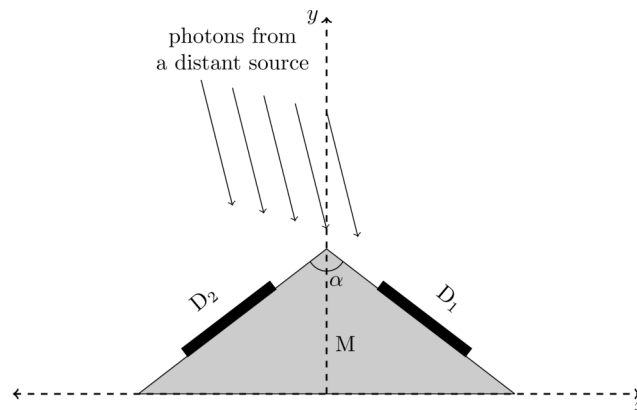


10 نمره	(T01) - ماموریت داکشا
---------	-----------------------

«داکشا» یک ماموریت پیشنهادی هند است که شامل دو ماهواره S_1 و S_2 است در مدار دایره‌ای یکسان با شعاع $r = 7000 \text{ km}$ اما با اختلاف فاز 180° درجه به دور زمین می‌چرخند. هر یک از ماهواره‌های داکشا از چندین آشکارساز مستطیلی مسطح استفاده می‌کنند.

برای درک چگونگی مکان‌یابی یک منبع در آسمان، از یک مدل ساده‌شده از ماموریت داکشا استفاده خواهیم کرد. فرض کنید ماهواره S_1 فقط دو آشکارساز یکسان D_1 و D_2 دارد که هر کدام دارای مساحت $A = 0.50 \text{ m}^2$ هستند و به یک پایه کدر M متصل شده‌اند، همانطور که در شکل زیر نشان داده شده است. آشکارسازها به طور متقارن در اطراف محور y در صفحات عمود بر صفحه $x-y$ قرار دارند و با یکدیگر زاویه $\alpha = 120^\circ$ درجه می‌سازند.



5 نمره	(T01.1)
--------	---------

هنگام مشاهده یک منبع دور واقع در صفحه $x-y$ ، آشکارساز D_1 توان $P_1 = 2.70 \times 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{s}}$ و آشکارساز D_2 توان $P_2 = 4.70 \times 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{s}}$ را ثبت می‌کنند.

زاویه η که زاویه ایجاد شده بین بردار اشاره‌کننده موقعیت منبع، از ماهواره به سمت منبع، با محور مثبت y است را تخمین بزنید. جهت افزایش زاویه از محور مثبت y بر خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌باشد.

یک پالس واحد از یک منبع دور (نه لزوماً در صفحه $x-y$) را در نظر بگیرید که توسط هر دو ماهواره S_1 و S_2 ثبت شده است. زمان پالس‌های ثبت شده توسط S_1 و S_2 به ترتیب t_1 و t_2 می‌باشد.

5 نمره	(T01.2)
--------	---------

اگر $t_1 - t_2 = 10.0 \pm 0.1 \text{ ms}$ اندازه‌گیری شده باشد، کسری از کل کره سماوی، f ، را که راستای منبع ممکن است در آن قرار داشته باشد تعیین کنید.

10 نمره	(T02) - جشن ماکار-سنکراتی
---------	---------------------------

جشن ماکار-سنکراتی در کشور هند، در هر سال، در تاریخ 14 ژانویه (بیست و چهار یا بیست و پنج دی) برگزار می‌شود. در این روز از سال از دید زمین، خورشید در حال ورود به محدوده‌ی صورت فلکی دایره‌البروجی جدی هست. (ماکار به معنای جدی و سنکراتی به معنای ورود است)

در گذشته و در سال‌های بسیار دور، خورشید هنگام ورود به جدی در انقلاب زمستانی (برای نیم کره شمالی) قرار می‌گرفته است. این اتفاق در 21 دسامبر یا یک دی ماه اتفاق می‌افتد.

3 نمره	(T02.1)
--------	---------

با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سوال، سالی را پیدا کنید (y_c) که جشن ماکار-سنکراتی در آن سال، در 1 دی ماه برگزار می‌شده است. جواب نهایی را بر حسب سال میلادی بنویسید.

3 نمره	(T02.2)
--------	---------

در سال 2006 (1384) و در تاریخ 14 ژانویه (24 دی) در ساعت 11:50:13 (یازده و پنجاه دقیقه و سیزده ثانیه) خورشید وارد مرز صورت فلکی جدی شده است.

بعد از گذشت 7 سال نجومی، یعنی در سال 2013، در چه تاریخ (D_{enter}) و در چه ساعتی (t_{enter}) خورشید وارد مرز صورت فلکی جدی شده است؟

4 نمره	(T02.3)
--------	---------

به صورت واقعی برگزاری این جشن در روزی انجام خواهد شد که خورشید قبل از غروب، وارد صورت فلکی جدی شده باشد. فرض کنید که غروب خورشید در ماه ژانویه (دی ماه) همواره در ساعت 18:30 (هجده و سی دقیقه) به وقت محلی در بمبئی صورت می‌گیرد.

در جدولی که در پاسخنامه قرار دارد با علامت یک تیک (✓) در هر سطر مشخص کنید در هر سال (از 2006 تا 2013) این جشن در کدام یک از روزهای زیر برگزار شده است؟

14 ژانویه (24 یا 25 دی) یا 15 ژانویه (25 یا 26 دی) یا 16 ژانویه (26 یا 27 دی) چون پارسال کیسه شمسی بود.

(T03) - امواج گرانشی - 15 نمره

سیاه چاله های دوتایی در حال چرخش، امواج گرانشی تولید می کنند. دو سیاه چاله در کهکشان ما با جرم های $M_\odot$ و $M = 36M_\odot$ را در نظر بگیرید که در مدارهای دایره ای به دور مرکز جرم خود می چرخند. $m = 29$

(T03.1)	5 نمره
---------	--------

با فرض قانون گرانش نیوتنی، عبارتی برای فرکانس زاویه ای (ω_{ini}) مدارهای سیاه چاله در زمانی که جدایی اولیه ی بین سیاه چاله ها 4.0 برابر مجموع شعاع شوارتزشیلد آنها باشد، بر حسب فقط m ، M ، و ثابت های فیزیکی، استخراج کنید.

مقدار عددی ω_{ini} را محاسبه کنید (بر حسب رادیان بر ثانیه).

(T03.2)	4 نمره
---------	--------

در نسبیت عام، سیاه چاله های اینچینی که به دور یکدیگر می چرخند، امواج گرانشی با فرکانس f_{GW} منتشر می کنند به طوریکه $\omega_{GW} = 2\pi f_{GW}$. در اثر این تابش، شعاع مداری سیاه چاله کوچک شده و در نتیجه فرکانس چرخش f_{GW} تا بینهایت افزایش می یابد. نرخ تغییر فرکانس f_{GW} چنین است.

$$\frac{df_{GW}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^\beta M_{chirp}^{\alpha/3} f_{GW}^{\delta/3},$$

$$M_{chirp} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}} \text{ که در آن "جرم چریب" نامیده می شود.}$$

در این قسمت ابتدا مقادیر α و β و δ در فرمول بالا را بیابید.

(T03.3)	6 نمره
---------	--------

فرض کنید امواج گرانشی مرتبط با این رویداد برای اولین بار در زمان $t_{ini} = 0$ آشکارسازی شدند که منطبق بر فاصله ی جدایی اولیه ای است که در قسمتهای قبلی گفته شده است یعنی چهار برای مجموع شعاع شوارتزشیلد. با انتگرال گیری از فرمول بالا، عبارتی را برای زمان مشاهده شده ادغام کامل سیاه چاله ها (t_{merge}) بر حسب فقط ω_{ini} و M_{chirp} و ثابت های فیزیکی محاسبه کنید. فرض کنید که f_{GW} از مقدار اولیه اش تا بی نهایت تغییر میکند.

مقدار عددی t_{merge} را محاسبه کنید (بر حسب ثانیه).

(T04) جذب بالمر - 15 نمره

یک ستاره رشته اصلی (Main Sequence) را در نظر بگیرید که درون یک سحابی قرار دارد و قدر ظاهری آن در باند V برابر با 11.315 است. ناحیه یونیده سحابی در نزدیکی ستاره، خطوط طیفی $H\alpha$ و $H\beta$ را گسیل می‌کند؛ طول موج آن‌ها به ترتیب 0.6563 میکرومتر و 0.4861 میکرومتر است. نسبت نظری شار این دو خط به صورت زیر پیش‌بینی شده است:

$$\frac{f_{H\alpha}}{f_{H\beta}} = 2.86$$

با این حال، هنگامی که این تابش از بخش بیرونی سرد و غبارآلود سحابی عبور می‌کند، شار مشاهده شده خطوط نشری $H\alpha$ و $H\beta$ برابر با موارد زیر است:

$$f_{H\alpha} = 6.8 \times 10^{-15} \frac{W}{m^2}$$

$$f_{H\beta} = 1.06 \times 10^{-15} \frac{W}{m^2}$$

مقدار خاموشی در طول موج لامبدا که با A_λ نشان داده می‌شود، به صورت زیر با طول موج رابطه دارد:

$$A_\lambda = \kappa_\lambda E(B - V)$$

که در آن $\kappa(\lambda)$ ضریب جذب در طول موج لامبدا است و $E(B - V)$ مقدار افزونگی رنگ را در فیلترهای رنگی B و V نشان می‌دهد. تابعیت ضریب جذب به طول موج (بر حسب μm) به صورت زیر داده می‌شود:

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

که در آن $R_V = \frac{A_V}{E(B-V)} = 3.1$ است. با توجه به فرمول‌های بالا به سوالات زیر پاسخ دهید.

3 نمره	(T04.1)
--------	---------

مقدار $\kappa(H\beta)$ و $\kappa(H\alpha)$ را بیابید.

4 نمره	(T04.2)
--------	---------

مقدار افزایش قدر و نسبت $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$ را به دست آورید.

6 نمره	(T04.3)
--------	---------

با توجه به داده‌های صورت سوال، مقدار خاموشی $A_{H\alpha}$ و $A_{H\beta}$ در هر طول موج $H\alpha$ و $H\beta$ را به طور جداگانه به دست آورید.

2 نمره	(T04.4)
--------	---------

حال، مقدار خاموشی (A_V) را به دست آورید و سپس به کمک آن قدر مرئی واقعی (بدون جذب) m_{V0} ستاره در عدم حضور سحابی را پیدا کنید.

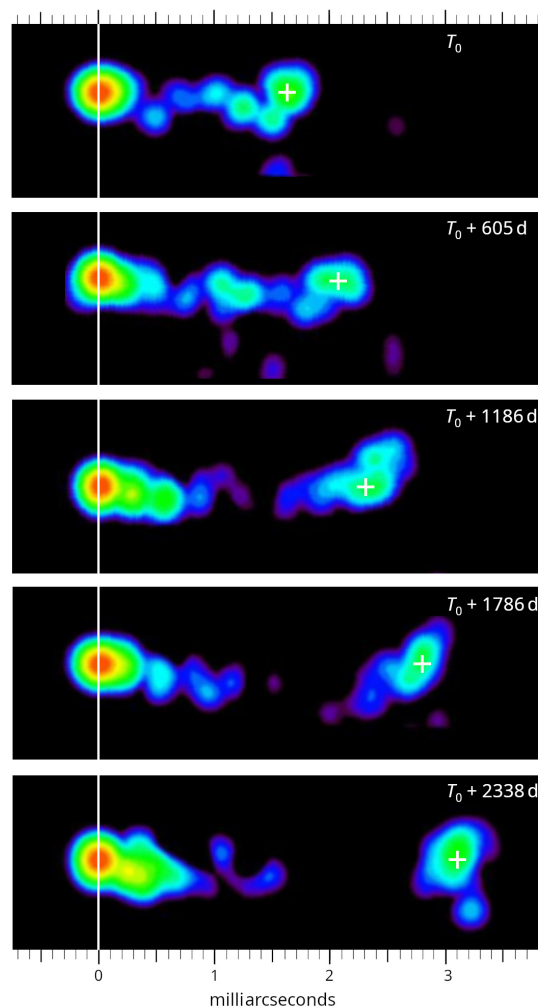
(T05) - کوزارها - 20 نمره

کوازار (اختروش) یک کهکشان فعال بسیار درخشان است که توسط یک سیاهچاله فوق العاده عظیم که جت های نسبیتی ساطع می کند، تغذیه می شود. شکل زیر مجموعه ای از تصاویر رادیویی از یک اختروش (در قرمزگرایی $z = 0.53$) و فاصله درخشندگی

$$D_L = 1.00 \times 10^{10} \text{ ly}$$

در زمان های مختلف را نشان می دهد.

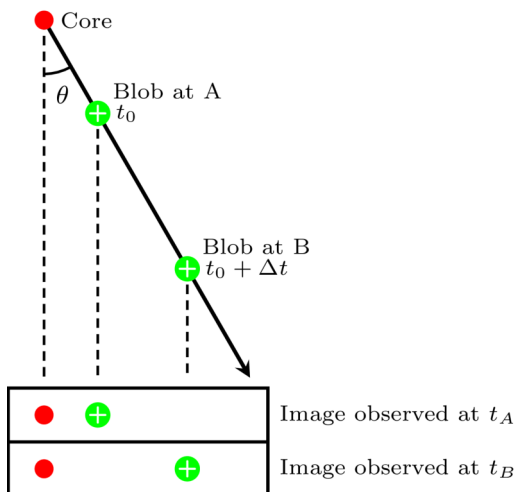
محل «هسته» با خط سفید عمودی نشان داده شده است، در حالی که یک جت، متشکل از یک «لکه» (با علامت + به رنگ سفید مشخص شده)، با گذشت زمان از آن دور می شود. هرکدام از تصاویر در شکل زیر زمان مشاهده را نشان می دهد (بالاترین تصویر مربوط به زمان T_0 و تصاویر پایینتر به ترتیب مشاهده در زمانهای بعدتر را نشان می دهد). مقیاس زاویه ای نیز در بالا و پایین شکل مشخص شده است.



(T05.1)	5 نمره
---------	--------

جدایی زاویه ای لکه ϕ_{blob} برحسب میلی ثانیه قوسی) و فاصله فیزیکی عرضی آن l_{blob} برحسب سال نوری) از هسته اختروش را برای هر مشاهده (مربوط به هر تصویر) تعیین کنید. سپس، سرعت ظاهری متوسط لکه (v_{app}) را به عنوان کسری از سرعت نور $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ محاسبه کنید.

جت اختروش در واقع با سرعت نسبیتی حرکت می کند، اما نه لزوماً در صفحه آسمان؛ به عنوان مثال، نسبت به خط دید یک ناظر دور (که با خطچین نشان داده شده است)، زاویه θ می سازد («زاویه دید»). برای این بخش و تمام بخشهای بعدی، انتقال به سرخ اختروش را نادیده بگیرید.



(T05.2)

نور ساطع شده توسط لکه در دو زمان مختلف t_0 (مربوط به موقعیت A) و $t_0 + \Delta t$ (مربوط به موقعیت B) به ترتیب در t_A و t_B به ناظر می‌رسد. بنابراین اختلاف زمان مشاهده شده برابر است با.

$$\Delta t_{app} = t_B - t_A$$

(T05.2a)

2 نمره

عبارتی برای نسبت $\frac{\Delta t_{app}}{\Delta t}$ بر حسب β و θ بیابید.

(T05.2a)

2 نمره

با استفاده از این نسبت، β_{app} را بر حسب β و θ بیان کنید.

(T05.3)

حرکت را فرا درخشان می‌نامیم (superluminal) اگر سرعت ظاهری از سرعت نور بیشتر باشد ($\beta_{app} > 1$)، و فرو درخشان می‌نامیم (subluminal) اگر سرعت ظاهری کمتر از سرعت نور باشد ($\beta_{app} < 1$).

(T05.3a)

4 نمره

به ازای $\beta_{app} = 1$ ، یک منحنی برای β به صورت تابعی از θ رسم کنید تا مرز حرکتی بین ناحیه ی فرودرخشان و فرادرخشان را مشخص کنید. ناحیه فرادرخشان را در نمودار با خطوط مورب سایه بزنید (///).

(T05.3b)

2 نمره

کمترین مقدار سرعت واقعی جت ($\beta_{low} = v_{low}/c$) را برای اینکه وقوع حرکت فرادرخشان اتفاق بیافتد را از روی نمودار پیدا کنید. همچنین زاویه مربوط به آن را نیز θ_{low} از روی نمودار بیابید.

(T05.4)	2 نمره
---------	--------

با توجه به عبارتهای بالا شرطی برای حداکثر زاویه دید، θ_{max} ، بیابید طوری که به ازای هر مقدار معین داده شده β_{app} شرط بتا کمتر از یک ممکن خواهد بود.

هسته یک کوازار، یعنی جسم فشرده مرکزی آن، به دلیل فرآیندهای داخلی، انتشارتابشی اش متغیر خواهد بود درست مانند ستارگان متغیر. اندازه (= شعاع) این ناحیه معمولاً حدود پنج برابر شعاع شوارزشیلد هسته در نظر گرفته می شود.

(T05.5)	3 نمره
---------	--------

مشخص شده است که مقیاس زمانی تغییرات تابش برآمده از هسته یک کوازار خاص حدود 1 ساعت است. حد بالایی، $M_{c,max}$ ، را برای جرم جسم فشرده مرکزی، بر حسب واحد جرم خورشید، بدست آورید.

(T06) - چرخش کهکشانی - 20 نمره

منحنی چرخش کهکشان ما را می توان با استفاده از اندازه گیری های سرعت خط دید ابرهای هیدروژن خنثی (HI) در امتداد طول های مختلف کهکشانی، که از طریق خط HI 21 سانتی متری مشاهده می شوند، تعیین کرد. یک ابر HI با طول جغرافیایی کهکشانی l را در نظر بگیرید که در فاصله R از مرکز کهکشانی (GC) و فاصله D از خورشید قرار دارد. خورشید را در فاصله $R_0 = 8.5 \text{ kpc}$ از مرکز کهکشانی در نظر بگیرید. فرض کنید که هم خورشید و هم ابر HI در مدارهای دایره ای در اطراف مرکز کهکشانی در صفحه کهکشانی قرار دارند و به ترتیب سرعت های زاویه ای Ω و Ω_0 و سرعت های چرخشی V و V_0 دارند.

مؤلفه های سرعت در راستای خط دید یا شعاعی (V_r) و سرعت عرضی یا عمود بر شعاع (V_t) ابر، همان طور که از خورشید مشاهده می شود، را می توان به صورت زیر نوشت:

$$V_r = (\Omega - \Omega_0) R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0) R_0 \cos l - \Omega D$$

از قطب شمال کهکشانی، چرخش کهکشان در جهت عقربه های ساعت است. در طول این مسئله، سرعت خط دید را هنگام دور شدن مثبت در نظر می گیریم و ابرها به عنوان اجرام نقطه ای در نظر گرفته می شوند.

(T06.1)

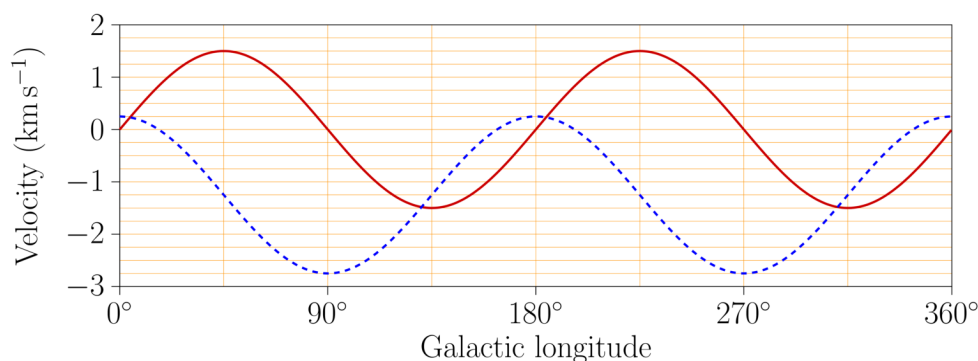
5 نمره

در نمودار ارائه شده در برگه پاسخنامه خلاصه، V_r را بر حسب D از $D = 0$ تا $D = 2R_0$ برای دو خط دید (1) $l = 45^\circ$ و (2) $l = 135^\circ$ رسم کنید. هر دو منحنی را چه خط باشد چه منحنی با مقدار l برچسب گذاری کنید.

(T06.2)

3 نمره

نمودار زیر میانگین مؤلفه های سرعت راستای دید (منحنی قرمز و ممتد) و سرعت عرضی (منحنی آبی، خط چین) ستارگان را در فاصله ۱۰۰ پارسک از خورشید، به صورت تابعی از طول جغرافیایی کهکشانی نشان می دهد.



با استفاده از نمودار، دوره تناوب مداری خورشید (P) به دور GC مرکز کهکشان را بر حسب مگا سال (Myr) تخمین بزنید.

(T06.3)

جان اورت نشان داد که در همسایگی خورشید ($D \ll R_0$)، اختلاف سرعت های زاویه ای ($\Omega - \Omega_0$) کوچک خواهد بود، و از این رومی توان تقریب مرتبه اول زیر را برای مؤلفه های سرعت در راستای دید و سرعت عرضی به دست آورد:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

که در آن A و B به عنوان ثابت های اورت شناخته می شوند.

دو حالت زیر را برای قسمت‌های بعد در نظر بگیرید:
 (I) منحنی چرخش مشاهده‌شده‌ی واقعی کهکشان، و
 (II) منحنی چرخش برای یک سناریوی فرضی که در آن کهکشان ماده تاریک ندارد و فرض می‌شود که کل جرم کهکشان در مرکز آن متمرکز شده است.

(2 نمره)

(T06.3a)

برای هر دو حالت، عباراتی برای مشتق سرعت مداری بر حسب شعاع در نزدیکی خورشید، $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ استخراج کنید.

(8 نمره)

(T06.3b)

A و B را با بسط دادن عباراتی، بر حسب V_0 ، R_0 و مشتق شعاعی سرعت مداری در نزدیکی خورشید، $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ به دست آورید.

(2 نمره)

(T06.3c)

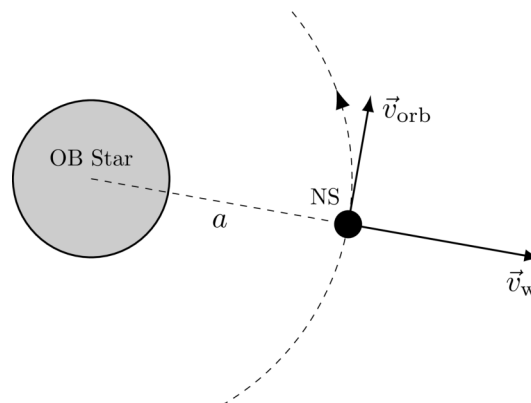
نسبت ثوابت اورت ($\frac{A}{B}$) برای دو حالت داده شده، (I) و (II)، به ترتیب به صورت F_I و F_{II} تعریف می‌شوند. مقدار عددی F_I و F_{II} را محاسبه کنید.

20 نمره	(T07) - ستاره نوترونی دوتایی
---------	------------------------------

در یک سیستم دوتایی شامل یک ستاره فشرده، که در آن ستاره همدم از لوب خود سرریز نمی‌کند، منبع اصلی برافزایش برای ستاره فشرده، باد ستاره‌ای از ستاره همدم است. این برافزایش ناشی از باد به ویژه در سیستم‌هایی که شامل یک ستاره از نوع اولیه (مانند یک ستاره O یا B که از این پس به عنوان ستاره OB نشان داده می‌شود) در کنار یک جسم فشرده مانند یک ستاره نوترونی (NS) در مدار با شعاع کوچک و فاصله نزدیک هستند، قابل توجه است.

چنین سیستم دوتایی ستاره‌ای NS-OB (یعنی یک ستاره OB است و یک ستاره نوترونی است) را در نظر بگیرید که در آن یک ستاره نوترونی با جرم $M_{NS} = 2M_{\odot}$ و شعاع $R_{NS} = 11km$ در مداری دایره‌ای به شعاع a حول مرکز ستاره OB با سرعت $v_{orb} = 1.5 \times 10^5 \frac{m}{s}$ در حال چرخش است (شکل زیر را ببینید). دقت کنید که در طول این مسئله فرض می‌شود که خروج جرم از ستاره OB به صورت متقارن کروی در همه جهات است و نرخ آن برابر است با:

$$\dot{M}_{OB} = 1.0 \times 10^{-4} \frac{M_{\odot}}{yr}$$



3 نمره	(T07.1)
--------	---------

شعاع برافزایشی، R_{acc} ، به عنوان فاصله‌ای اندازه گرفته شده از مرکز ستاره نوترونی به این صورت تعریف می‌شود: حداکثر فاصله از NS که در آن باد ذرات ساطع شده از ستاره ی همدم می‌تواند در دام ستاره نوترونی بیفتد. اگر سرعت باد ستاره‌ای در نزدیکی ستاره نوترونی (NS) برابر با $v_w = 3 \times 10^6 \frac{m}{s}$ باشد، R_{acc} را برای سیستم فوق، با توجه به داده‌های کافی داده شده در مسأله، بر حسب کیلومتر بیابید.

3 نمره	(T07.2)
--------	---------

حال، در نظر بگیرید تمام یک پوسته جرمی که به صورت باد ستاره‌ای از ستاره در جهات مختلف خارج می‌شود، به سمت ستاره نوترونی کشیده می‌شوند و وقتی در دام آن افتادند، به دور ستاره نوترونی برافزایش می‌کنند. اگر داشته باشیم $a = 0.5 AU$ ، آن گاه نرخ انتقال جرم از ستاره به ستاره نوترونی را بر حسب $M_{\odot} yr^{-1}$ به دست آورید. از فشار تابشی صرف نظر کنید.

(T07.3)

6 نمره

حال، این دفعه در نظر بگیرید وضعیتی باشد که سرعت ذرات باد رسیده از ستاره به ستاره نوترونی در فاصله a (یعنی در نزدیکی ستاره نوترونی NS) با سرعت مداری خود ستاره نوترونی NS قابل مقایسه باشد و نتوان از آن صرف کرد. در این شرایط، نرخ انتقال جرم از ستاره به ستاره ی نوترونی NS به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$$

که در آن $q = \frac{M_{NS}}{M_{OB}}$ و β برابر با زاویه ی بین دو راستا از دید ستاره نوترونی است. یک راستا همان راستای شعاعی است که ستاره نوترونی را به ستاره وصل می کند و راستای دیگر، راستای ریخته شدن جرم به درون ستاره نوترونی است. با فرض این که $M_{OB} \gg M_{NS}$ عبارتی برای تابع $f(\tan \beta, q)$ به دست آورید.

(T07.4)

ذرات باد ستاره ای به صورت شعاعی به سمت ستاره نوترونی NS حرکت می کنند. در نزدیکی ستاره نوترونی، به خاطر وجود میدان مغناطیسی

بزرگی $\vec{B}$ که در اطراف ستاره نوترونی وجود دارد، مانعی در برابر حرکت ذرات ایجاد می شود. این مانع ایجاد شده به خاطر حضور میدان مغناطیسی دارای فشاری برابر با $\frac{B^2}{2\mu_0}$ است. فرض می کنیم که ستاره نوترونی NS مانند یک دو قطبی مغناطیسی رفتار می کند و میدان مغناطیسی یک دو قطبی مغناطیسی را در اطراف خود ایجاد می کند. این میدان مغناطیسی در صفحه استوایی ستاره نوترونی، در فواصل دور از ستاره نوترونی یعنی $r \gg R_{NS}$ چنین تابعیتی بر حسب فاصله از ستاره نوترونی دارد

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{NS}}{r} \right)^3$$

که در آن B_0 برابر با میدان مغناطیسی روی صفحه استوایی ستاره نوترونی و در سطح ستاره نوترونی است. در نظر بگیرید که محور دو قطبی مغناطیسی کاملاً منطبق بر محور چرخش ستاره است و انحرافی ندارد.

(T07.4a)

1 نمره

با توجه به فشار مغناطیسی گفته شده، فشار مغناطیسی $P_{eq, mag}$ را در صفحه استوای ستاره نوترونی بر حسب پارامترهای B_0 ، R_{NS} و r و پارامترهای دیگر به دست آورید.

(T07.4b)

7 نمره

(T7.4b) فشار مغناطیسی وارد شده به ذرات باد ستاره ای از طرف ستاره نوترونی می تواند، آن ها را در یک فاصله از ستاره نوترونی متوقف کند. به بیشینه فاصله ای از ستاره نوترونی که ذرات باردار در صفحه استوایی ستاره نوترونی شروع به متوقف شدن می کنند شعاع کره مغناطیسی (magnetospheric radius) می گویند و آن را با R_m نشان می دهند. در نظر بگیرید سرعت باد ستاره ای از سرعت مداری ستاره نوترونی خیلی بیشتر است یعنی $v_w \gg v_{orb}$ و هم چنین اثرات مغناطیسی در $r > R_m$ قابل صرف نظر است. حال با شرط توقف ذکر شده، R_m را برابر با شعاع مرزی در دام افتادن ذرات یعنی R_{acc} قرار دهید و میدان مغناطیسی بحرانی را برای رخ دادن توقف ذرات پیدا کنید.

نمره 20

(T08) سایه‌ی سیاهچاله

تلسکوپ افق رویداد (EHT) تصویری از یک سیاهچاله‌ی ابرپرچرم در کهکشان M87 را ثبت کرده که در زیر و در سمت چپ آن را مشاهده می‌کنید.

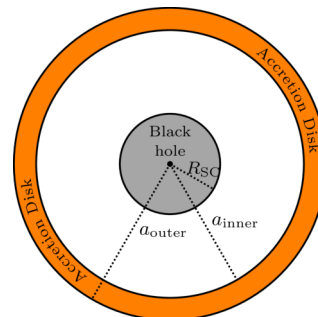
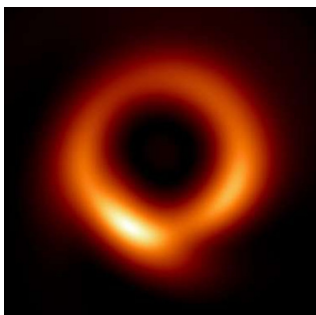
برای داشتن تصویری بهتر از تصویر، نکات زیر را در نظر بگیرید:

سیاهچاله‌ی مرکزی یک سیاهچاله‌ی غیرچرخان (ثابت) با تقارن کروی است که جرم آن برابر است با:

$$M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot},$$

یک دیسک (حلقه) تخت برافزایشی متقارن بدون جرم در اطراف سیاهچاله وجود دارد. شعاع داخلی دیسک برابر $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ و شعاع بیرونی دیسک برابر $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$ می‌باشد.

R_{SC} همان شعاع شوارتزشیلد سیاهچاله می‌باشد. تصویری ساده شده از سیاهچاله و دیسک برافزایشی آن نیز در تصویر سمت راست نشان داده شده است. (مقیاس تصویر صحیح نمی‌باشد)



فرض کنید تنها منبع تابش نور دیسک برافزایشی باشد. هر نقطه از دیسک برافزایشی نور را در تمامی جهات ساطع می‌کند. نور تحت تاثیر میدان گرانشی سیاهچاله حرکت خواهد کرد. مسیر حرکت فوتون‌های نور با دو معادله‌ی زیر مشخص خواهد شد:

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = E \quad ; \quad v_{\phi} = r\omega = \frac{L}{r}$$

پارامتر r مختصه‌ی شعاعی در دستگاه قطبی $(r \in (R_{\text{SC}}, \infty))$ و $\phi \in [0, 2\pi)$ مختصه‌ی زاویه‌ای در دستگاه قطبی است. و همچنین E و L به ترتیب ثوابتی مربوط به انرژی کل و تکانه‌ی زاویه‌ای کل هستند.

بدیهی است که اندازه‌ی سرعت شعاعی برابر است با:

$$v_r \equiv dr/dt$$

همچنین بدیهی است که v_{ϕ} برابر اندازه‌ی سرعت مماسی است.

بدیهی است که اندازه‌ی سرعت زاویه‌ای برابر است با:

$$\omega \equiv d\phi/dt$$

پارامتر برخورد b برای مسیر یک پرتوی نور را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$b = L/\sqrt{2E}$$

از اتساع و زمان و این چیزها صرف نظر کنید.

رابطه‌ی مفید دیگری که از مشتق اولین معادله به دست می‌آید نیز به صورت زیر است:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

(T08.1)	4 نمره
---------	--------

یک فوتون می‌تواند در مداری دایروی به دور سیاهچاله حرکت کند. با توجه به معادلات فوق و با فرض دایروی بودن مدار، شعاع مدار r_{ph} این فوتون را حساب کنید.

سپس پارامتر برخورد b_{ph} را برای آن محاسبه کنید.

پاسخ هر دو قسمت فوق باید بر حسب M و سایر ثوابت فیزیکی باشد.

(T08.2)	2 نمره
---------	--------

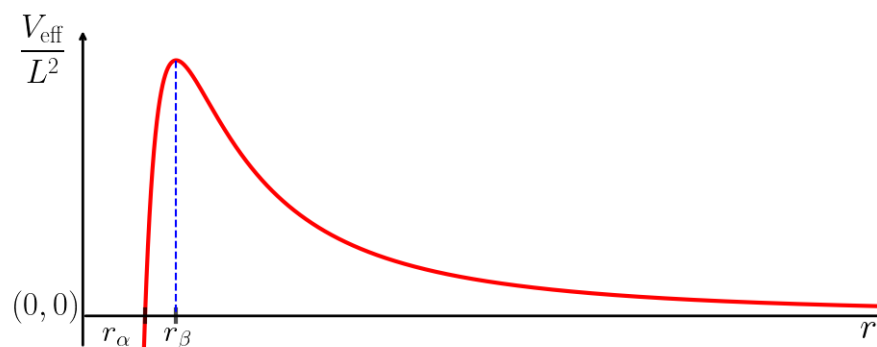
دوره تناوب T_{ph} چرخش فوتون به دور سیاهچاله را بر حسب ثانیه محاسبه کنید.

(T08.3)	
---------	--

اولین معادله‌ای که در صورت سوال داده شده و مربوط به سرعت شعاعی هست را می‌توان با معادله‌ی زیر که برای مسیر فوتون‌ها می‌باشد، مقایسه کرد. معادله به صورت زیر است:

$$\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$$

شکل نمودار معادله‌ی فوق به صورت زیر است. نمودار پارامتر V_{eff}/L^2 را بر حسب r نمایش می‌دهد.



(T08.3a)	2 نمره
----------	--------

در نمودار، 2 مقدار خاص برای شعاع مشخص شده است. r_β و r_α

معادله‌ای برای r_α و معادله‌ای برای r_β بر حسب M و دیگر ثوابت فیزیکی بیابید.

(T08.3b)

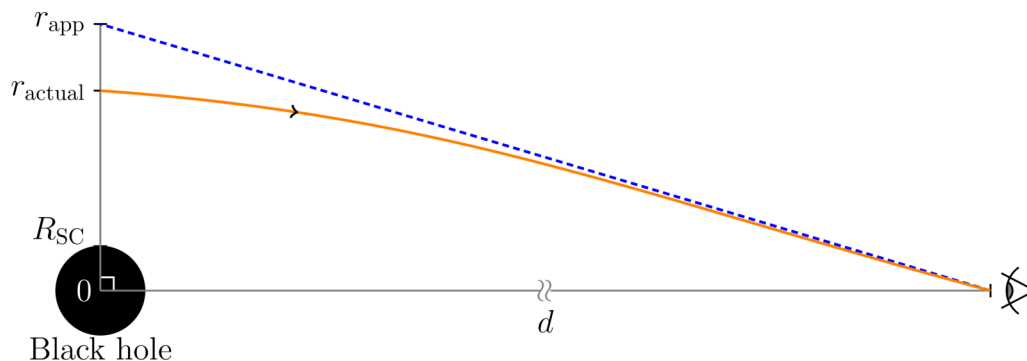
3 نمره

یک فوتون از دیسک برافزایشی به سمت سیاهچاله به سمت داخل حرکت می‌کند اما تحت شرایطی می‌تواند از گرانش سیاهچاله فرار کند و به فاصله‌ی بی‌نهایت برود. برای چنین فوتونی رابطه‌ای برای کوچکترین شعاع بازگشت r_t بر حسب M و دیگر ثوابت بیابید.

(T08.4)

5 نمره

یک پرتوی نور از شعاع r_{actual} از مرکز سیستم ساطع شده و به خاطر گرانش سیاهچاله دچار خم شدگی شدیدی می‌شود و به ناظر می‌رسد. مسیر قرمز، مسیر حرکت پرتو نور از محل ساطع شدن تا رسیدن به ناظر را نشان می‌دهد. فاصله‌ی سیاهچاله تا ناظر فاصله‌ی زیادی است که با d نشان داده شده است. شکل آن را در زیر مشاهده می‌کنید.



از دید ناظر به خاطر خم شدگی نور در مسیر، محلی که ناظر از نقطه‌ی ساطع شدن نور مشاهده می‌کند از محل واقعی آن بالاتر است و در شعاع $r_{\text{app}} \approx b$ نسبت به مرکز سیاهچاله دیده می‌شود و این مقدار تقریباً برابر پارامتر برخورد برای مسیر آن فوتون است. برای فوتون‌هایی که از دیسک برافزایشی ساطع می‌شوند و در فاصله‌ی واقعی $r = r_{\text{actual}}$ قرار دارند رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}} (1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

برای ناظری مثل ما که در فاصله‌ی بسیار دور قرار دارد، در حالی که قرص برافزایشی به صورت face-on قرار دارد، قرص برافزایشی به صورت دایروی و متقارن در صفحه‌ی آسمان دیده خواهد شد.

با توجه به موارد ذکر شده در مورد انحنای نور بر اثر گرانش، شعاع خارجی r_{outer} و شعاع بیرونی r_{inner} که از قرص برافزایشی از دید خودمان رصد خواهیم کرد را بر حسب واحد نجومی محاسبه کنید.

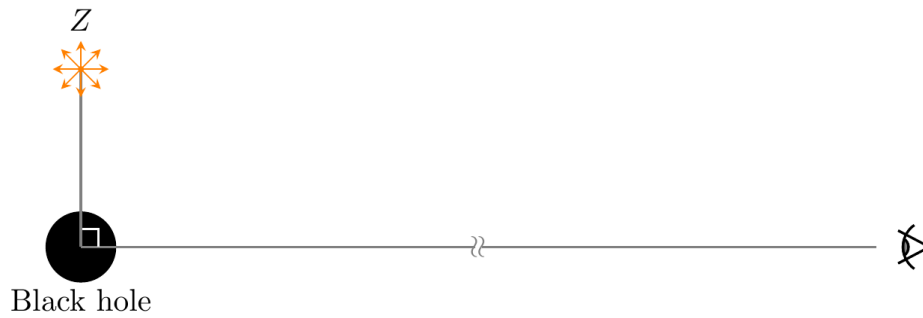
(T08.5)

یک سیاهچاله‌ی ابرپر جرم با جرم زیر و بدون دیسک برافزایشی را در نظر بگیرید.

$$M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$$

یک فوران (burst) قوی و کوتاه الکترومغناطیسی به مدت 5 ثانیه در نقطه‌ی Z در فاصله‌ی $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ از مرکز سیاهچاله رخ می‌دهد که در شکل زیر نمایش داده شده است. این فوران نور را در تمامی جهات ساطع می‌کند.

ناظری که در فاصله‌ی بسیار دور از سیاهچاله قرار دارد و با علامت چشم در سمت راست نشان داده شده است یک تصویر با نوردهی 60 ثانیه از سیاهچاله ثبت می‌کند.



برای هر کدام از سوالات 2 بخش زیر جواب مناسب را انتخاب کرده و در پاسخنامه با علامت تیک مشخص کنید:

(T08.5a)	2 نمره
----------	--------

تعداد مسیرهای ممکن برای اینکه نور از نقطه‌ی Z به ما برسد کدام گزینه است؟

A: حداکثر 1 مسیر

B: دقیقاً یک مسیر

C: دقیقاً 2 مسیر

D: بیشتر از 2 مسیر

(T08.5b)	2 نمره
----------	--------

تعداد تصاویر ممکن از فوران (EM burst) در نقطه‌ی Z که در تصویر ثبت شده با زمان نوردهی بالا دیده خواهد شد چند عدد خواهد بود؟

A: حداکثر 1 مسیر

B: دقیقاً یک مسیر

C: دقیقاً 2 مسیر

D: بیشتر از 2 مسیر

35 نمره	Atmospheric Seeing (T09)
---------	--------------------------

تلسکوپی آکروماتیک با یک عدسی شیئی محدب با قطر دهانه D برابر با 15 سانتی متر و فاصله‌ی کانونی f برابر با 200 سانتی متر به سمت ستاره‌ای در سراسر نشان رفته است.

1 نمره	(T09.1)
--------	---------

تصویر ستاره (که یک منبع نور نقطه‌ای است) روی صفحه‌ی کانونی تشکیل شده است و به خاطر پراش و توان تفکیک، تصویر نه یک نقطه بلکه به صورت یک دایره تشکیل شده است. طول قطر این دایره را بر حسب متر محاسبه کنید.

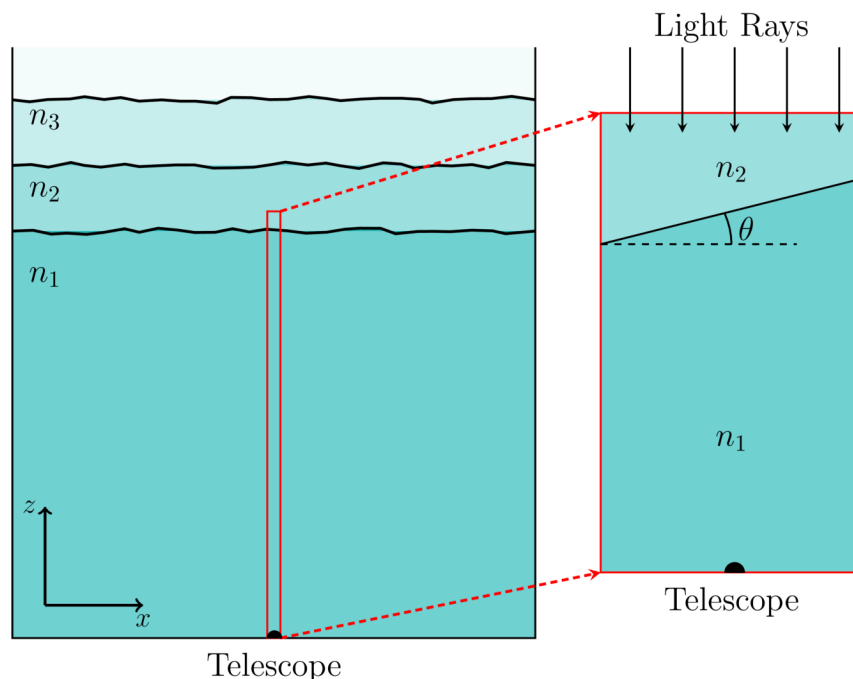
طول موج رصدی 550 نانومتر است. ($\lambda = 550 \text{ nm}$)

تصاویری که از اجرام نجومی ثبت می‌کنیم، علاوه بر تاثیر پراش دچار تاثیراتی جوی می‌شوند که به آن atmospheric seeing می‌گویند. ترجمه‌ی آن می‌شود سی اینگ جوی.

لایه‌های جو و مرزهای میان آن‌ها، همراه با ضریب شکست هر لایه، به دلیل آشفتگی هوا، تغییرات دما و عوامل دیگر، همواره در حال تغییر هستند. این تغییرات باعث جابه‌جایی‌های بسیار جزئی در محل تشکیل تصویر در صفحه‌ی کانونی تلسکوپ می‌شود. پدیده‌ای که به آن «سوسوزدن ستاره‌ها» یا «چشمک زدن ستاره‌ها» گفته می‌شود. در ادامه این مسئله، به جز قطر محدود تصویر ستاره که در قسمت قبل و به دلیل پدیده پراش توضیح داده شد، هیچ اثر تداخلی دیگری در نظر گرفته نخواهد شد.

قسمت سمت چپ در تصویر زیر برش عمودی از جو، شامل لایه‌های پیوسته از پایین تا بالا را نشان می‌دهد. ضرایب شکست لایه‌های جو از پایین به بالا به ترتیب برابر $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ می‌باشند.

قسمت سمت راست در تصویر، پایین‌ترین لایه با ضریب شکست n_1 به همراه لایه‌ی بالایی آن با ضریب شکست n_2 را نشان می‌دهد. بدیهی است که $n_1 > n_2$ می‌باشد. برای ادامه‌ی مسئله تنها دو لایه‌ی ذکر شده را در نظر بگیرید. (مقیاس شکل صحیح نمی‌باشد)



	(T09.2)
--	---------

فرض کنید مرز دو لایه‌ی پایینی و بالایی در ارتفاع 1 کیلومتری ($H = 1$) بالای عدسی تلسکوپ قرار دارد و این مرز یک زاویه‌ی 30 درجه $\theta = 30^\circ$ با صفحه‌ی موازی افق می‌سازد. این زاویه در جهت پادساعتگرد مثبت و در جهت ساعتگرد منفی خواهد بود. ضریب شکست دو لایه برای یک نور تکفام (تک طول موج) به ترتیب برابر $n_1 = 1.00027$ و $n_2 = 1.00026$ است. جابه‌جایی زاویه‌ای یا انحراف

زاویه‌ای تصویر ستاره‌ای که در سر سو است روی صفحه‌ی کانونی بر اثر شکست را α می‌نامیم. (تلسکوپ به صورت عمودی در جهت سر سو قرار دارد.)

(T09.2a)	2 نمره
----------	--------

نمودار مسیر جهت‌دار پرتوی نوری که از سر سو می‌آید و به مرز دو لایه‌ی 2 و 1 برخورد می‌کند و سپس دچار شکست می‌شود را به صورت کامل به همراه مقادیر زاویه تابش و شکست رسم کنید. در شکلی که رسم می‌کنید پارامترهای n_1 و n_2 و θ و α باید مشخص شوند.

(T09.2b)	2 نمره
----------	--------

رابطه‌ای برای α بر حسب θ و n_1 و n_2 بیابید. از تقریب زوایای کوچک برای سینوس و کسینوس استفاده کنید.

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad \text{و} \quad \cos \alpha \approx 1$$

(T09.2c)	3 نمره
----------	--------

در صورتی که مقدار زاویه‌ی θ به اندازه‌ی 1 درصد افزایش پیدا کند، مقدار جا به جایی تصویر روی صفحه‌ی کانونی را بر حسب متر به دست آورید. ابتدا رابطه‌ای برای مقدار جابه‌جایی Δx_θ پیدا کنید و سپس اعداد داده شده را جایگذاری کنید. (مقادیر n_1 و n_2 را ثابت در نظر بگیرید.

(T09.2d)	3 نمره
----------	--------

در صورتی که ضریب شکست لایه‌ی دوم به مقدار 0.0001 درصد افزایش پیدا کند، مقدار جابه‌جایی تصویر روی صفحه‌ی کانونی را بر حسب متر به دست آورید. ابتدا رابطه‌ای برای مقدار جابه‌جایی Δx_n پیدا کنید و سپس اعداد داده شده را جایگذاری کنید. مقادیر n_1 و θ را ثابت در نظر بگیرید.

(T09.3)	2 نمره
---------	--------

برای یک نور سفید شامل طیف مرئی که از ستاره‌ای که در سر سو است به سمت تلسکوپ می‌آید کدام یک از حالت‌های زیر در مورد شکل هندسی تصویر و رنگی که تشکیل می‌دهد صحیح است؟

پاسخ خود را با یک علامت تیک (✓) در کنار یکی از شش حالت در پاسخنامه علامت بزنید. توجه داشته باشید مقدار x در تصویر داده شده در اول سوال از سمت چپ به راست افزایش پیدا می‌کند.

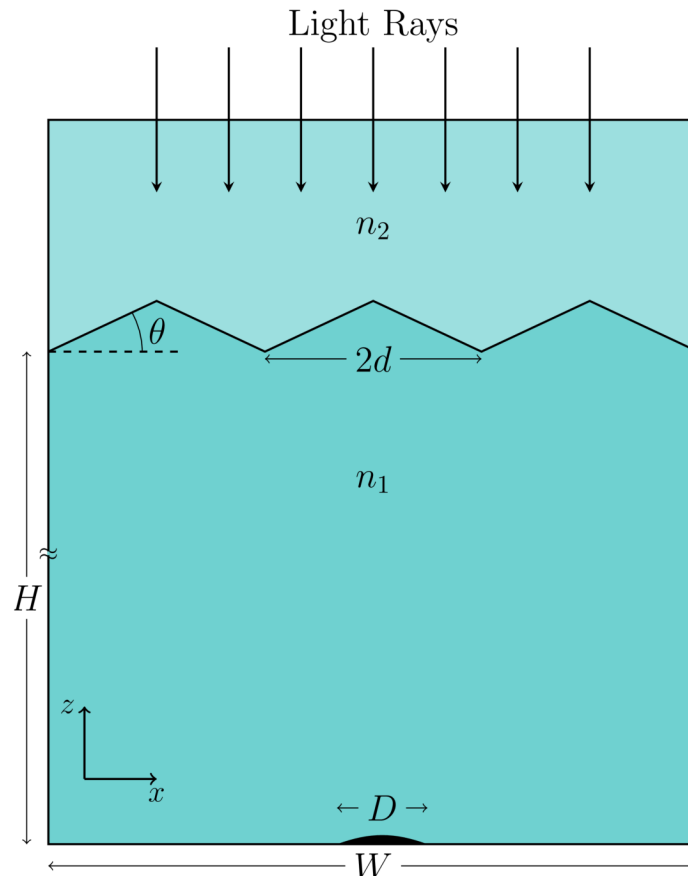
	رنگ تصویر تشکیل شده	Image shape	Left edge	Right edge
A	سفید	دایره		
B	سفید	بیضی		
C	رنگی	دایره	آبی	قرمز
D	رنگی	دایره	قرمز	آبی
E	رنگی	بیضی	آبی	قرمز
F	رنگی	بیضی	قرمز	آبی

برای حل ادامه‌ی سوال پرتو نور را تکفام با طول موج 550 نانومتر در نظر بگیرید. ($\lambda = 550nm$)

برای مدل کردن ادامه‌ی مسئله مرز بین دو لایه را یک زیگزاگ بی نهایت در نظر می‌گیریم و همان طور که در شکل نشان داده شده است طول افقی هر قسمت در راستای محور x برابر 10 سانتی متر ($d = 10cm$) می‌باشد. هر قطعه از زیگزاگ زاویه‌ی $\theta = +10^\circ$ یا $\theta = -10^\circ$ با صفحه‌ی موازی افق می‌سازد.

تصویر زیر (که مقیاس آن صحیح نیست) قسمتی را با ابعاد H (ارتفاع مشخص شده در تصویر) و W (عرض مشخص شده در تصویر) نشان می‌دهد به طوری که $W \ll H$ می‌باشد. یعنی عرض تصویر نسبت به ارتفاع آن بسیار کوچک است.

برای تلسکوپ‌هایی با قطر دهانه‌ی بزرگ، این حالت زیگزاگ بودن مرز لایه‌های جو، باعث به وجود آمدن لکه‌هایی در صفحه‌ی کانونی می‌شوند.



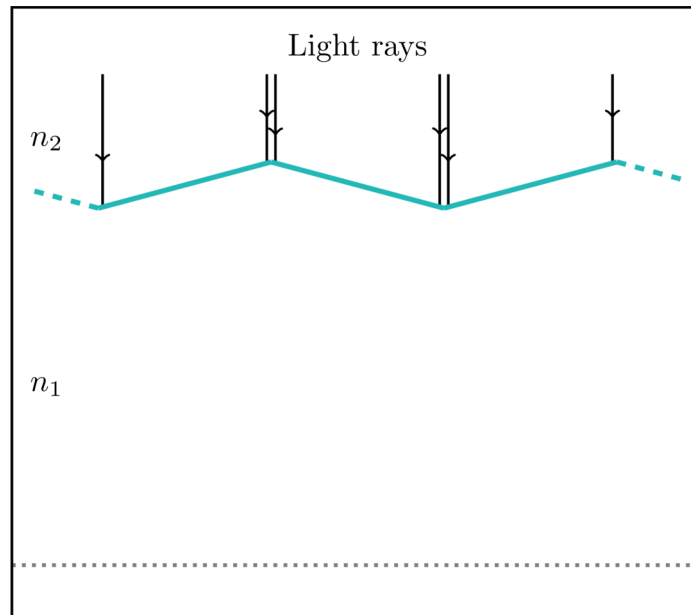
(T09.4)

با توجه به مدلسازی زیگزاگی که شکل آن بلافاصله در بالای این قسمت مطرح شده، به سوالات زیر پاسخ دهید.

(T09.4a)

4 نمره

در شکل زیر شکل مرز دو لایه‌ی جو دوباره به نمایش درآمده است. (مقیاس تصویر صحیح نیست)



این جدول در پاسخنامه‌ی خلاصه (Summary Answersheet) نیز رسم شده است. پاسخ را در آن قسمت پاسخنامه خلاصه وارد کنید.

در تمام طول خط‌چینی که در پایین صفحه نمایش داده شده است عدسی شیئی تلسکوپ قرار دارد. با توجه به پرتوهای ورودی که در بالای زیگ‌زاگ رسم شده‌اند مسیر پرتوها را پس از شکست رسم کرده و روی خط‌چین پایین ناحیه‌ای را مشخص کرده و نام آن را X بگذارید به طوری که هیچ پرتوی نوری به ناحیه‌ی X نمی‌رسد.

(T09.4b)	3 نمره
----------	--------

طول ناحیه‌ی X (W_X) که در قسمت قبل مشخص کردید را محاسبه کنید.

(T09.4c)	4 نمره
----------	--------

بزرگترین قطر ممکن برای دهانه‌ی یک تلسکوپ (قطر شیئی) ($D_{\max}$) را بیابید به طوری که در صورت انتخاب مناسب محل تلسکوپ نسبت به ساختار مرز لایه‌ها، می‌توان یک تصویر واحد بدون قطع‌شدگی از یک ستاره به دست آورد.

(T09.5)	6 نمره
---------	--------

حالتی را در نظر بگیرید که این شکل زیگ‌زاگی جو در هر دو جهت x و y شکل گرفته باشد. حالت هرم هرم شکلی به وجود آورده باشد. قطر شیئی را 100 سانتی متر $D = 100cm$ و فاصله کانونی آن را 200 سانتی متر ($f = 200cm$) در نظر بگیرید.

شکل لکه‌های ثبت شده در صفحه‌ی کانونی تلسکوپ از ستاره را در نمودار مربوط به این بخش در پاسخنامه‌ی خلاصه (Summary Answersheet) رسم کنید. نیازی به مقیاس‌گذاری محورها نیست.

(T09.6)	5 نمره
---------	--------

می‌خواهیم اتمسفری که دچار نوسان است را بررسی کنیم. مرز دولایه را مثل قبل همان زیگ‌زاگ طور در نظر بگیرید اما این بار زاویه‌ی تتای بین زیگ‌زاگها از $+10^\circ$ تا -10° در طول 1 ثانیه تغییر می‌کند. این پدیده باعث تغییر یکنواخت موقعیت تصویر در صفحه‌ی کانونی می‌شود.

تلسکوپی را با قطر شیئی 8 سانتی متر ($D = 8cm$) و فاصله‌ی کانونی 1 متر ($f = 1m$) در نظر بگیرید.

حداکثر مدت زمان $t_{\max}$ نوردهی را طوری تخمین بزنید که در طول این زمان در تصویر تشکیل شده روی سی سی دی قرار داده شده در صفحه‌ی کانونی، هرگونه تغییر و جا به جایی احتمالی در موقعیت ستاره‌ی ثبت شده، کمتر از ۱٪ قطر ایجاد شده به خاطر اثر پراش تصویر باشد.

35 نمره	(T10) - هسته‌زایی بیگ بنگ
---------	---------------------------

در طول دوران تابش غالب در جهان اولیه، ضریب مقیاس جهان $a \propto t^{1/2}$ ، که در آن t مدت زمان سپری شده از لحظه‌ی بیگ بنگ است. در اوایل این دوران، نوترون‌ها (n) و پروتون‌ها (p) از طریق برهمکنش‌های ضعیف در تعادل حرارتی با یکدیگر باقی می‌مانند. چگالی عددی نوترون‌ها یا پروتون‌های آزاد (N) به دما T و جرم‌های متناظر آنها m با رابطه زیر داده می‌شود:

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

این رابطه تا زمان $t_{\text{wk}} = 1.70 \text{ s}$ که معادل $k_B T_{\text{wk}} = 800 \text{ keV}$ می‌باشد، برقرار است. پس از t_{wk} ، برهمکنش‌های ضعیف دیگر نمی‌توانند چنین تعادلی را حفظ کنند و نوترون‌های آزاد به پروتون‌ها با نیمه‌عمر 610.4 ثانیه واپاشی می‌شوند.

4 نمره	(T10.1)
--------	---------

فرض کنید چگالی تعداد پروتون‌ها N_p و چگالی تعداد نوترون‌ها N_n باشد. فراوانی نسبی نوترون‌ها را که به صورت $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ تعریف می‌شود در زمان t_{wk} ، محاسبه کنید.

	(T10.2)
--	---------

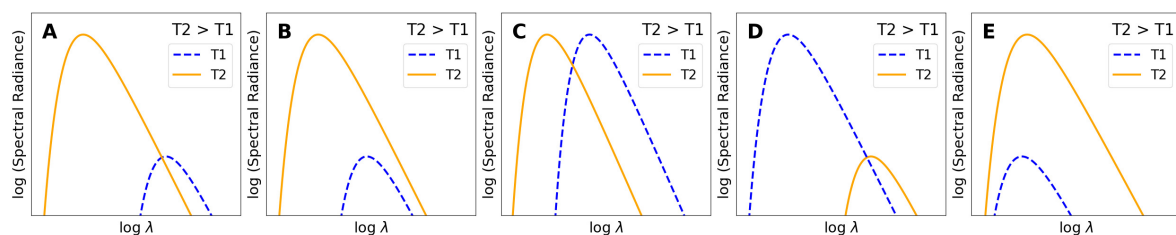
) فوتون‌ها در تمام دوره‌ها تعادل حرارتی را حفظ می‌کنند و طیف جسم سیاه را حفظ می‌کنند.

2 نمره	(T10.2a)
--------	----------

با این توضیحات و با استدلالی ساده توان β را در رابطه $T(a) \propto a^\beta$ به دست آورید.

2 نمره	(T10.2b)
--------	----------

مشخص کنید کدام یک از نمودارهای زیر تابع توزیع انرژی را برای دو دمای T_1 و T_2 را به درستی نشان می‌دهد. گزینه صحیح را در برگه پاسخنامه خلاصه علامت بزنید (✓).



	(T10.3)
--	---------

پس از t_{wk} ، فرآیند تشکیل دوتریوم از پروتون‌ها و نوترون‌ها توسط معادله ساها، که توسط فیزیکدان هندی پروفیسور مگناد ساها ارائه شده است، با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

در اینجا، نسبت باریون به فوتون η برابر 6.1×10^{-10} است و N_D چگالی عددی دوتریوم است.

(T10.3a)	5 نمره
----------	--------

نسبت N_D/N_n را روی نمودار شطرنجی در پاسخنامه‌ی خلاصه، برای حداقل ۴ مقدار دمایی با فاصله‌ی منطقی که در بازه $k_B T$ از 60 تا 70 کیلو الکترون ولت قرار دارند، رسم کنید. یک منحنی هموار که از این نقاط می‌گذرد، رسم کنید.

(T10.3b)	1 نمره
----------	--------

از روی این نمودار، برای نقطه‌ی $N_D = N_n$ ، $k_B T_{\text{nuc}}$ را بر حسب keV پیدا کنید.

(T10.3c)	4 نمره
----------	--------

اکنون فرض کنید که تمام نوترون‌های آزاد فوراً با پروتون‌ها در نقطه $k_B T_{\text{nuc}}$ ترکیب می‌شوند تا دوتریوم تشکیل دهند، و همه آنها بلافاصله به هلیوم (${}^4_2\text{He}$) تبدیل می‌شوند. زمان متناظر با این اتفاق یعنی تشکیل هلیوم، t_{nuc} (بر حسب ثانیه)، را محاسبه کنید.

(T10.4)	5 نمره
---------	--------

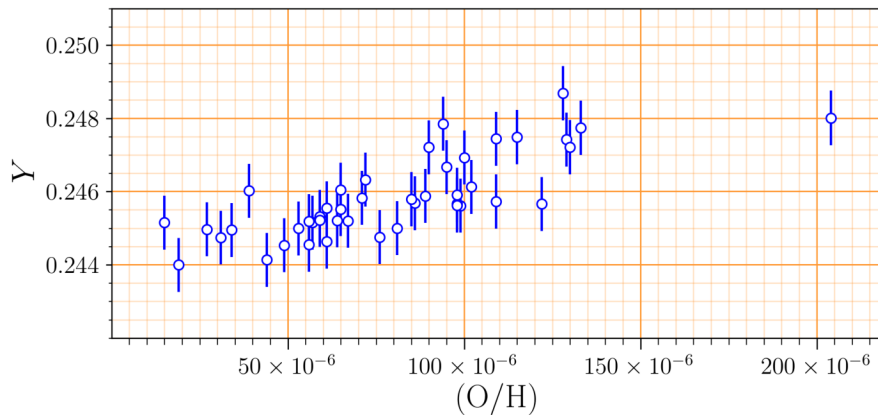
با توجه به مفهوم نیمه عمر در مقدمه سوال مقدار $X_{n, \text{nuc}}$ را دقیقاً یک لحظه قبل از t_{nuc} محاسبه کنید.

(T10.5)	3 نمره
---------	--------

فراوانی اولیه هلیوم در کیهان، Y_{prim} ، عبارت است از تمام جرم باریونی که (دقیقاً پس از t_{nuc}) در ساخت هلیوم به کار گرفته می‌شود. یک تخمین نظری برای مقدار Y_{prim} به دست آورید. صرفاً برای محاسبه این قسمت فرض کنید، $m_p \approx m_n$ و جرم هلیوم، $m_{\text{He}} \approx 4m_n$.

(T10.6)	
---------	--

() اندازه‌گیری فراوانی اولیه هلیوم بسیار دشوار است، زیرا ستارگان به طور مداوم هیدروژن را به هلیوم تبدیل می‌کنند. میزان این فرایند توسط ستارگان در یک کهکشان، با چگالی نسبی اکسیژن (که فقط توسط ستارگان تولید می‌شود) به هیدروژن (O/H) مشخص می‌شود. مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌های (O/H) و فراوانی هلیوم، Y ، برای کهکشان‌های مختلف در زیر رسم شده است.



با استفاده از داده‌های این نمودار (که در پاسخنامه خلاصه نیز آمده است) به سوالات زیر پاسخ دهید.

(T10.6a)	2 نمره
----------	--------

برای یک کهکشان کوتوله فشرده آبی Y را برای مقدار زیر تخمین بزنید.

$$(O/H) = 1.75 \times 10^{-4}$$

(T10.6b)	2 نمره
----------	--------

شیب $dY/d(O/H)$ خط مستقیم برازش یافته با داده‌های فوق را بدست آورید.

(T10.6c)	2 نمره
----------	--------

فراوانی اولیه هلیوم، $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ را بر اساس مشاهدات فوق تخمین بزنید.

(T10.7)	3 نمره
---------	--------

میزان انحراف بین Y_{prim} و $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ را می‌توان با تغییر نسبت باریون به فوتون η برطرف کرد. هنگامی که η کاهش می‌یابد، همانطور که با $\downarrow$ در برگه پاسخنامه خلاصه نشان داده شده است، افزایش ($\uparrow$) یا کاهش ($\downarrow$) در $N_D/N_n(T)$ ، T_{nuc} (هنگامی که $N_D = N_n$)، t_{nuc} ، $X_{\text{n,nuc}}$ و Y_{prim} در کادرهای ارائه شده در برگه پاسخنامه خلاصه مشخص کنید.

50 نمره	(T11) - ستارگان از طریق نمودارها
---------	----------------------------------

ستارگان را می توان اجسام کروی متقارن در نظر گرفت که ویژگیهایشان تنها به فاصله ی شعاعی از مرکز ستاره r وابسته است. جرمی که درون کره ای با شعاع r قرار دارد با $m(r)$ نشان داده می شود. درخشندگی $l(r)$ به عنوان انرژی خالصی که در واحد زمان از سطح کروی با شعاع r به بیرون جریان دارد، تعریف می شود. سایر مقادیر مورد علاقه، به عنوان مثال، چگالی $\rho(r)$ ، دما $T(r)$ ، کسر جرمی هیدروژن $X(r)$ ، کسر جرمی هلیوم $Y(r)$ ، و انرژی هسته ای تولید شده در واحد جرم در واحد زمان $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$ ، به عنوان توابعی از r در نظر گرفته می شوند. در طول این مسئله، اثرات انتشار و ته نشینی گرانشی عناصر درون ستاره را نادیده می گیریم.

(T11.1)

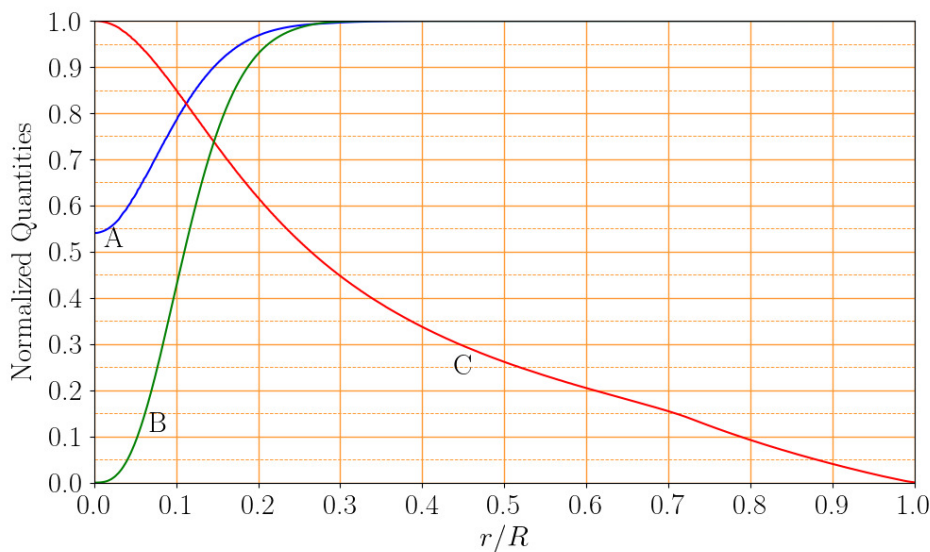
بخش ۱: درون یک ستاره

نمودار زیر تغییرات سه کمیت ساختاری، A ، B و C را به عنوان تابعی از شعاع کسری r/R در یک مدل ستاره ای با جرم $1 M_{\odot}$ و سن 4 میلیارد سال نشان می دهد، که در آن شعاع فوتوسفر ستاره است. مقادیر کسر جرمی هلیوم در سطح (فوتوسفر)، Y_s ، و فلزیت (کسر جرمی تمام عناصر سنگین تر از هلیوم) در سطح (فوتوسفر)، Z_s ، ستاره به صورت

$$0.02 = Z_s$$

$$0.28 = Y_s$$

داده شده اند. تمام کمیت های نشان داده شده در نمودارها با مقادیر حداکثر مربوطه شان نرمال سازی شده اند.



(T11.1a)

6 نمره

سه کمیت A ، B و C به کدامیک از پنج تابع زیر مرتبط است. آنها را از میان پنج امکان زیر شناسایی کنید:

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(A ، B و C را در جعبه های کنار کمیت های مناسب در برگه پاسخ کوتاه بنویسید. نیازی به توجیه پاسخ نیست.)

(T11.1b)

3 نمره

به کمک نمودارها کسر جرمی هلیوم در مرکز ستاره، Y_c ، محاسبه کنید؟

(T11.1c)	5 نمره
----------	--------

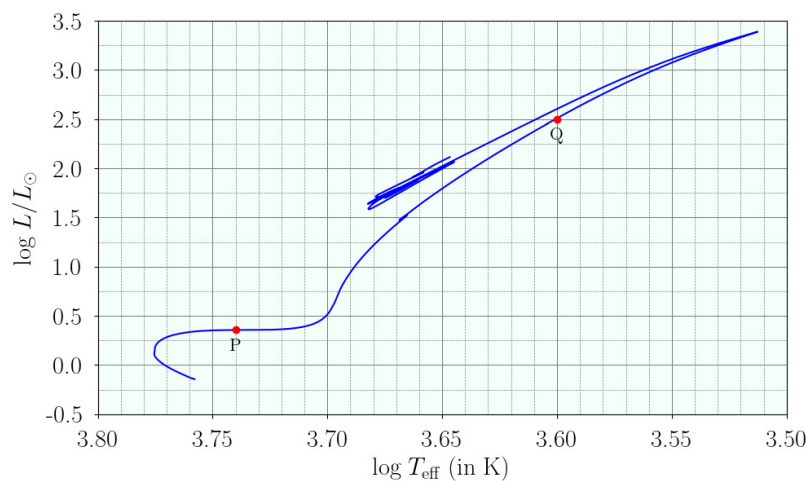
[5] با توجه به شکل سه منحنی شناسایی شده از لیست پنج تایی یعنی منحنی‌های A، B و C، دو کمیت دیگر باقی مانده داده شده در [5] (T11.1a) را به عنوان تابعی از r/R در همان نمودار در برگه پاسخ های کوتاه ترسیم کنید و با کمیت های مربوطه برچسب گذاری کنید.

(T11.2)	
---------	--

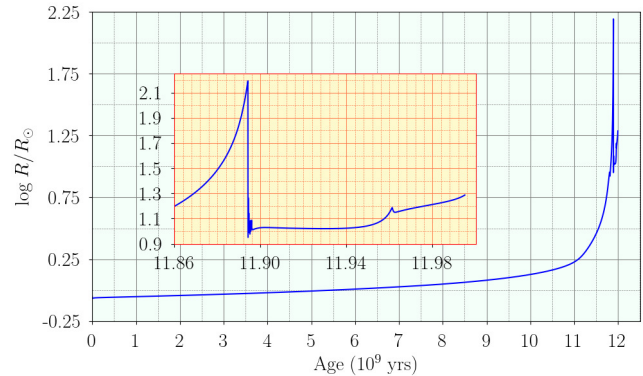
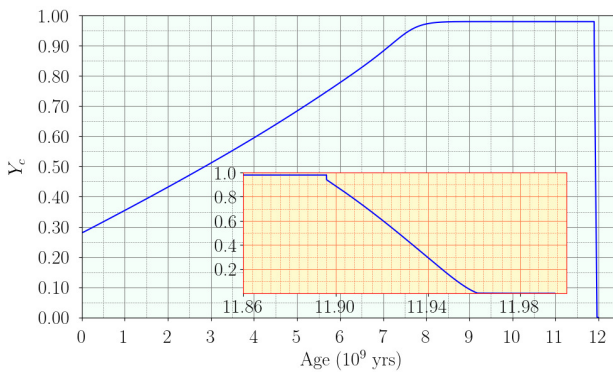
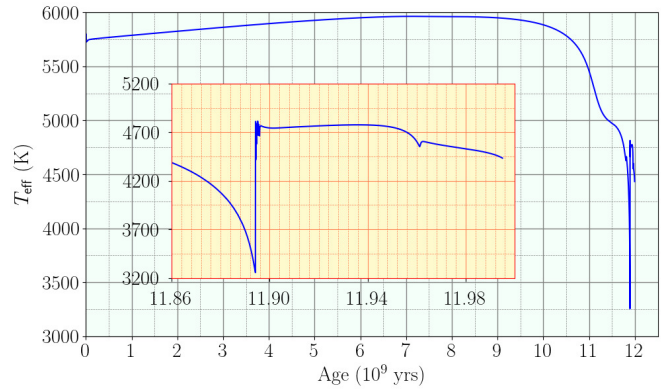
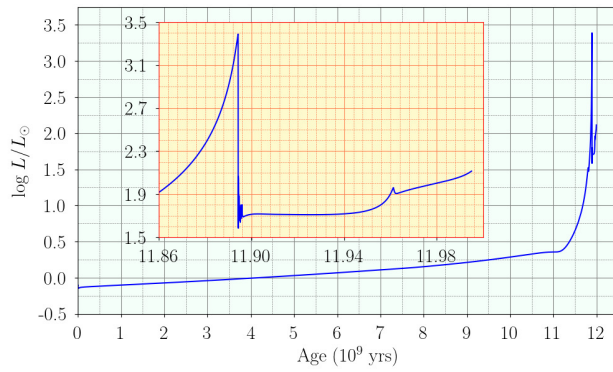
بخش ۲: ستارگان در حال تکامل

تکامل یک ستاره $1M_{\odot}$ را در نظر بگیرید که ترکیب یکنواخت اولیه آن با کسرهای جرمی هلیوم، $Y_0 = 0.28$ ، و فلزات، $Z_0 = 0.02$ داده شده است. شکل های زیر تغییرات مقادیر کلی مختلف این ستاره را نشان می دهند که از ZAMS (نقطه سن سفر در رشته ی اصلی) تا پایان سوختن هلیوم در هسته اش تکامل می یابد.

نمودار زیر مسیر تکاملی ستاره را بر روی نمودار HR (نمودار $\log L/L_{\odot}$ در مقابل $\log T_{\text{eff}}$ ، که در آن L روشنایی سطحی و T_{eff} دمای مؤثر است) نشان می دهد.



شکل زیر چهار نمودار دارد که تغییرات T_{eff} (بر حسب K)، L (که به صورت $\log L/L_{\odot}$ نشان داده شده است)، R (که به صورت $\log R/R_{\odot}$ نشان داده شده است)، و Y_c را با سن همان ستاره را (بر حسب 10^9 سال) را نشان می دهد. در هر یک از این چهار نمودار، تغییرات مقادیر مربوطه را بین سنین 11.86×10^9 سال تا 12.00×10^9 سال و برای وضوح بیشتر به طور دقیق تر نشان می دهند که به صورت ناحیه ی زرد رنگ نمایش داده شده است.



از این نمودارها برای پاسخ به سوالات زیر استفاده کنید.

1 نمره	(T11.2a)
--------	----------

عمر تقریبی رشته اصلی ستاره، t_{MS} (بر حسب سال)، چقدر است؟

1 نمره	(T11.2b)
--------	----------

با توجه به ناحیه ی زرد مدت زمان تقریبی که ستاره در هسته خود هلیوم می سوزاند، Δt_{He} (بر حسب سال)، چقدر است؟

3 نمره	(T11.2c)
--------	----------

زمانی که درخشندگی ستاره یک برابر درخشندگی خورشید $L_{\odot}$ است چه کسری از هیدروژن اولیه، f_{H} ، در مرکز آن سوخته است؟

3 نمره	(T11.2d)
--------	----------

زمانی که 60% از مقدار اولیه هیدروژن در مرکز آن سوخته است شعاع ستاره، R_1 (بر حسب $R_{\odot}$) چقدر است؟

4 نمره	(T11.2e)
--------	----------

شعاع های ستاره، R_{P} و R_{Q} (بر حسب $R_{\odot}$)، که به ترتیب با موقعیت های P و Q در نمودار HR مشخص شده اند، چقدر هستند؟

(T11.3)

بخش ۳: توزیع جرم درون یک ستاره

معادله‌ای که توزیع جرم درون یک ستاره را تعیین می‌کند به صورت

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

داده می‌شود. مناسب است که این معادله را بر حسب سه متغیر بدون بعد، یعنی جرم کسری، q ، شعاع کسری، x ، و چگالی نسبی، σ ، که به صورت زیر تعریف می‌کنیم، بیان کنیم:

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

که در آن M و R به ترتیب جرم و شعاع کل ستاره هستند و $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ چگالی متوسط ستاره است. برای ستاره خاصی که در این بخش بررسی خواهیم کرد، اطلاعات زیر داده شده است:

$$\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$$

• نیمی از جرم ستاره درون ۲۵٪ داخلی شعاع کل آن قرار دارد و ۷۰٪ از جرم آن درون ۳۵٪ داخلی شعاع کل آن قرار دارد.

در تمام بخش‌های بعدی این سوال، کافی است که تمام ضرایب عددی مشتق شده را تا ۰.۰۰۵ گرد کنیم.

(T11.3a)

2 نمره

معادله بالا که وابستگی جرم به شعاع را توصیف می‌کند، به صورت رابطه‌ای بین x ،

$$\frac{dq(x)}{dx} \text{ و } \sigma(x) \text{ بازنویسی کنید.}$$

برای به دست آوردن توزیع جرم با شعاع، باید پروفایل چگالی داخل ستاره را بدانیم. برای این مسئله، تغییرات چگالی با شعاع را با فرم‌های تقریبی در دو ناحیه x توصیف خواهیم کرد:

$$\bullet \text{ قسمت داخلی ستاره: } 0 \leq x \leq 0.32$$

$$\bullet \text{ قسمت میانی ستاره: } 0.32 < x < 0.80$$

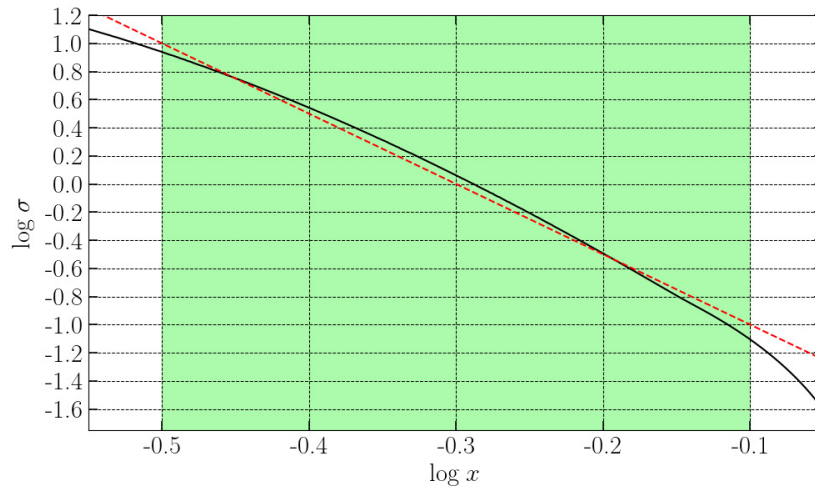
برای قسمت‌های بیرونی‌تر، یعنی $0.80 \leq x \leq 1.00$ هیچ تقریبی انجام نمی‌دهیم.

(T11.3b)

4 نمره

تقریب برای قسمت میانی:

تغییرات $\log \sigma$ به عنوان تابعی از $\log x$ در قسمت میانی ستاره (با منحنی سیاه) در نمودار زیر نشان داده شده است. ما یک تقریب خطی (که به صورت خط قرمز خط چین در نمودار نشان داده شده است) برای $\log \sigma$ به عنوان تابعی از $\log x$ در ناحیه $-0.5 < \log x < -0.1$ یعنی $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (که با ناحیه سبز سایه دار نشان داده شده است) انجام خواهیم داد. علاوه بر این، شیب این خط را با نزدیکترین عدد صحیح تقریب می‌زنیم.



از این تقریب استفاده کنید تا یک عبارت برای $\sigma(x)$ به عنوان تابعی از x در ناحیه $0.32 < x < 0.80$ بنویسید.

6 نمره	(T11.3c)
--------	----------

از نتیجه (T11.3b) استفاده کنید تا یک عبارت برای $q(x)$ در ناحیه $0.32 < x < 0.80$ استخراج کنید.

8 نمره	(T11.3d)
--------	----------

تقریب برای قسمت داخلی:

در قسمت داخلی ستاره ($0 \leq x \leq 0.32$)، چگالی ممکن است به عنوان تابع خطی از شعاع تقریب زده شود، یعنی $\sigma(x) = Ax + B$ ، که در آن A, B ثابت هستند. A و B را تعیین کنید و بنابراین یک عبارت برای $q(x)$ در ناحیه $0 \leq x \leq 0.32$ به دست آورید. توجه داشته باشید که تقریب‌های اتخاذ شده در قسمت قبلی و این قسمت ممکن است به ناپیوستگی‌های کوچک در چگالی یا جرم در $x = 0.32$ منجر شود.

4 نمره	(T11.3e)
--------	----------

(T11.3e) عبارات $q(x)$ که در قسمت‌های (T11.3c) و (T11.3d) به دست آمده‌اند، تقریب‌هایی هستند که تغییرات جرم با شعاع را به خوبی توصیف می‌کنند، اما فقط در نواحی خاصی از ستاره. برای ناحیه $0.80 \leq x \leq 1$ (که برای آن هیچ عبارتی استخراج نکرده‌ایم)، می‌توان از برون‌یابی مناسب از ناحیه مجاور استفاده کرد. از این عبارات تقریبی و داده‌های داده شده استفاده کنید تا یک منحنی نرم (بدون هیچ ناپیوستگی در $q(x)$ یا مشتق آن) برای $q(x)$ بر حسب x برای کل ستاره ($0 \leq x \leq 1$)، ترسیم کنید. این منحنی به نوعی نحوه تغییرات جرم با شعاع را نشان می‌دهد.

50 نمره	(T12) - تابش هاوکینگ از سیاهچاله
---------	----------------------------------

	(T12.1)
--	---------

یک سیاه چاله (BH) با یک رمبش گرانشی ستاره ای سنگین در انتهای عمرش شکل می گیرد. این رمبش گرانشی به درون یک نقطه که به آن نقطه تکینگی (singularity) می گویند، انجام می گیرد. به خاطر گرانش بی نهایتی که چنین جسمی دارد، هر چیزی که در فاصله کمتر از افق رویداد آن (یعنی یک سطح کروی با شعاع شوارتشیلد $r = R_{SC}$) قرار گیرد، نمی تواند از گرانش آن فرار کند. چنان که گفته شد در این سؤال منظور از R_{SC} ، شعاع شوارتشیلد است.

4 نمره	(T12.1a)
--------	----------

مدل سازی منشأ ایجاد تابش هاوکینگ

یک جفت ذره که هر کدام دارای جرم m است در نظر بگیرید، به طوری یک ذره در مقدار اندکی بیرون از افق رویداد $r \approx R_{SC}$ و ذره دیگر، در فاصله ای درون افق رویداد نسبت به مرکز سیاهچاله به طوری که $r = \kappa R_{SC}$ ، تولید شده و ایستاده اند. فرض کنید انرژی کل هر یک از ذرات برابر با جمع ساده ی انرژی پتانسیل گرانشی آن ذره به خاطر وجود سیاه چاله BH، و انرژی سکون mc^2 آن ذره است. مقداری برای κ بیابید که به ازای آن، انرژی مجموع هر دو ذره با هم، برابر با صفر شود.

4 نمره	(T12.1b)
--------	----------

دمای یک سیاه چاله

اگر ذره ای که بیرون از افق رویداد تولید شده است، به اندازه کافی انرژی جنبشی داشته باشد، می تواند از افق رویداد فرار کند، که به آن تابش هاوکینگ گفته می شود. کم شدن جرم سیاه چاله در تابش هاوکینگ نیز اینگونه توجیه می شود که، ذره ی داخل افق رویداد که دارای انرژی منفی است، جذب جرم سیاه چاله می شود و به این صورت جرم سیاه چاله BH را کم می کند.

فرض کنید تمام تابش هاوکینگ از فوتون هایی با طیف جسم سیاه شکل می گیرد، به طوری که طول موجی که این جسم سیاه بیشینه تابش را در آن دارد به صورت $\lambda_{bb} \approx 16 R_{SC}$ داده می شود.

می دانیم که یک سیاه چاله با جرم خورشید دارای شعاع شوارتشیلد برابر با $R_{SC, \odot} = 2.952 km$ می باشد.

عبارتی برای دمای سیاه چاله، T_{bh} ، پیدا کنید که متناظر با تابش جسم سیاهی باشد که در بالا توصیف شد. این رابطه برای دما را بر حسب جرم سیاه چاله M_{bh} و ثوابت فیزیکی به دست آورید.

هم چنین شعاع شوارتشیلد را به ازای جرم ده برابر جرم خورشید به دست آورید. سپس دمای سیاه چاله ی با جرم ده برابر جرم خورشید، یعنی $T_{bh, 10\odot}$ را به دست آورید.

8 نمره	(T12.1c)
--------	----------

کاهش جرم سیاه چاله

در نظر بگیرید که تابش هاوکینگ از شعاع شوارتشیلد سیاه چاله ای کروی به سمت بیرون تابش می شود.

با نوشتن رابطه جرم-انرژی، عبارتی برای نرخ کاهش جرم سیاه چاله، یعنی $dM_{bh}(t)/dt$ ، بر حسب $M_{bh}(t)$ و ثوابت فیزیکی به دست آورید.

سپس، یک رابطه برای جرم لحظه ای سیاه چاله یعنی $M_{bh}(t)$ به دست آورید و در نظر بگیرید جرم اولیه سیاه چاله M_0 است. سپس $M_{bh}(t)$ را به عنوان تابعی از زمان از $M_{bh} = 0$ تا $M_{bh} = M_0$ رسم کنید.

(T12.1d)

3 نمره

مدت زمان زندگی یک سیاه چاله

حال، عبارتی برای زمان عمر یک سیاه چاله، τ_{BH} ، به گونه ای پیدا کنید که سیاه چاله ای با جرم اولیه M_0 ، پس از این مدت زمان به خاطر تابش هاوکینگ بخار شود و از بین رود. پاسخ خود را بر حسب M_0 و ثابت فیزیکی به دست آورید.

سپس مدت زمان عمر $\tau_{bh,10\odot}$ را برای سیاه چاله ای با جرم ده برابر جرم خورشید یعنی $M_0 = 10M_\odot$ محاسبه کنید.

(T12.1e)

6 نمره

سیاه چاله در حمام تابش CMB پس زمینه کیهان

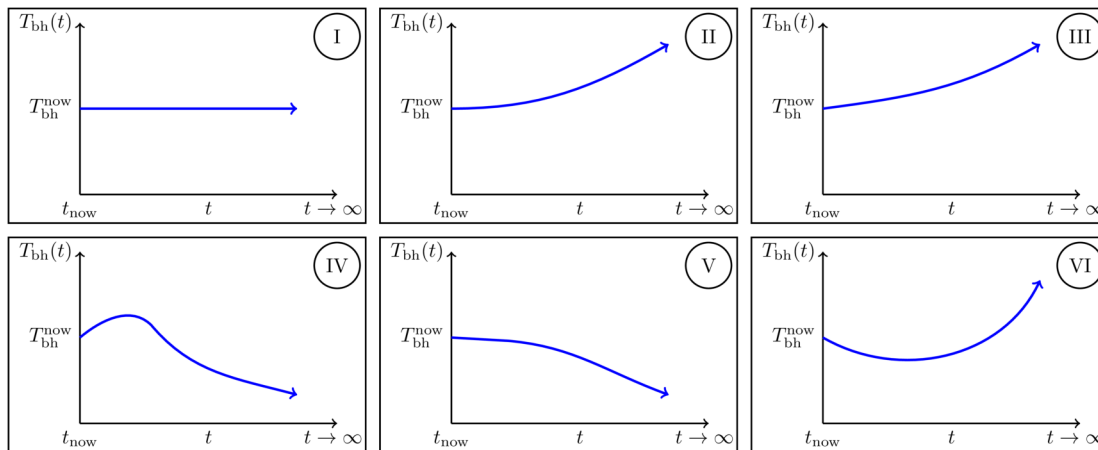
یک سیاه چاله ی ایزوله در فضا در نظر بگیرید که بسیار دور از اجرام دیگر است. در زمان فعلی، دمای این سیاه چاله T_{bh}^{now} است و دمای تابش پس زمینه کیهان CMB برابر با $T_{cmb}^{now} = 2.7K$ است. جرم این سیاه چاله می تواند با جذب کردن انرژی CMB زیاد شود و با تابش کردن تابش هاوکینگ کم گردد.

با در نظر گرفتن شتاب مثبت داشتن کیهان، مشخص نمایید کدام یک از تصاویر زیر، تحول بلند مدت دمای سیاه چاله T_{bh} را در هر یک از سه حالت زیر توصیف می کند.

$$(X) T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$$

$$(Y) T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$$

$$(Z) T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$$



پاسخ خود را با تیک زدن در باکس مناسب در صفحه پاسخبرگ خلاصه Summary Answersheet برای هر یک از حالت های X و Y و Z مشخص کنید. دقت کنید که برای هر یک از این حالت ها فقط مجاز به تیک زدن یک گزینه هستید.

(T12.2)

سیاه چاله های نخستین یا Primordial Black Holes (PBH) با جرم هایی بسیار کم، می توانند کیهان اولیه را شکل داده باشند. در این بخش، تمام سوالات مربوط به PBH ها خواهد بود. توجه کنید که از هر فرآیندی که باعث افزایش جرم سیاه چاله شود در این بخش صرف نظر می شود.

(T12.2a)

4 نمره

بخار شدن PBH در زمان حاضر

همان طور که ممکن است در پاسخ بخش های قبلی دقت کرده باشید، برای سیاه چاله هایی با جرم خورشیدی، بخار شدن سیاه چاله در مدت زمان زیادی طول می کشد. بنابراین، PBH ها که دارای جرم های بسیار کوچک تر هستند، ممکن است مدت بیشتری زنده مانده باشند و ما بتوانیم در زمان های حاضر، بخار شدن آن ها را ببینیم.

جرم اولیه سیاه چاله نخستین یعنی M_0 , PBH را بر حسب کیلوگرم، شعاع شوارتزشیلد R_{SC} , PBH بر حسب متر و دمای سیاه چاله T_{PBH} را بر حسب کلوین، برای سیاه چاله ای که در زمان حاضر بخار می شود یعنی عمر آن برابر با $\tau_{PBH} = 14 Gyr$ باشد، به دست آورید.

(T12.2b)

6 نمره

شکل گیری یک PBH

در کیهان تابش غالب اولیه، ضریب مقیاس به صورت $a(t) \sim t^{1/2}$ بر حسب زمان تغییر می کند. در این حدود زمانی، PBH ها به دلیل رمبش کل انرژی موجود در کیهان تا آن موقع شکل می گیرد که اندازه فیزیکی کل کیهان در آن موقع برابر با ct است که در آن t برابر با سن کیهان در آن موقع است.

یک PBH با جرم $1 \times 10^{12} kg$ در زمانی شکل می گیرد که سن کیهان در حدود $1 \times 10^{-23} s$ باشد. سن کیهان را وقتی یک PBH با جرم $1 \times 10^{20} kg$ شکل می گیرد، که با t_{20} نشان می دهیم، پیدا کنید.

(T12.2c)

5 نمره

طیف مشاهده شده از تابش هاوکینگ منتشر شده از PBH ها

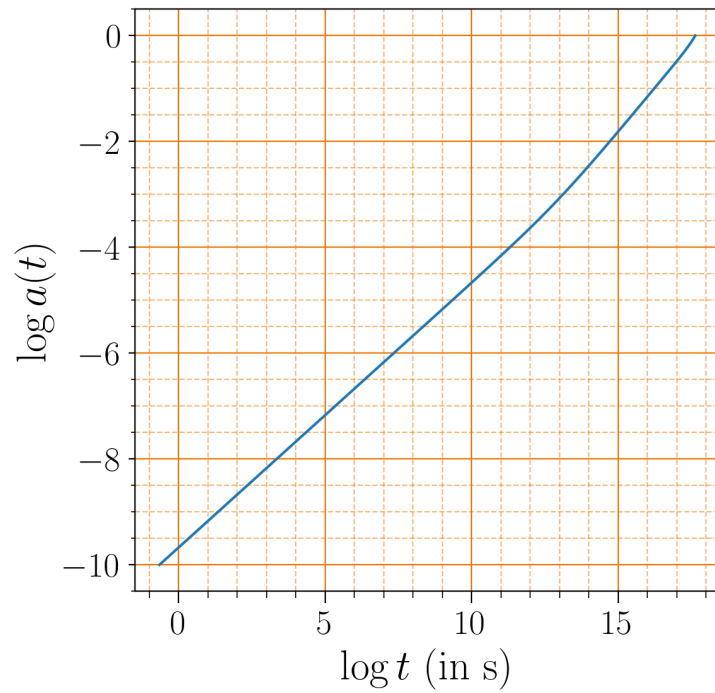
یک PBH با جرم اولیه $1 \times 10^{10} kg$ که در بخش پایانی عمر خود τ_{PBH} کاملاً بخار می شود را در نظر بگیرید. برای این بخش، برای سادگی فرض کنید که بیشتر تابش هاوکینگ منتشر شده در کیهان از سیاه چاله های نخستین، در این زمان تابش شده اند و دمای آن سیاه چاله ها متناظر با جرم اولیه آن ها است. در نظر بگیرید که ضریب مقیاس کیهان در طول زمان به صورت $a(t) \sim t^{2/3}$ تغییر می کند. طول موج مشاهده شده از تابش هاوکینگ ابتدای عالم را در زمان حاضر، آن طور که از زمین دیده می شود، پیدا کنید.

(T12.2d)

10 نمره

تابش ذرات پر انرژی کیهانی منتشر شده از PBH ها

حال فرض کنید انرژی تابش هاوکینگ منتشر شده در یک زمان مشخص t از سیاه چاله نخستین، معادل با فوتون هایی با انرژی $k_B T_{bh}(t)$ باشد. بیشترین دمای ممکن برای سیاه چاله، دمای پلانک T_{Planck} است که برابر است با $1 \times 10^{19} GeV$. تغییرات ضریب مقیاس کیهان در نمودار زیر داده شده است. ضریب مقیاس زمان حاضر برابر با یک در نظر گرفته می شود. در نمودار، $\langle t(s) \rangle$ بر محور افقی، سن کیهان را بر حسب ثانیه نشان می دهد.



اگر یک فوتون با انرژی $E_{\text{det}} = 3 \times 10^{20} \text{ eV}$ روی زمین مشاهده شود، بیشترین و کمترین مقدار ممکن برای جرم سیاه چاله نخستین یعنی M_0^{min} و M_0^{max} را که برای دیدن این فوتون با انرژی ذکر شده می تواند معتبر باشد به دست آورید.