60% della quantità iniziale di idrogeno al suo centro è stato bruciato? [3]

(T11.2e) Quali sono i raggi della stella,  $R_P$  e  $R_Q$  (in unità di  $R_\odot$ ), corrispondenti alle sue [4] posizioni P e Q, rispettivamente, come indicato sul diagramma HR?

(T11.3) **Parte 3: Distribuzione della massa all'interno di una stella**

L'equazione che governa la distribuzione della massa all'interno di una stella è data da

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

. Sarebbe conveniente esprimere questa equazione in termini di tre variabili adimensionali, ovvero la massa frazionaria,  $q$ , il raggio frazionario,  $x$ , e la densità relativa,  $\sigma$ , che definiamo come

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

dove  $M$  e  $R$  sono rispettivamente la massa e il raggio totali della stella, e  $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$  è la densità media della stella. Per la stella che considereremo in questa parte, vengono fornite le seguenti informazioni:

- La densità centrale  $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$
- Metà della massa della stella è contenuta nel 25% interno del suo raggio totale, mentre il 70% della sua massa è contenuta nel 35% interno del suo raggio totale.

In tutte le parti successive di questa domanda sarà sufficiente arrotondare tutti i coefficienti numerici derivati entro 0.005.

(T11.3a) Esprimere l'equazione precedente che descrive la dipendenza della massa dal raggio in [2] termini di  $x$ ,  $\frac{dq(x)}{dx}$  e  $\sigma(x)$ .

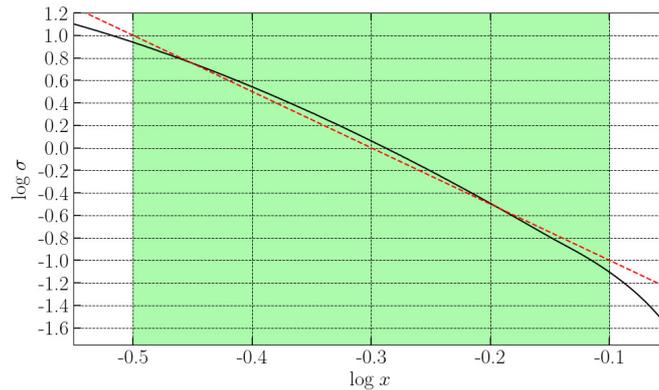
Per ottenere la distribuzione della massa in funzione del raggio, dobbiamo conoscere il profilo di densità all'interno della stella. Ai fini di questo problema, descriveremo la variazione di densità in funzione del raggio mediante forme approssimate in due domini di  $x$ :

- la parte interna della stella:  $0 \leq x \leq 0.32$
- la parte centrale della stella:  $0.32 < x < 0.80$

Non facciamo alcuna approssimazione per la parte più esterna, cioè  $0.80 \leq x \leq 1.00$ .

(T11.3b) **Approssimazione per la parte centrale :**

La variazione di  $\log \sigma$ , in funzione di  $\log x$  nella parte centrale della stella è mostrata (dalla curva nera) nel grafico sottostante. Faremo un'approssimazione lineare (mostrata come una linea rossa tratteggiata nel grafico) per  $\log \sigma$  in funzione di  $\log x$  nell'intervallo  $-0.5 < \log x < -0.1$ , ovvero  $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$  (mostrato dall'area colorata in verde). Inoltre, approssimeremo la pendenza di questa retta con l'intero più vicino.



Utilizzare questa approssimazione per scrivere un'espressione per  $\sigma(x)$  come funzione di  $x$  nell'intervallo  $0.32 < x < 0.80$ . [4]

(T11.3c) Utilizzare il risultato di (T11.3b) per derivare un'espressione per  $q(x)$  nell'intervallo  $0.32 < x < 0.80$ . [6]

(T11.3d) **Approssimazione per la parte interna :**

Nella parte interna della stella ( $0 \leq x \leq 0.32$ ), la densità può essere approssimata come una funzione lineare del raggio, ovvero  $\sigma(x) = Ax + B$ , dove  $A, B$  sono costanti. Determina  $A$  e  $B$ , e quindi ottieni un'espressione per  $q(x)$  nell'intervallo  $0 \leq x \leq 0.32$ . Si noti che le approssimazioni adottate nella parte precedente e in questa parte possono portare a piccole discontinuità nella densità o nella massa in  $x = 0.32$ . [8]

(T11.3e) Le espressioni per  $q(x)$  ottenute nelle parti (T11.3c) e (T11.3d) sono approssimazioni che descrivono abbastanza bene la variazione della massa in funzione del raggio, ma solo in regioni specifiche della stella. Per l'intervallo  $0.80 \leq x \leq 1$  (per il quale non abbiamo derivato alcuna espressione), è possibile utilizzare un'estrapolazione appropriata dalla regione adiacente. Si utilizzino queste espressioni approssimate e i dati forniti per tracciare una curva regolare (senza discontinuità né in  $q(x)$  né nella sua derivata) per  $q(x)$  in funzione  $x$  per l'intera stella ( $0 \leq x \leq 1$  che rappresenti la variazione della massa in funzione del raggio). [4]

**(T12) Radiazione di Hawking dai Buchi Neri**

[50 punti]

(T12.1) Un buco nero (BH) si forma tipicamente dal collasso gravitazionale di una stella massiccia alla fine del suo ciclo di vita fino a un punto chiamato singolarità. A causa della gravità estrema di un tale oggetto, nulla che entri nel cosiddetto orizzonte degli eventi (una superficie sferica con  $r = R_{SC}$ , dove  $r$  è la distanza dalla singolarità) è in grado di sfuggire. Qui,  $R_{SC}$  è indicato come il raggio di Schwarzschild.

(T12.1a) **Modellazione dell'origine della radiazione di Hawking:** Considera una coppia di particelle, ciascuna con massa  $m$ , prodotte su entrambi i lati dell'orizzonte del BH. Una particella è leggermente al di fuori dell'orizzonte a  $r \approx R_{SC}$ , mentre l'altra particella è all'interno dell'orizzonte a  $r = \kappa R_{SC}$ . Supponi che l'energia totale di una particella sia la somma della sua energia di massa a riposo  $mc^2$  e dell'energia potenziale gravitazionale dovuta al BH.

Determina il valore di  $\kappa$  per cui la coppia di particelle ha energia totale zero. [4]

(T12.1b) **Temperatura di un buco nero:** Se la particella prodotta al di fuori dell'orizzonte nel processo sopra descritto ha abbastanza energia cinetica, può sfuggire al BN in un processo chiamato radiazione di Hawking. Quella all'interno dell'orizzonte, che ha energia negativa, viene assorbita e diminuisce la massa del BN.

Si assume che tutta la radiazione di Hawking sia composta da fotoni con uno spettro di corpo nero che raggiunge il picco alla lunghezza d'onda  $\lambda_{bh} \approx 16R_{SC}$ . È noto che per un BN di massa solare,  $R_{SC, \odot} = 2.952$  km.

Ottieni un'espressione per la temperatura,  $T_{bh}$ , del BN corrispondente a questa [4]  
radiazione di corpo nero, in termini della sua massa  $M_{bh}$  e delle costanti fisiche. Calcola il raggio di Schwarzschild,  $R_{SC, 10\odot}$ , e la temperatura,  $T_{bh, 10\odot}$ , per un BN con massa  $10 M_{\odot}$ .

(T12.1c) **Perdita di massa di un buco nero:** Supponiamo che la radiazione di Hawking venga emessa dall'orizzonte degli eventi.

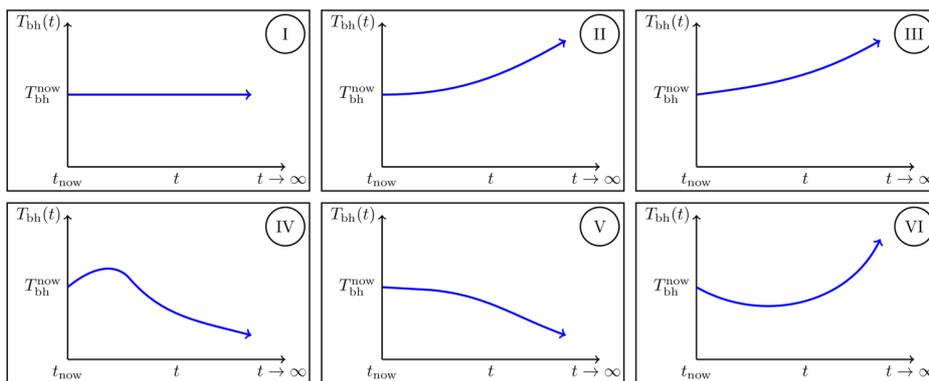
Utilizzando l'equivalenza massa-energia, ottenere un'espressione per il tasso di perdita di massa,  $dM_{bh}(t)/dt$ , in termini della massa  $M_{bh}(t)$  del BH e delle costanti fisiche.

Quindi, si proceda a ricavare un'espressione per  $M_{bh}(t)$  per un BH con massa iniziale [8]  
 $M_0$  e rappresentare graficamente  $M_{bh}(t)$  come funzione di  $t$  da  $M_{bh} = M_0$  a  $M_{bh} = 0$ .

(T12.1d) **Vita di un buco nero:** Ricavare un'espressione per la durata della vita di un BN  $\tau_{BH}$  con [3]  
massa iniziale  $M_0$  che evapora completamente a causa della radiazione di Hawking, in termini di  $M_0$  e costanti fisiche. Calcolare la questa durata  $\tau_{bh, 10\odot}$  (in secondi) per un buco nero con  $M_0 = 10 M_{\odot}$ .

(T12.1e) **Buco nero in un bagno di radiazione CMB:** Considera un buco nero isolato nello spazio, [6]  
lontano da altri corpi, con la temperatura  $T_{bh}^{now}$ , circondato dal fondo cosmico a microonde (CMB) che ha una temperatura  $T_{cmb}^{now} = 2.7$  K. Il buco nero può aumentare di massa assorbendo la radiazione CMB e perdere massa tramite la radiazione di Hawking.

Tenendo conto dell'espansione accelerata dell'Universo, identifica quale delle seguenti figure mostra l'evoluzione temporale a lungo termine di  $T_{bh}$  nei seguenti tre casi:  
(X)  $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$ , (Y)  $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$ , (Z)  $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$ .



Indica la tua risposta segnando la casella appropriata (solo una) per ciascun caso X, Y o [6]  
Z nella Tabella fornita nel foglio riassuntivo delle risposte corrispondente al numero della figura appropriata.

(T12.2) I buchi neri primordiali (PBH) di massa molto più piccola possono formarsi nell'Universo [6]  
primordiale. Tutte le seguenti domande sono relative ai PBH. Qui, qualsiasi processo che aumenti la massa del buco nero può essere trascurato.

(T12.2a) **PBH che evaporano nell'epoca attuale:** Come avrai notato dalle risposte alle domande precedenti, i buchi neri di massa paragonabile al Sole impiegherebbero molto tempo per evaporare. Tuttavia, poiché i PBH possono avere una massa molto più piccola, potremmo essere in grado di vederli evaporare in tempi più ristretti.

Trova la massa iniziale  $M_{0, \text{PBH}}$  (in kg), il raggio di Schwarzschild  $R_{\text{SC, PBH}}$  (in m) e la temperatura  $T_{\text{PBH}}$  (in K) di un buco nero che potrebbe evaporare completamente, cioè quelli con una durata  $\tau_{\text{PBH}} = 14$  miliardi di anni. [4]

(T12.2b) **Formazione di un PBH:** Nell'Universo primordiale dominato dalla radiazione, il fattore di scala varia come  $a(t) \sim t^{1/2}$ . In quest'era, i PBH si formano a causa del collasso di tutta l'energia contenuta in una regione di dimensione fisica  $ct$ , dove  $t$  è l'età dell'Universo in quel momento.

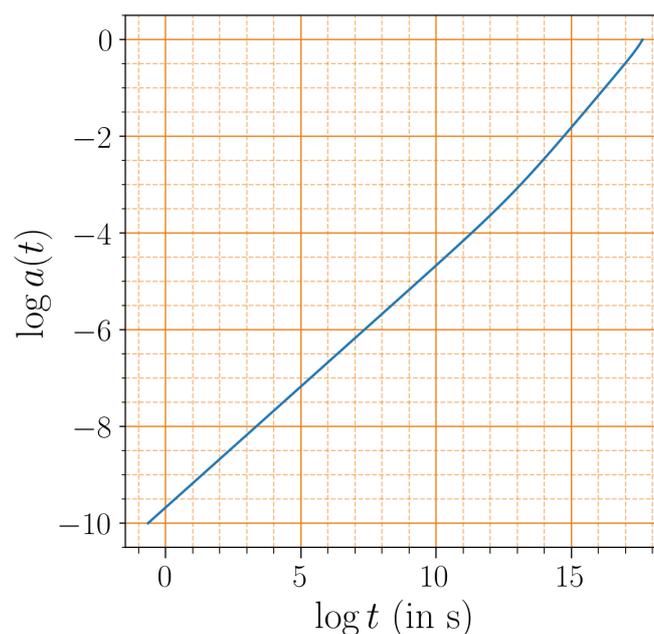
Un PBH con massa di  $1 \times 10^{12}$  kg si forma quando l'età dell'Universo è circa  $1 \times 10^{-23}$  s. Calcolare l'età dell'Universo,  $t_{20}$ , quando si forma un PBH di massa  $1 \times 10^{20}$  kg. [6]

(T12.2c) **Spettro osservato della radiazione di Hawking da PBH:** Considera un PBH di massa iniziale  $1 \times 10^{10}$  kg che evapora completamente alla fine della sua vita  $\tau_{\text{PBH}}$ . Per questa parte, supponi per semplicità che la maggior parte della radiazione di Hawking venga emessa in questo momento, con una temperatura corrispondente alla sua massa iniziale. Inoltre, considera che il fattore di scala dell'Universo evolva come  $a(t) \sim t^{2/3}$ .

Calcola la lunghezza d'onda di picco di questa radiazione di Hawking come osservata sulla Terra,  $\lambda_{\text{earth}}$ , nell'epoca attuale (a  $t = 14$  miliardi di anni). [5]

(T12.2d) **Radiazione cosmica ad alta energia da PBH:** ora supponiamo che la radiazione di Hawking emessa in un dato istante  $t$  corrisponda a fotoni emessi con un'energia  $k_B T_{\text{bh}}(t)$ . Inoltre, la temperatura più alta possibile per un buco nero è la temperatura di Planck  $T_{\text{Planck}}$  dove  $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$  GeV.

L'evoluzione del fattore di scala su scale temporali rilevanti è mostrata nella figura seguente. Il fattore di scala odierno è impostato a 1.  $t(s)$  sull'asse del tempo rappresenta l'età dell'universo in secondi.



Se sulla Terra viene osservato un fotone con un'energia di  $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$  eV, [10]  
determinare il valore più grande e più piccolo possibile della massa iniziale del PBH  
(rispettivamente  $M_0^{\text{max}}$  e  $M_0^{\text{min}}$ ) che potrebbe essere responsabile di questo fotone.