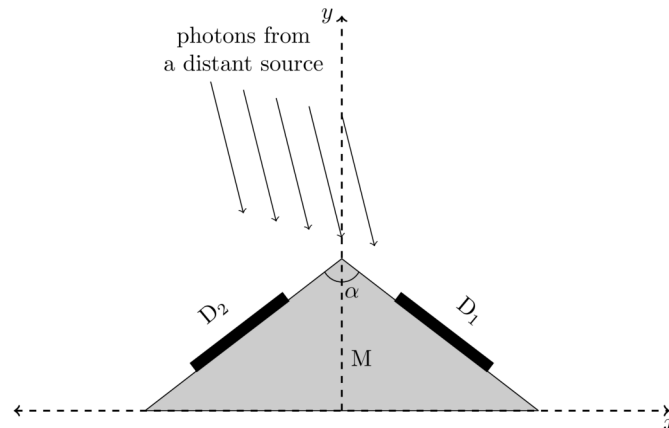


(T01) Misi Daksha

[10 poin]

"Daksha" adalah misi India yang diusulkan untuk diluncurkan, yang terdiri dari dua satelit S_1 dan S_2 yang mengorbit Bumi dalam orbit melingkar dengan radius yang sama sebesar $r = 7000$ km tetapi dengan beda fase sebesar 180° . Kedua satelit ini mengamati alam semesta dalam domain energi tinggi (sinar-X dan sinar- γ). Setiap satelit Daksha menggunakan beberapa detektor datar berbentuk persegi panjang.

Untuk memahami cara melokalisasi sumber di langit, kita akan menggunakan model yang sederhana dari misi Daksha. Asumsikan bahwa S_1 hanya memiliki dua detektor identik D_1 dan D_2 , masing-masing memiliki luas $A = 0,50 \text{ m}^2$, yang terpasang padaudukan M seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah. Detektor terletak secara simetris di sekitar sumbu y dalam bidang yang tegak lurus terhadap bidang $x-y$ dan membentuk sudut $\alpha = 120^\circ$ satu sama lain.



- (T01.1) Ketika sedang mengamati sumber jauh yang terletak di bidang $x-y$, detektor D_1 mencatat daya $P_1 = 2.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$ dan detektor D_2 mencatat daya $P_2 = 4.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$.

Perkirakan sudut η yang dibentuk oleh vektor posisi sumber dengan sumbu y positif, dengan sudut berlawanan arah jarum jam dari sumbu y positif dianggap positif. **[5]**

Anggaplah sebuah sinyal pulsa dari sumber yang jauh (tidak harus dalam bidang $x-y$) yang direkam oleh kedua satelit (S_1 dan S_2) Daksha. Waktu puncak dari pulsa yang direkam oleh masing-masing S_1 dan S_2 adalah t_1 dan t_2 .

- (T01.2) Jika $t_1 - t_2$ diukur sebesar $10.0 \pm 0.1 \text{ ms}$ maka tentukan fraksi, f , dari bola langit di mana sumber mungkin berada. **[5]**

(T02) Makar-Sankranti

[10 marks]

Festival "Makar-Sankranti" dirayakan di India ketika Matahari tampak memasuki wilayah zodiak Capricorn (Makar = Capricorn, Sankranti = Masuk) seperti yang terlihat dari Bumi. Saat ini dirayakan sekitar tanggal 14 Januari setiap tahun. Bertahun-tahun yang lalu, festival ini juga bertepatan dengan Titik Balik Matahari Musim Dingin di belahan bumi utara yang kita asumsikan terjadi pada tanggal 21 Desember.

- (T02.1) Berdasarkan informasi di atas, temukan tahun, y_c , ketika perayaan festival ini terakhir kali bertepatan dengan Titik Balik Matahari Musim Dingin di belahan bumi utara. **[3]**
- (T02.2) Jika Matahari tampak memasuki wilayah zodiak Capricorn pada waktu lokal 11:50:13 pada 14 Januari 2006 di Mumbai, hitung tanggal, D_{enter} , dan waktu lokal, t_{enter} , saat Matahari memasuki Capricorn pada tahun 2013. **[3]**
- (T02.3) Festival Makar-Sankranti dirayakan di suatu tempat pada hari saat matahari terbenam pertama di wilayah zodiak Capricorn. Anda dapat mengasumsikan bahwa waktu matahari terbenam lokal untuk Mumbai pada bulan Januari adalah pukul 18:30:00.

Tunjukkan tanggal perayaan festival setiap tahun antara 2006 dan 2013 (dengan mencentang (✓) [4]
kotak yang sesuai dalam tabel yang diberikan di Lembar Jawaban Ringkasan).

(T03) Gelombang Gravitasi

[15 nilai]

Lubang hitam ganda yang saling mengorbit menghasilkan gelombang gravitasi. Pertimbangkan dua lubang hitam, di Galaksi kita dengan massa $M = 36 M_{\odot}$ dan $m = 29 M_{\odot}$, berputar dalam orbit melingkar dengan frekuensi sudut orbital ω di sekitar pusat massa mereka.

- (T03.1) Dengan mengasumsikan gravitasi Newtonian, turunkan sebuah ekspresi untuk frekuensi sudut, ω_{ini} , dari orbit lubang hitam pada waktu, t_{ini} , ketika jarak antara lubang hitam adalah 4,0 kali jumlah dari jari-jari Schwarzschild mereka, sebagai fungsi dari M , m , dan konstanta fisika.

Hitung nilai ω_{ini} (dalam rad s^{-1}).

[5]

- (T03.2) Dalam relativitas umum, lubang hitam yang berada dalam orbit memancarkan gelombang gravitasi dengan frekuensi f_{GW} , sehingga $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. Hal ini mengecilkan orbit lubang hitam, yang pada gilirannya meningkatkan f_{GW} . Laju perubahan f_{GW} adalah

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

di mana $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ disebut sebagai “massa chirp”.

Temukan nilai dari α , β dan δ .

[4]

- (T03.3) Asumsikan bahwa gelombang gravitasi yang terkait dengan peristiwa tersebut pertama kali [6]
terdeteksi pada waktu $t_{\text{ini}} = 0$.

Turunkan sebuah ekspresi untuk waktu pengamatan penggabungan lubang hitam, t_{merge} , ketika f_{GW} menjadi sangat besar, sebagai fungsi dari ω_{ini} , M_{chirp} , dan hanya konstanta fisika.
Hitung nilai t_{merge} (dalam satuan detik).

(T04) Penurunan Balmer

[15 poin]

Andaikan sebuah bintang deret utama yang diselubungi oleh sebuah nebula. Magnitudo V bintang tersebut adalah 11,315 mag. Daerah terionisasi dari nebula yang dekat dengan bintang memancarkan garis $H\alpha$ dan $H\beta$; panjang gelombang mereka masing-masing adalah $0,6563 \mu\text{m}$ dan $0,4861 \mu\text{m}$. Rasio fluks yang diprediksi secara teoritis dalam garis $H\alpha$ terhadap $H\beta$ adalah $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2,86$. Namun, ketika radiasi ini melewati bagian luar nebula berdebu dingin, fluks emisi yang diamati dari garis $H\alpha$ dan $H\beta$ masing-masing adalah $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ dan $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

Ekstingsi A_{λ} adalah sebuah fungsi dari panjang gelombang dan dinyatakan sebagai

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Di sini, $\kappa(\lambda)$ adalah kurva ekstingsi dan $E(B - V)$ menunjukkan eksese warna dalam filter B dan V. Kurva ekstingsi (dengan λ dalam μm) diberikan sebagai berikut.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2,659 \times \left(-1,857 + \frac{1,040}{\lambda}\right) + R_V, & 0,63 \leq \lambda \leq 2,20 \\ 2,659 \times \left(-2,156 + \frac{1,509}{\lambda} - \frac{0,198}{\lambda^2} + \frac{0,011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0,12 \leq \lambda < 0,63 \end{cases}$$

di mana, $R_V = A_V/E(B - V) = 3,1$ adalah rasio ekstingsi total terhadap selektif.

(T04.1) Hitung nilai $\kappa(H\alpha)$ dan $\kappa(H\beta)$. [3]

(T04.2) Hitung nilai rasio eksek warna $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$. [4]

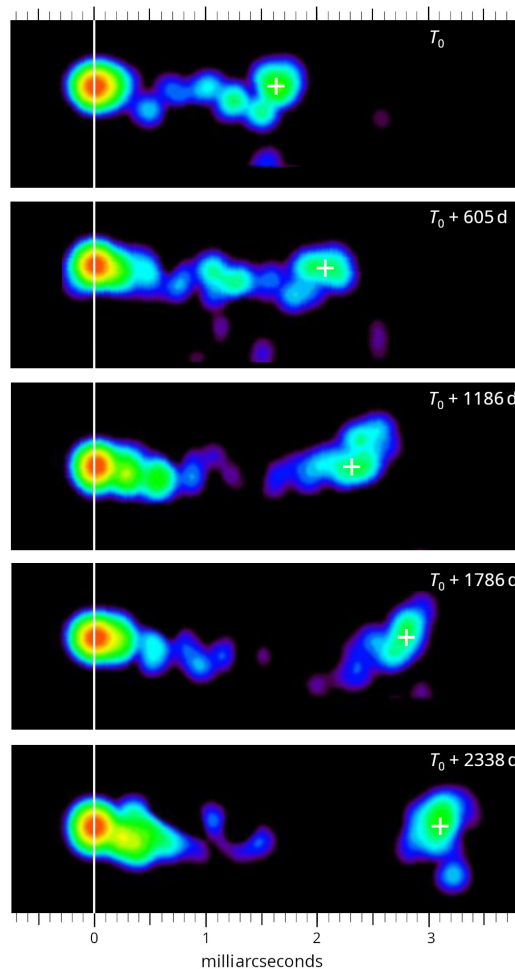
(T04.3) Perkirakan ekstingsi akibat nebula, $A_{H\alpha}$ dan $A_{H\beta}$, pada masing-masing panjang gelombang $H\alpha$ dan $H\beta$. [6]

(T04.4) Perkirakan ekstingsi nebula (A_V) dan magnitudo visual bintang dalam V, m_{V0} , tanpa adanya nebula. [2]

(T05) Quasar

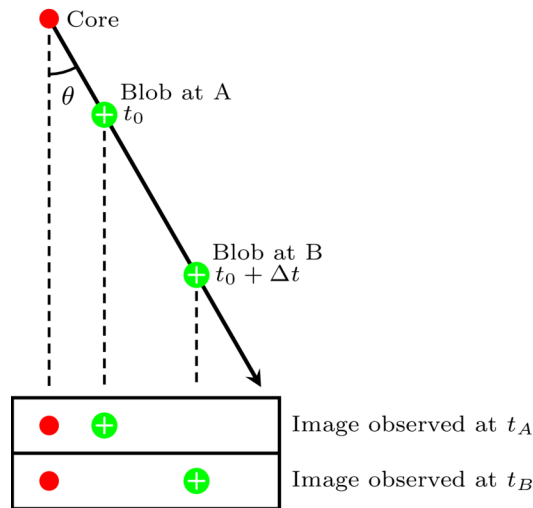
[20 poin]

Quasar adalah galaksi aktif yang sangat terang yang ditenagai oleh lubang hitam supermasif yang memancarkan jet relativistik. Gambar menunjukkan serangkaian panel citra radio dari quasar (dengan pergeseran merah $z = 0,53$, dan jarak luminositas $D_L = 1,00 \times 10^{10}$ tahun cahaya) pada waktu yang berbeda-beda. "Inti" quasar sejajar dengan garis putih vertikal, sementara jet, yang terdiri dari "bintik" (ditandai dengan tanda putih +), bergerak menjauh dari inti seiring waktu. Setiap panel menunjukkan waktu pengamatan (dimulai dengan T_0 untuk citra pertama), dan skala sudut ditunjukkan di bagian atas dan bawah gambar.



- (T05.1) Tentukan separasi sudut bintang, ϕ_{blob} (dalam milidetik busur), dan jarak transversalnya, l_{blob} (dalam tahun cahaya), dari inti quasar untuk setiap pengamatan. Kemudian, hitunglah kecepatan tampak bintang dalam arah transversal (v_{app}) sebagai fraksi kecepatan cahaya, $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ dengan menggunakan pengamatan yang berurutan. Juga hitunglah kecepatan tampak rata-rata $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ selama seluruh periode pengamatan. [5]

Jet dari quasar sebenarnya bergerak dengan kecepatan relativistik $v \equiv \beta c$, tetapi tidak selalu berada di bidang langit; misalnya, jet tersebut membentuk sudut θ ("sudut pandang") terhadap garis pandang pengamat yang jauh (ditunjukkan oleh garis putus-putus), seperti yang ditunjukkan pada sketsa di bawah ini. Untuk bagian ini dan semua bagian selanjutnya, abaikan pergeseran merah kuasar dan efek relativistik lainnya.



- (T05.2) Cahaya yang dipancarkan oleh bintang pada dua waktu berbeda t_0 (pada posisi A) dan $t_0 + \Delta t$ (pada posisi B) mencapai pengamat masing-masing pada t_A dan t_B . Dengan demikian, perbedaan waktu yang diamati adalah $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

- (T05.2a) Temukan ekspresi untuk rasio $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ sebagai fungsi dari β dan θ . [2]

- (T05.2b) Menggunakan rasio ini, nyatakan β_{app} sebagai fungsi dari β dan θ . [2]

- (T05.3) Gerak ini disebut superluminal jika kecepatan tampak melebihi kecepatan cahaya ($\beta_{\text{app}} > 1$), dan subluminal jika tidak ($\beta_{\text{app}} < 1$).

- (T05.3a) Untuk $\beta_{\text{app}} = 1$, buatlah kurva mulus dari β sebagai fungsi dari θ untuk menandai [4]
batas antara gerakan subluminal dan superluminal. Arsir daerah superluminal dalam grafik dengan garis miring (///).

- (T05.3b) Tentukan kecepatan terendah jet sebenarnya ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$) agar gerakan [2]
superluminal dapat terjadi dan juga sudut pandang yang sesuai θ_{low} .

- (T05.4) Temukan ekspresi untuk sudut pandang maksimum, θ_{max} , di mana nilai tertentu dari β_{app} [2]
mungkin terjadi.

Inti dari quasar, objek kompak di pusat, menunjukkan variabilitas dalam emisinya karena proses internal yang terjadi dalam wilayah yang terhubung secara kausal. Ukuran (= radius) dari wilayah ini biasanya diambil sekitar lima kali radius Schwarzschild dari intinya.

- (T05.5) Inti dari suatu quasar ditemukan bervariasi pada skala waktu sekitar 1 jam. Dapatkan batas atas, [3]
 $M_{c, \text{max}}$, pada massa objek kompak pusat, dalam satuan massa matahari.

(T06) Rotasi Galaksi

[20 poin]

Kurva rotasi Galaksi kita ditentukan menggunakan pengukuran kecepatan searah garis pandang dari awan hidrogen netral (HI) pada berbagai bujur Galaksi, yang diamati melalui garis HI 21 cm. Anggap sebuah awan HI dengan bujur Galaksi l , terletak pada jarak R dari Pusat Galaksi (GC) dan jarak D dari Matahari. Anggap Matahari berada pada jarak $R_0 = 8,5$ kpc dari GC. Asumsikan bahwa baik Matahari maupun awan HI berada dalam orbit melingkar mengelilingi GC di bidang Galaksi, dengan kecepatan sudut Ω_0 dan Ω , dan kecepatan rotasi V_0 dan V , masing-masing.

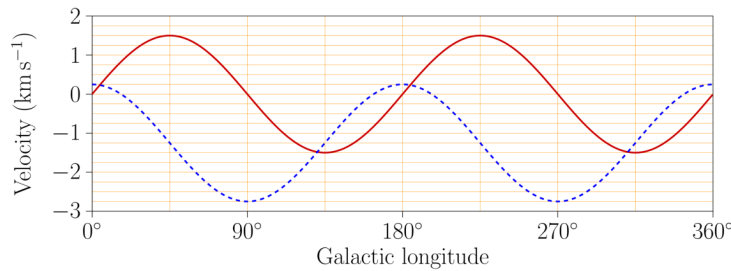
Komponen kecepatan garis pandang (V_r) dan kecepatan tangensial (V_t) dari awan, diamati dari Matahari, dapat dinyatakan sebagai

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Dilihat dari Kutub Utara Galaksi, rotasi Galaksi adalah searah jarum jam. Sepanjang soal ini, kita akan menganggap kecepatan garis pandang positif ketika menjauh dan awan akan diperlakukan sebagai objek titik.

- (T06.1) Pada grafik yang disediakan di Lembar Jawaban Ringkasan, buatlah sketsa V_r sebagai fungsi dari D dari $D = 0$ hingga $D = 2R_0$ untuk dua garis pandang yang didefinisikan oleh (i) $l = 45^\circ$ dan (ii) $l = 135^\circ$. Beri label pada setiap garis/kurva Anda dengan nilai l . [5]
- (T06.2) Grafik di bawah ini menunjukkan komponen kecepatan rata-rata radial (kurva merah, solid) dan rata-rata tangensial (kurva biru, putus-putus) bintang-bintang pada jarak 100 pc dari Matahari, yang diplot sebagai fungsi dari bujur Galaksi.



Dengan menggunakan grafik tersebut, perkirakan periode orbit Matahari (P) mengelilingi GC (Pusat Galaksi) dalam mega-tahun (Myr). [3]

- (T06.3) Jan Oort mencatat bahwa di lingkungan sekitar matahari ($D \ll R_0$), perbedaan dalam kecepatan sudut ($\Omega - \Omega_0$) akan kecil, dan karenanya, dia menurunkan pendekatan orde pertama berikut untuk komponen kecepatan radial dan tangensial:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

di mana A dan B dikenal sebagai konstanta Oort.

Mari kita pertimbangkan dua kasus:

(I) kurva rotasi Galaksi yang diamati secara aktual, dan

(II) kurva rotasi untuk skenario hipotetis di mana Galaksi tidak memiliki materi gelap dan seluruh massa Galaksi diasumsikan terkonsentrasi di pusatnya.

- (T06.3a) Turunkan ekspresi untuk gradien dari kecepatan rotasi terhadap jarak dari pusat pada lokasi Matahari, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$, untuk kedua kasus tersebut. [2]

- (T06.3b) Nyatakan A dan B sebagai fungsi dari V_0 , R_0 , dan gradien dari kecepatan rotasi terhadap jarak pada lokasi Matahari, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$. [8]

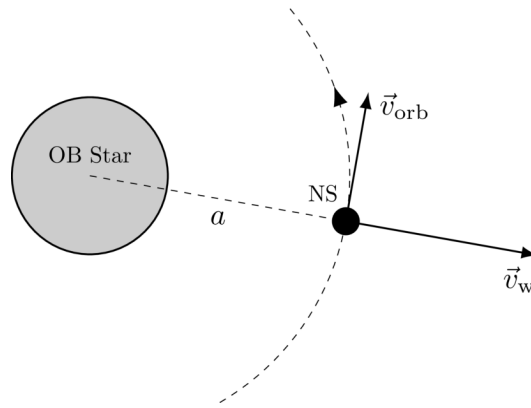
- (T06.3c) Rasio (A/B) dari konstanta Oort untuk kedua kasus yang diberikan, (I) dan (II), [2] didefinisikan sebagai F_I dan F_{II} , secara berurutan. Tentukan F_I dan F_{II} .

(T07) Bintang Neutron dalam Bintang Ganda

[20 marks]

Dalam sistem bintang ganda yang melibatkan bintang kompak, di mana bintang pasangannya tidak melebihi dari batas Roche-nya, sumber utama akresi untuk bintang kompak adalah angin bintang dari bintang pasangan. Akresi yang dipicu oleh angin bintang ini sangat signifikan dalam sistem yang mencakup bintang tipe awal (seperti bintang O atau B, selanjutnya disebut sebagai bintang OB), bersama dengan objek kompak seperti bintang neutron (NS) dalam orbit yang dekat.

Andaikan sistem bintang ganda NS-OB di mana bintang neutron dengan massa $M_{NS} = 2,0 M_{\odot}$ dan radius $R_{NS} = 11 \text{ km}$ mengorbit dalam orbit melingkar dengan radius a mengelilingi pusat bintang OB dengan kecepatan $v_{orb} = 1,5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (lihat gambar di bawah). Sepanjang masalah ini, kehilangan massa dari bintang OB diasumsikan simetri bola dan lajunya adalah $\dot{M}_{OB} = 1,0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.



- (T07.1) Jari-jari akresi, R_{acc} , didefinisikan sebagai jarak maksimum dari NS di mana angin bintang dapat ditangkap oleh NS. Jika kecepatan angin bintang pada jarak orbital NS adalah $v_w = 3,0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, tentukan R_{acc} untuk sistem di atas dalam km menggunakan perhitungan kecepatan lepas standar. [3]
- (T07.2) Dengan asumsi bahwa semua materi yang tertangkap diakresi oleh NS, perkirakan laju akresi massa, $\dot{M}_{acc}$, dari angin bintang ke NS dalam satuan $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ jika $a = 0,5 \text{ au}$. Abaikan efek tekanan radiasi dan waktu pendinginan terbatas dari gas yang terakresi. [3]
- (T07.3) Sekarang andaikan situasi di mana kecepatan angin bintang pada jarak orbit a (dekat NS) menjadi sebanding dengan kecepatan orbit NS. Laju akresi massa dari angin bintang ke NS dalam kasus ini akan diberikan dalam bentuk $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$, di mana $q = M_{NS}/M_{OB}$ adalah rasio massa dari bintang ganda dan β adalah sudut dalam kerangka NS antara arah kecepatan angin dan arah radial menjauh dari bintang OB. Dapatkan ekspresi untuk $f(\tan \beta, q)$ dengan asumsi $M_{OB} \gg M_{NS}$. [6]
- (T07.4) Andaika bahwa materi yang terionisasi penuh terakumulasi secara radial dan terhambat karena medan magnet yang kuat $\vec{B}$ dari NS. Efek ini dapat dimodelkan sebagai tekanan, yang diberikan oleh $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Kita akan mengasumsikan bahwa NS memiliki medan magnet dipol yang besarnya di bidang ekuatorial bervariasi dengan jarak r dari NS untuk $r \gg R_{NS}$ sebagai

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{NS}}{r} \right)^3$$

di mana B_0 adalah medan magnet di ekuator NS. Asumsikan bahwa sumbu dipol magnetik sejajar dengan sumbu rotasi NS.

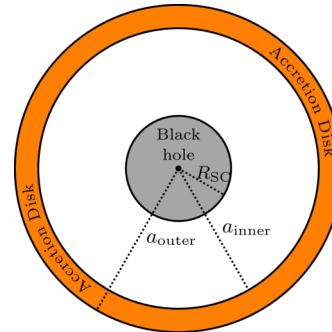
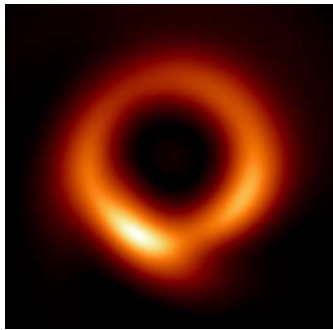
- (T07.4a) Dapatkan tekanan magnetik, $P_{\text{eq, mag}}$, di bidang ekuatorial dalam bentuk B_0 , R_{NS} , r , [1] dan konstanta lain yang sesuai.
- (T07.4b) Jarak maksimum di mana aliran akresi dihentikan oleh medan magnet di bidang ekuator disebut jari-jari magnetosfer R_m . Aliran materi ini akan memberikan tekanan karena gerakan relatif antara angin bintang yang masuk dan NS. Dapatkan perkiraan ekspresi untuk medan magnet kritis $B_{0, c}$ di mana R_m bertepatan dengan R_{acc} dan hitung nilainya dalam Tesla. Efek magnetik diabaikan untuk $r > R_m$ dan andaikan $v_w \gg v_{\text{orb}}$. [7]

(T08) Bayangan lubang hitam

[20 poin]

Event Horizon Telescope (EHT) telah merilis gambar lubang hitam supermasif di pusat galaksi M87 seperti yang ditunjukkan pada panel kiri gambar di bawah ini.

Untuk memahami beberapa fitur sederhana dari gambar ini, kita akan mempertimbangkan model sederhana dari lubang hitam yang tidak berotasi, statis, simetris secara sferis dengan massa $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$, dikelilingi oleh cakram akresi yang tipis, datar, dan tidak bermassa dengan jari-jari dalam dan luar, $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ dan $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, di mana R_{SC} adalah jari-jari Schwarzschild. Sketsa tampak depan ditunjukkan pada panel kanan gambar di bawah ini (gambar tidak sesuai skala).



Kita asumsikan bahwa cakram akresi adalah satu-satunya sumber cahaya yang perlu dipertimbangkan. Setiap titik pada cakram memancarkan cahaya ke segala arah. Cahaya ini bergerak di bawah pengaruh medan gravitasi lubang hitam. Jalur sinar cahaya diatur oleh dua persamaan yang diberikan di bawah ini (yang mirip dengan persamaan untuk objek di sekitar Matahari):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

di mana $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ adalah koordinat radial, $\phi \in [0, 2\pi)$ adalah sudut azimuth, dan E dan L adalah konstanta yang terkait dengan kekekalan energi dan kekekalan momentum sudut.

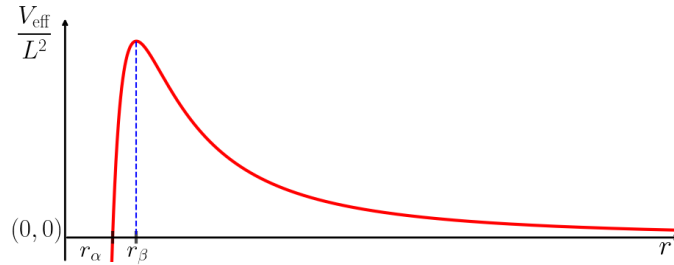
Di sini $v_r \equiv dr/dt$ adalah besaran kecepatan radial, v_ϕ adalah besaran kecepatan tangensial, dan $\omega \equiv d\phi/dt$ adalah kecepatan sudut. Kita mendefinisikan parameter impact b untuk suatu lintasan sebagai $b = L/\sqrt{2E}$. Dilatasi waktu diabaikan dalam masalah ini.

Persamaan berguna lainnya diperoleh dengan menurunkan persamaan pertama:

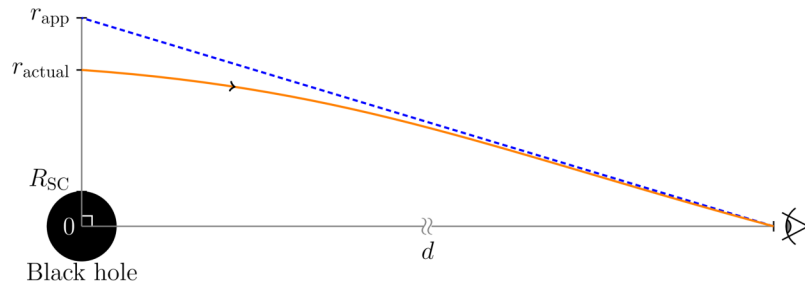
$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

- (T08.1) Lintasan cahaya melingkar dapat berada di sekitar lubang hitam. Temukan jari-jari, r_{ph} , dan parameter impact, b_{ph} , untuk lintasan foton dalam fungsi M dan konstanta terkait. [4]

- (T08.2) Hitunglah waktu, T_{ph} , yang diperlukan untuk menyelesaikan satu orbit penuh dari lintasan cahaya melingkar dalam detik. [2]
- (T08.3) Persamaan kecepatan radial yang diberikan di atas (persamaan pertama dalam soal ini) dapat dibandingkan dengan persamaan dalam bentuk $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$ untuk lintasan cahaya. Sebuah plot skematik dari V_{eff}/L^2 sebagai fungsi dari r diberikan di bawah ini.



- (T08.3a) Plot tersebut menunjukkan dua jari-jari khusus, r_α dan r_β . Dapatkan ekspresi untuk r_α dan r_β dalam bentuk M dan konstanta terkait. [2]
- (T08.3b) Sebuah foton yang bergerak ke dalam dari cakram akresi menuju lubang hitam masih dapat lolos ke tak hingga dalam beberapa kasus. Temukan ekspresi untuk nilai terkecil dari jari-jari titik balik, r_t , untuk foton tersebut, dalam bentuk M dan konstanta terkait. Temukan ekspresi untuk nilai minimum parameter impak, b_{min} , untuk foton ini. [3]
- (T08.4) Seberkas sinar cahaya yang berasal dari jarak r_{actual} dari pusat sistem di bidang langit akan mengalami pembelokan yang kuat akibat gravitasi lubang hitam, dan akhirnya mencapai pengamat (dilambangkan dengan mata) pada jarak yang jauh d dari sistem, seperti yang ditunjukkan di bawah ini.

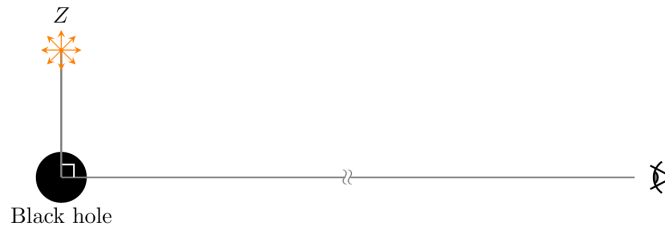


Bagi pengamat ini, sinar tersebut akan tampak berasal dari titik yang berbeda pada jarak $r_{app} \approx b$ dari pusat lubang hitam di bidang langit, di mana b adalah parameter impak untuk lintasan foton tersebut. Untuk titik-titik pada cakram akresi pada $r = r_{actual}$, dapat diasumsikan hubungan berikut:

$$b(r_{actual}) \approx r_{actual} \left(1 + R_{SC}/r_{actual}\right)^{1/2}$$

Untuk pengamat yang jauh, seperti kita, dengan pandangan langsung ke cakram akresi, citra dari sistem akan tampak simetris melingkar di bidang langit. Tentukan jari-jari tampak terluar, r_{outer} , dan jari-jari tampak terdalam, r_{inner} , dari citra dalam satuan astronomi sa. [5]

- (T08.5) Andaikan sebuah lubang hitam supermasif terisolasi dengan massa $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$ tanpa cakram akresi. Sebuah ledakan radiasi elektromagnetik yang kuat dan singkat terjadi selama 5 detik di titik Z pada jarak, misalnya, $r_Z = 6R_{SC}$ dari lubang hitam seperti yang ditunjukkan pada gambar. Ledakan di titik Z memancarkan cahaya ke segala arah. Seorang pengamat di titik yang jauh dari lubang hitam (ditandai dengan mata pada gambar di bawah) mengambil gambar paparan panjang dari daerah sekitar lubang hitam selama 60 detik.



Pilih opsi yang benar untuk setiap pernyataan di bawah ini:

- (T08.5a) Jumlah kemungkinan jalur cahaya untuk berjalan dari Z ke pengamat adalah [2]
(A) Paling banyak satu (B) Tepat satu (C) Tepat dua (D) Lebih dari dua.
- (T08.5b) Jumlah citra dari ledakan EM di Z yang akan terlihat dalam citra eksposur panjang [2]
adalah
(A) Paling banyak satu (B) Tepat satu (C) Tepat dua (D) Lebih dari dua.

(T09) Seeing Atmosfer

[35 marks]

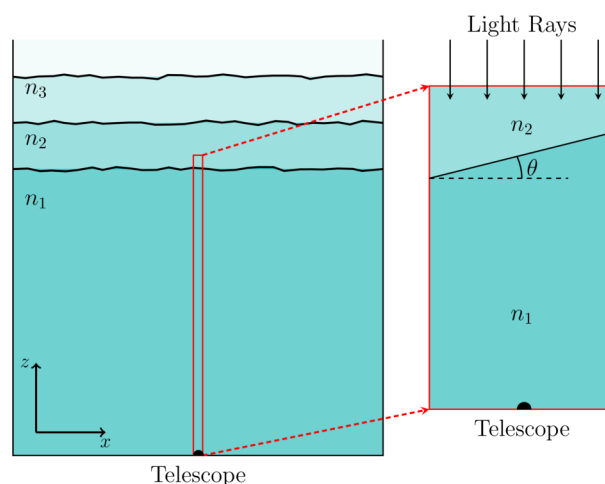
Sebuah teleskop dengan lensa objektif cembung akromatik berdiameter $D = 15$ cm dan panjang fokus $f = 200$ cm diarahkan ke sebuah bintang di zenit.

- (T09.1) Temukan diameter (dalam m), d_{image} , dari citra sebuah sumber titik yang dihasilkan oleh lensa objektif pada bidang fokusnya untuk cahaya hijau ($\lambda = 550$ nm), dengan hanya mempertimbangkan efek difraksi. [1]

Citra dari sebuah sumber astronomi juga dipengaruhi oleh apa yang disebut "atmospheric seeing".

Batas antara lapisan-lapisan di atmosfer serta indeks bias lapisan-lapisan tersebut terus menerus berubah karena turbulensi, variasi suhu, dan faktor-faktor lainnya. Hal ini menyebabkan perubahan kecil pada posisi gambar di bidang fokus teleskop, yang dikenal sebagai "twinkling effect". Untuk soal ini, selain menggunakan ukuran terbatas citra bintang yang dibatasi difraksi (seperti yang digunakan di atas), tidak ada efek interferensi yang akan dipertimbangkan.

Panel kiri pada gambar di bawah menunjukkan penampang vertikal atmosfer dengan beberapa lapisan dengan indeks bias yang berbeda ($n_1, n_2, n_3, \dots$). Panel kanan menunjukkan tampilan yang diperbesar dari segmen vertikal tipis atmosfer dan batas antara dua lapisan atmosfer terendah dengan indeks bias n_1 dan n_2 ($n_1 > n_2$). Kita hanya mempertimbangkan kedua lapisan ini dan batasnya untuk soal ini. Diagram tidak dibuat dengan skala yang tepat.

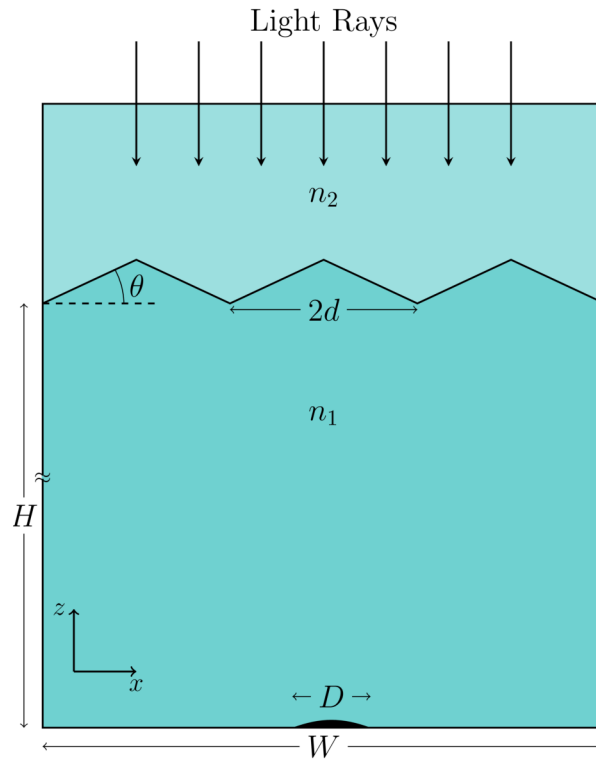


- (T09.2) Misalkan batas antara dua lapisan berada pada ketinggian $H = 1$ km tepat di atas objektif teleskop, dengan kemiringan $\theta = 30^\circ$ terhadap bidang horizontal. Pada semua bagian dari soal ini θ diambil positif dalam arah berlawanan jarum jam. Untuk sumber cahaya monokromatik, $n_1 = 1.00027$ dan $n_2 = 1.00026$. Misalkan pergeseran sudut gambar pada bidang fokus teleskop untuk bintang di zenit adalah α .
- (T09.2a) Gambarkan diagram sinar yang diberi label dengan tepat pada batas yang menunjukkan n_1, n_2, θ dan α . [2]
- (T09.2b) Temukan ekspresi untuk α sebagai fungsi dari θ, n_1 dan n_2 . Gunakan pendekatan sudut kecil: $\sin \alpha \approx \alpha$ dan $\cos \alpha \approx 1$. [2]
- (T09.2c) Hitung perpindahan, Δx_θ (dalam m), pada posisi citra jika θ meningkat sebesar 1% (dengan n_1 dan n_2 tetap). [3]
- (T09.2d) Hitung perpindahan, Δx_n (dalam m), pada posisi citra jika n_2 meningkat sebesar 0,0001% (dengan n_1 dan θ tetap). [3]
- (T09.3) Untuk cahaya putih yang berasal dari sebuah bintang di titik zenith, pilih mana dari berikut ini yang paling tepat menggambarkan bentuk dan warna gambar dengan mencentang ($\checkmark$) kotak yang sesuai (hanya satu) di Lembar Jawaban Ringkasan. Perhatikan x meningkat dari kiri ke kanan dalam gambar. [2]

	Warna gambar	Bentuk gambar	Tepi kiri	Tepi kanan
A	Putih	Lingkaran		
B	Putih	Elips		
C	Berwarna	Lingkaran	Biru	Merah
D	Berwarna	Lingkaran	Merah	Biru
E	Berwarna	Elips	Biru	Merah
F	Berwarna	Elips	Merah	Biru

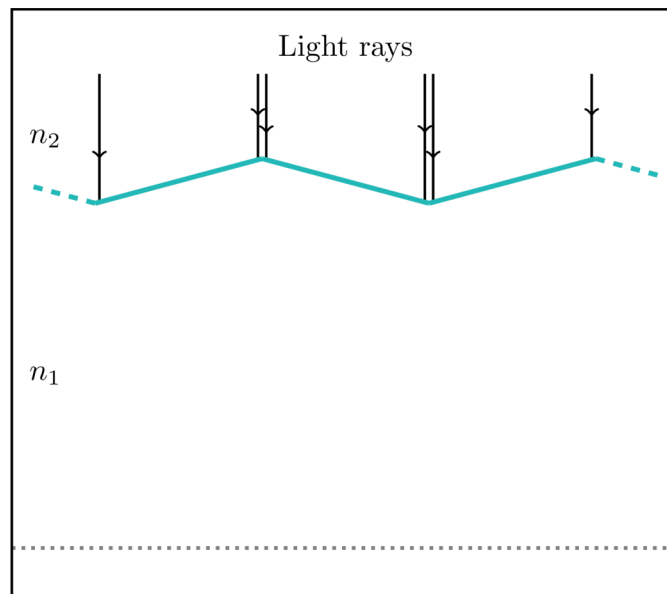
Untuk semua bagian yang tersisa dari pertanyaan ini, kita mengandaikan cahaya hijau monokromatik dengan $\lambda = 550$ nm. Kita memodelkan batas antara lapisan-lapisan sebagai sekumpulan bidang zigzag tak terhingga (yang bergerak tegak lurus terhadap bidang halaman) yang dipisahkan oleh $d = 10$ cm sepanjang sumbu x , dengan $\theta = 10^\circ$ atau $\theta = -10^\circ$.

Gambar di bawah ini (tidak sesuai skala) menunjukkan penampang model atmosfer ini dengan lebar W ($W \ll H$). Untuk teleskop dengan apertur besar, sifat zigzag dari batas ini menghasilkan pembentukan bintik-bintik (speckles) pada bidang fokus.



(T09.4) Pertimbangkan atmosfer yang dimodelkan seperti di atas.

(T09.4a) Bagian atmosfer dengan bidang zigzag berurutan, dengan parameter yang sama seperti yang disebutkan di atas, ditunjukkan dalam diagram di bawah ini (tidak sesuai skala).



Dalam diagram ini, yang direproduksi di Lembar Jawaban Ringkasan, gambarlah jalur sinar cahaya yang masuk hingga bidang tempat objektif teleskop ditempatkan, ditunjukkan oleh garis putus-putus abu-abu.

Tandai wilayah, jika ada, dengan "X" dalam diagram di mana tidak ada sinar cahaya [4]
yang akan mencapainya.

(T09.4b) Hitunglah lebar W_X dari wilayah tersebut.

[3]

(T09.4c) Temukan diameter terbesar, $D_{\max}$, dari objektif teleskop yang dengannya akan mungkin untuk mendapatkan citra tunggal dari bintang, dengan memilih lokasi teleskop yang tepat relatif terhadap struktur batas. [4]

(T09.5) Andaikan ada kasus ketika bentuk zigzag dari batas diperbolehkan pada kedua arah x dan y , dan $D = 100$ cm (dengan $f = 200$ cm). [6]

Gambarkan pola kualitatif dari bintang-bintang yang dihasilkan dalam kotak yang diberikan di Lembar Jawaban Ringkasan.

(T09.6) Untuk atmosfer turbulen, andaikan kembali bentuk zigzag lapisan batas yang berjalan secara paralel hanya sepanjang arah x , tetapi sekarang sudut antara dua bidang berubah dengan laju seragam dari 10° menjadi -10° dalam 1,0 detik. Asumsikan bahwa hal ini menyebabkan pergeseran posisi citra dengan laju yang seragam. [5]

Andaikan sebuah teleskop dengan $D = 8$ cm dan $f = 1$ m. Perkirakan waktu pencahayaan maksimum $t_{\max}$ yang diizinkan untuk kamera CCD-nya sehingga hanya mendapatkan satu citra, dan setiap kemungkinan penyimpangan posisinya tetap kurang dari 1% dari diameter citra yang dibatasi difraksi.

(T10) Nukleosintesis Big Bang

[35 marks]

Selama era dominasi radiasi di awal Alam Semesta, faktor skala Alam Semesta $a \propto t^{1/2}$, di mana t adalah waktu sejak Big Bang. Selama sebagian besar era ini, neutron (n) dan proton (p) tetap dalam kesetimbangan termal satu sama lain melalui interaksi lemah. Kerapatan jumlah (N) neutron atau proton bebas berhubungan dengan suhu T dan massa masing-masing m sedemikian sehingga

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

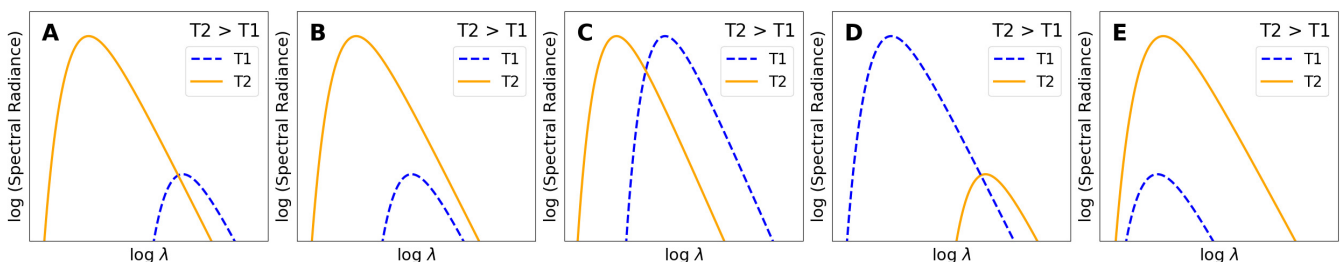
selama waktu $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70$ s, ketika $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. Setelah t_{wk} , interaksi lemah tidak dapat lagi mempertahankan kesetimbangan tersebut, dan neutron bebas meluruh menjadi proton dengan waktu paruh 610,4 detik.

(T10.1) Misalkan kerapatan jumlah proton adalah N_p , dan kerapatan jumlah neutron adalah N_n . [4]
Hitunglah kelimpahan relatif neutron yang diberikan oleh rasio $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ pada waktu t_{wk} .

(T10.2) Foton mempertahankan kesetimbangan termal dan mempertahankan spektrum benda hitam di semua era.

(T10.2a) Temukan indeks β , sehingga $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Identifikasi mana dari grafik berikut yang menunjukkan perilaku yang benar dari kerapatan energi spektral untuk dua suhu T_1 dan T_2 . Beri tanda centang (✓) pada opsi yang benar di Lembar Jawaban Ringkasan. [2]

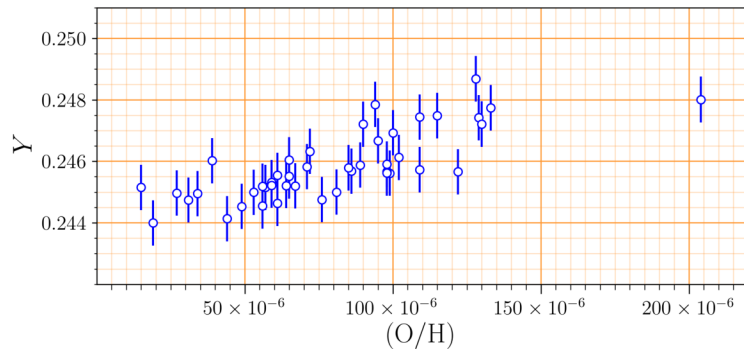


- (T10.3) Setelah t_{wk} , proses pembentukan deuterium dari proton dan neutron diatur oleh persamaan Saha, yang diberikan oleh fisikawan India Prof. Meghnad Saha, yang dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

Di sini, rasio baryon-terhadap-foton η adalah 6.1×10^{-10} , dan N_D adalah kerapatan jumlah deuterium.

- (T10.3a) Gambarkan plot rasio N_D/N_n pada kertas grafik di Lembar Jawaban Ringkasan, untuk setidaknya 4 nilai suhu yang berjarak wajar yang berada dalam domain $k_B T = [60, 70]$ keV, dan gambar kurva halus yang melewati titik-titik ini. [5]
- (T10.3b) Dari plot tersebut, tentukan $k_B T_{nuc}$ (dalam keV) di mana $N_D = N_n$. [1]
- (T10.3c) Sebaliknya, sekarang asumsikan bahwa semua neutron bebas bergabung secara instan dengan proton pada $k_B T_{nuc}$ untuk membentuk Deuterium, dan semua itu segera dikonversi menjadi Helium (${}^4\text{He}$). Hitunglah era atau waktu nukleosintesis yang sesuai, t_{nuc} (dalam s), untuk pembentukan Helium. [4]
- (T10.4) Hitung nilai $X_{n, nuc}$ tepat sebelum t_{nuc} . [5]
- (T10.5) Kelimpahan Helium primordial, Y_{prim} , didefinisikan sebagai fraksi dari total massa baryonik di Alam Semesta yang terikat dalam Helium tepat setelah t_{nuc} . Dapatkan perkiraan teoretis untuk nilai Y_{prim} . Khusus untuk perhitungan ini saja, asumsikan $m_p \approx m_n$ dan bahwa massa Helium, $m_{He} \approx 4m_n$. [3]
- (T10.6) Kelimpahan primordial Helium sangat sulit diukur, karena bintang-bintang terus mengubah Hidrogen menjadi Helium di Alam Semesta. Jumlah pemrosesan oleh bintang-bintang dalam galaksi dicirikan oleh kerapatan jumlah relatif Oksigen (yang hanya diproduksi oleh bintang) terhadap hidrogen, dilambangkan sebagai (O/H), dalam galaksi. Kompilasi pengukuran (O/H) dan kelimpahan Helium, Y , untuk berbagai galaksi diplot di bawah ini.



Gunakan semua titik dalam plot ini (yang direproduksi dalam Lembar Jawaban Ringkasan) untuk menjawab pertanyaan berikut.

- (T10.6a) Perkirakan Y untuk sebuah galaksi kerdil kompak biru dengan nilai $(O/H) = 1.75 \times 10^{-4}$. [2]
- (T10.6b) Dapatkan kemiringan $dY/d(O/H)$ dari fit garis lurus dengan data di atas. [2]
- (T10.6c) Perkirakan kelimpahan Helium primordial, Y_{prim}^{obs} , berdasarkan pengamatan di atas. [2]
- (T10.7) Deviasi antara Y_{prim} dan Y_{prim}^{obs} dapat diselaraskan dengan mengubah rasio baryon-terhadap-foton η . Ketika η diturunkan, seperti yang ditunjukkan oleh $\downarrow$ dalam Lembar Jawaban Ringkasan, tunjukkan kenaikan ($\uparrow$) atau penurunan ($\downarrow$) dalam $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (ketika $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, nuc}$, dan Y_{prim} dalam kotak yang disediakan di Lembar Jawaban Ringkasan. [3]

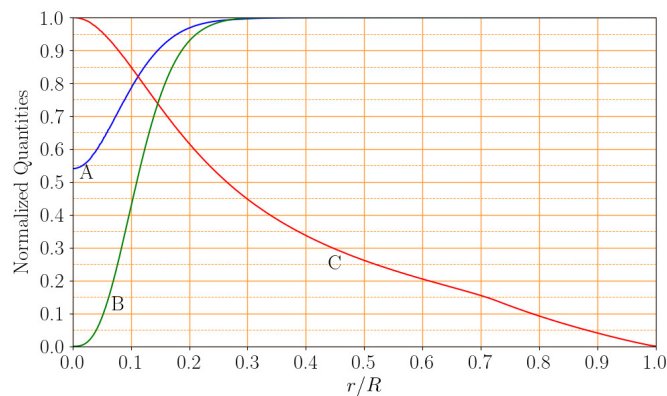
(T11) Bintang melalui grafik

[50 marks]

Bintang dapat dianggap dengan baik sebagai objek simetris berbentuk bola, dan karenanya jarak radial r dari pusat dapat dipilih sebagai satu-satunya variabel independen dalam pemodelan interior bintang. Massa yang terkandung dalam bola dengan radius r dilambangkan dengan $m(r)$. Luminositas $l(r)$ didefinisikan sebagai energi total yang mengalir keluar melalui permukaan bola dengan radius r per satuan waktu. Kuantitas lain yang menarik, misalnya, kerapatan $\rho(r)$, suhu $T(r)$, fraksi massa hidrogen $X(r)$, fraksi massa helium $Y(r)$, dan energi nuklir yang dihasilkan per satuan massa per satuan waktu $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, sebagai fungsi dari r . Sepanjang soal ini kita akan mengabaikan efek difusi dan pengendapan gravitasi elemen-elemen di dalam bintang. Simbol "log" mengacu pada logaritma dengan basis 10. Soal ini terdiri dari tiga bagian independen.

(T11.1) Bagian 1: Di dalam bintang

Grafik di bawah ini menunjukkan variasi dari tiga besaran struktural, A, B, dan C, sebagai fungsi dari fraksi radius r/R pada model bintang dengan massa $1 M_{\odot}$ dan usia 4 GYr, di mana R adalah radius fotosfer bintang. Nilai fraksi massa helium di permukaan (fotosfer), Y_s , dan metalisitas (fraksi massa semua elemen yang lebih berat dari helium) di permukaan (fotosfer), Z_s , dari bintang tersebut diberikan oleh $(Y_s, Z_s) = (0.28, 0.02)$. Semua besaran yang ditampilkan dalam plot dinormalisasi dengan nilai maksimum masing-masing.



(T11.1a) Identifikasi tiga kuantitas A, B, dan C secara unik dari lima kemungkinan berikut:

[6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Tuliskan A/B/C di kotak di samping kuantitas yang sesuai dalam Lembar Jawaban Ringkasan. Tidak diperlukan justifikasi untuk jawaban Anda.)

(T11.1b) Berapakah fraksi massa helium di pusat, Y_c , dari bintang tersebut?

[3]

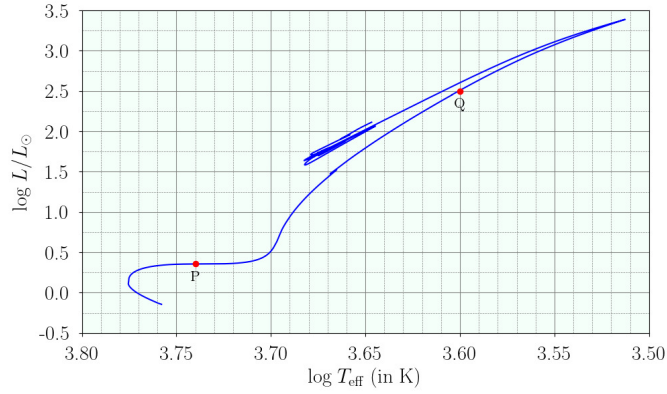
(T11.1c) Buatlah sketsa dua kuantitas yang tersisa dari daftar lima kuantitas (yang tidak diidentifikasi sebagai kurva A, B, atau C) yang diberikan pada (T11.1a), sebagai fungsi dari r/R pada grafik yang sama dalam Lembar Jawaban Ringkasan, dan beri label sesuai dengan kuantitas masing-masing.

[5]

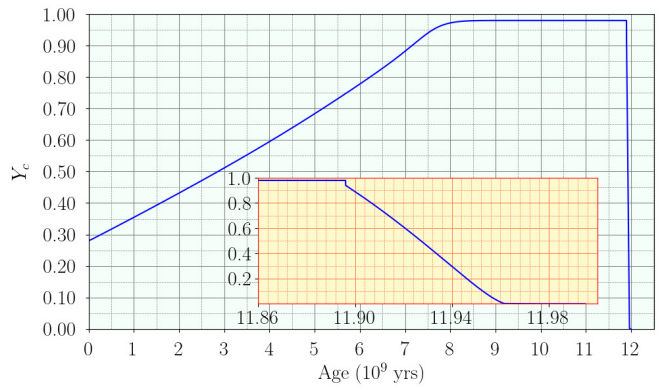
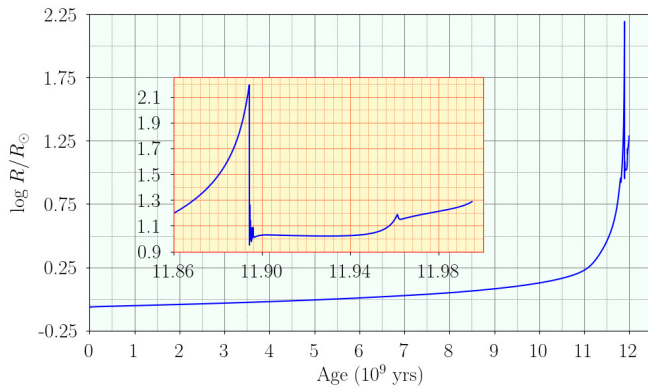
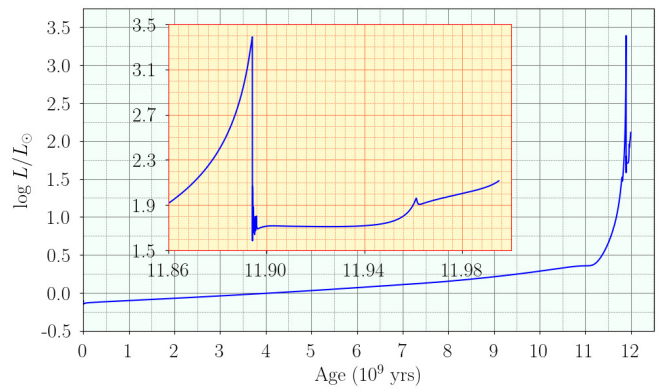
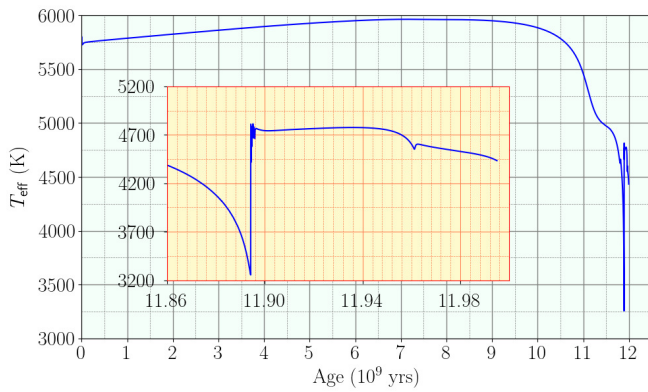
(T11.2) Bagian 2: Bintang yang berevolusi

Andaikan evolusi sebuah bintang bermassa $1 M_{\odot}$ yang komposisi awal seragam, diberikan oleh fraksi massa helium, $Y_0 = 0.28$, dan logam, $Z_0 = 0.02$. Gambar-gambar di bawah ini menunjukkan variasi dari berbagai kuantitas global bintang ini saat berevolusi dari ZAMS (Zero Age Main Sequence) hingga akhir pembakaran helium di intinya.

Grafik di bawah ini menunjukkan jalur evolusi bintang pada diagram HR (plot $\log L/L_{\odot}$ vs $\log T_{\text{eff}}$, di mana L adalah luminositas permukaan dan T_{eff} adalah suhu efektif).



Gambar di bawah ini memiliki empat grafik yang menunjukkan variasi T_{eff} (dalam K), L (diplot sebagai $\log L/L_{\odot}$), R (diplot sebagai $\log R/R_{\odot}$), dan Y_c dengan umur (dalam 10^9) dari bintang yang sama. Pada masing-masing dari empat grafik ini, sisipan menunjukkan variasi dari kuantitas masing-masing secara detail antara umur $11,86 \times 10^9$ tahun hingga $12,00 \times 10^9$ tahun, untuk kejelasan yang lebih baik.



Gunakan grafik-grafik ini untuk menjawab pertanyaan di bawah ini.

- (T11.2a) Berapa perkiraan masa hidup deret utama, t_{MS} (dalam tahun), dari bintang tersebut? [1]
- (T11.2b) Berapa perkiraan durasi, Δt_{He} (dalam tahun), selama bintang tersebut membakar helium di intinya? [1]
- (T11.2c) Berapa fraksi, f_{H} , dari hidrogen awal di pusat yang telah terbakar ketika luminositas bintang tersebut adalah $1 L_{\odot}$? [3]
- (T11.2d) Berapa jari-jari bintang, R_1 (dalam satuan R) ketika 60% dari jumlah awal hidrogen di pusat telah terbakar? [3]

(T11.2e) Berapa jari-jari bintang, R_P dan R_Q (dalam satuan $R_\odot$), yang sesuai dengan posisi P [4] dan Q, masing-masing, seperti yang ditandai pada diagram HR?

(T11.3) **Bagian 3: Distribusi massa di dalam bintang**

Persamaan yang mengatur distribusi massa di dalam bintang diberikan oleh

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Akan lebih mudah untuk menyatakan persamaan ini dalam bentuk tiga variabel tanpa dimensi, yaitu, massa fraksional, q , jari-jari fraksional, x , dan kerapatan relatif, σ , yang kita definisikan sebagai

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

di mana M dan R adalah massa total dan jari-jari bintang, dan $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ adalah kerapatan rata-rata bintang. Untuk bintang tertentu yang akan kita pertimbangkan dalam bagian ini, informasi berikut diberikan:

- Kerapatan pusat $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$
- Setengah dari massa bintang terkandung dalam 25% bagian dalam dari total jari-jarinya, dan 70% dari massanya terkandung dalam 35% bagian dalam dari total jari-jarinya.

Dalam semua bagian selanjutnya dari pertanyaan ini, akan cukup untuk membulatkan semua koefisien numerik yang diperoleh hingga 0,005.

(T11.3a) Nyatakan persamaan di atas yang menggambarkan ketergantungan massa pada jari-jari dalam bentuk x , $\frac{dq(x)}{dx}$ dan $\sigma(x)$. [2]

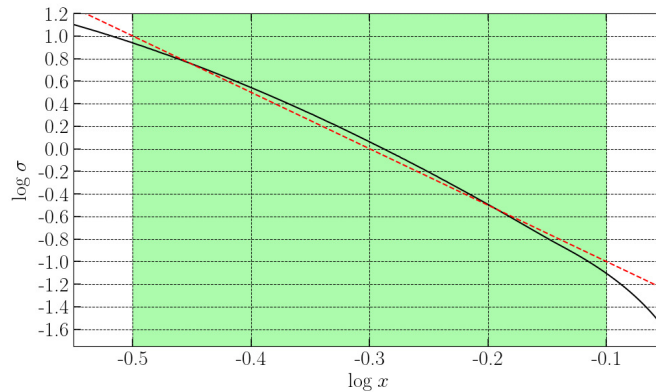
Untuk mendapatkan distribusi massa dengan jari-jari, kita perlu mengetahui profil kerapatan di dalam bintang. Untuk tujuan soal ini, kita akan menggambarkan variasi kerapatan dengan jari-jari menggunakan bentuk pendekatan dalam dua domain x :

- bagian dalam bintang: $0 \leq x \leq 0.32$
- bagian tengah bintang: $0.32 < x < 0.80$

Kita tidak membuat pendekatan apapun untuk bagian terluar, yaitu $0.80 \leq x \leq 1.00$.

(T11.3b) **Pendekatan untuk bagian tengah:**

Variasi $\log \sigma$, sebagai fungsi dari $\log x$ di bagian tengah bintang ditunjukkan (oleh kurva hitam) dalam grafik di bawah ini. Kita akan membuat pendekatan linear (ditunjukkan sebagai garis merah putus-putus dalam grafik) untuk $\log \sigma$ sebagai fungsi dari $\log x$ dalam domain $-0.5 < \log x < -0.1$, yaitu $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (ditunjukkan oleh domain berwarna hijau). Selanjutnya, kita akan mendekati kemiringan garis ini dengan bilangan bulat terdekat.



Gunakan pendekatan ini untuk menulis ekspresi untuk $\sigma(x)$ sebagai fungsi dari x [4]
dalam domain $0.32 < x < 0.80$.

(T11.3c) Gunakan hasil dari (T11.3b) untuk menurunkan ekspresi untuk $q(x)$ dalam domain [6]
 $0.32 < x < 0.80$.

(T11.3d) **Pendekatan untuk bagian dalam:**

Di bagian dalam bintang ($0 \leq x \leq 0.32$), kerapatan dapat didekati sebagai fungsi [8]
linear dari jari-jari, yaitu $\sigma(x) = Ax + B$, di mana A, B adalah konstanta. Tentukan A
dan B , dan dengan demikian dapatkan ekspresi untuk $q(x)$ dalam domain
 $0 \leq x \leq 0.32$. Perhatikan bahwa pendekatan yang diadopsi pada bagian sebelumnya
dan bagian ini mungkin menyebabkan diskontinuitas kecil dalam kerapatan atau
massa pada $x = 0.32$.

(T11.3e) Ekspresi untuk $q(x)$ yang diperoleh pada bagian (T11.3c) dan (T11.3d) adalah [4]
pendekatan yang menggambarkan variasi massa dengan jari-jari dengan cukup baik,
tetapi hanya di wilayah tertentu dari bintang. Untuk domain $0.80 \leq x \leq 1$ (yang
belum kita turunkan ekspresinya), dimungkinkan untuk menggunakan ekstrapolasi
yang sesuai dari wilayah tetangga. Gunakan ekspresi pendekatan ini dan data yang
diberikan untuk membuat sketsa kurva yang mulus (tanpa diskontinuitas baik pada
 $q(x)$ atau turunannya) untuk $q(x)$ vs x untuk seluruh bintang ($0 \leq x \leq 1$) yang
mewakili variasi massa dengan jari-jari.

(T12) Radiasi Hawking dari Lubang Hitam

[50 marks]

(T12.1) Lubang hitam (BH) biasanya terbentuk melalui keruntuhan gravitasi bintang masif di akhir siklus
hidupnya menjadi sebuah titik yang disebut singularitas. Karena gravitasi ekstrem dari objek
tersebut, tidak ada yang dapat lolos dari apa yang disebut cakrawala peristiwa (permukaan
berbentuk bola dengan $r = R_{\text{SC}}$, di mana r adalah jarak dari singularitas) setelah memasuki area
tersebut. Di sini, R_{SC} disebut sebagai jari-jari Schwarzschild.

(T12.1a) **Pemodelan awal radiasi Hawking:** Andaikan sepasang partikel, masing-masing dengan
massa m , yang dihasilkan pada kedua sisi horizon BH. Satu partikel berada sedikit
di luar horizon pada $r \approx R_{\text{SC}}$, sementara partikel lainnya berada di dalam horizon pada
 $r = \kappa R_{\text{SC}}$. Asumsikan bahwa energi total partikel adalah jumlah dari energi massa
diamnya mc^2 dan energi potensial gravitasi akibat BH.

Tentukan nilai κ di mana pasangan partikel memiliki energi total nol.

[4]

(T12.1b) **Suhu lubang hitam:** Jika partikel yang dihasilkan di luar horizon pada proses di atas
memiliki energi kinetik yang cukup, partikel tersebut dapat lolos dari lubang hitam
dalam proses yang disebut radiasi Hawking. Partikel yang berada di dalam horizon, yang
memiliki energi negatif, diserap dan mengurangi massa lubang hitam.

Asumsikan bahwa semua radiasi Hawking terdiri dari foton dengan spektrum benda hitam yang mencapai puncak pada panjang gelombang $\lambda_{bh} \approx 16R_{SC}$. Diketahui bahwa untuk lubang hitam bermassa matahari, $R_{SC, \odot} = 2,952 \text{ km}$.

Dapatkan ekspresi untuk suhu, T_{bh} , dari BH yang sesuai dengan radiasi benda hitam [4] ini, sebagai fungsi massa M_{bh} dan konstanta fisika. Hitunglah jari-jari Schwarzschild, $R_{SC, 10\odot}$, dan suhu, $T_{bh, 10\odot}$, untuk lubang hitam dengan massa $10 M_{\odot}$.

(T12.1c) **Kehilangan massa lubang hitam:** Asumsikan bahwa radiasi Hawking dipancarkan keluar dari horizon peristiwa.

Menggunakan kesetaraan massa-energi, dapatkan ekspresi untuk laju kehilangan massa, $dM_{bh}(t)/dt$, sebagai fungsi dari massa $M_{bh}(t)$ lubang hitam dan konstanta fisika.

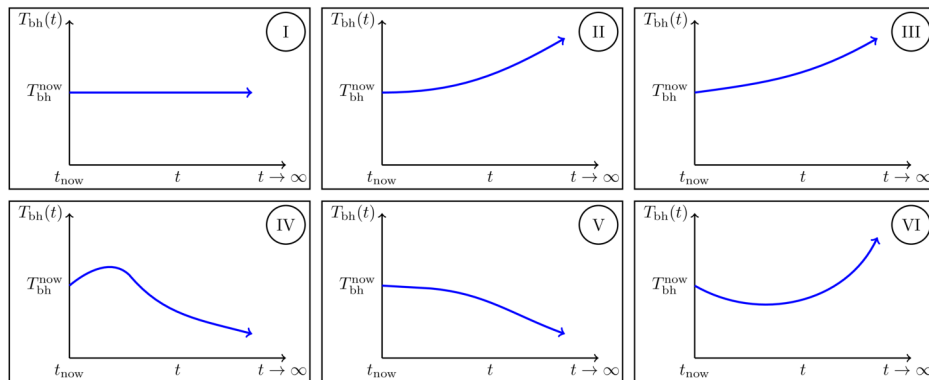
Oleh karena itu, dapatkan ekspresi untuk $M_{bh}(t)$ untuk lubang hitam dengan massa [8] awal M_0 . Buatlah sketsa $M_{bh}(t)$ sebagai fungsi dari t dari $M_{bh} = M_0$ hingga $M_{bh} = 0$.

(T12.1d) **Kala hidup lubang hitam:** Dapatkan ekspresi untuk kala hidup τ_{BH} di mana lubang [3] hitam dengan massa awal M_0 sepenuhnya menguap karena radiasi Hawking, sebagai fungsi M_0 dan konstanta fisika. Hitunglah kala hidup $\tau_{bh, 10\odot}$ (dalam detik) untuk lubang hitam dengan $M_0 = 10 M_{\odot}$.

(T12.1e) **Lubang hitam dalam radiasi CMB:** Andaikan sebuah lubang hitam terisolasi di ruang angkasa, jauh dari benda-benda lain, dengan suhu saat ini T_{bh}^{now} , dikelilingi oleh radiasi latar belakang kosmik (CMB) dengan suhu saat ini $T_{cmb}^{now} = 2,7 \text{ K}$. Lubang hitam dapat bertambah massanya dengan menyerap radiasi CMB, dan kehilangan massanya melalui radiasi Hawking.

Dengan mempertimbangkan percepatan ekspansi Alam Semesta, identifikasi gambar mana dari berikut ini yang menunjukkan evolusi waktu jangka panjang dari T_{bh} dalam tiga kasus berikut:

(X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Tunjukkan jawaban Anda dengan mencentang kotak yang sesuai (hanya satu) untuk [6] setiap kasus X, Y atau Z dalam Tabel yang diberikan di Lembar Jawaban Ringkasan yang sesuai dengan nomor gambar yang tepat.

(T12.2) Lubang hitam primordial (PBH) dengan massa yang jauh lebih kecil dapat terbentuk pada awal sekali Alam Semesta. Semua pertanyaan berikut terkait dengan PBH. Di sini, proses apa pun yang meningkatkan massa lubang hitam dapat diabaikan.

(T12.2a) **PBH yang menguap pada era saat ini:** Seperti yang mungkin telah Anda perhatikan dari jawaban pertanyaan sebelumnya, lubang hitam dengan massa matahari akan membutuhkan waktu yang lama untuk menguap. Namun, karena PBH dapat memiliki massa yang jauh lebih kecil, kita mungkin dapat melihatnya menguap pada masa sekarang.

Temukan massa awal $M_{0, \text{PBH}}$ (dalam kg), jari-jari Schwarzschild $R_{\text{SC, PBH}}$ (dalam m), dan suhu T_{PBH} (dalam K) dari lubang hitam yang mungkin menguap sepenuhnya pada era sekarang, yaitu, yang memiliki masa hidup $\tau_{\text{PBH}} = 14$ miliar tahun. [4]

(T12.2b) **Pembentukan PBH:** Pada Alam Semesta awal yang didominasi radiasi, faktor skala bervariasi sebagai $a(t) \sim t^{1/2}$. Pada era ini, PBH terbentuk karena keruntuhan semua energi yang terkandung dalam suatu wilayah dengan ukuran fisik ct , di mana t adalah usia Alam Semesta pada saat itu.

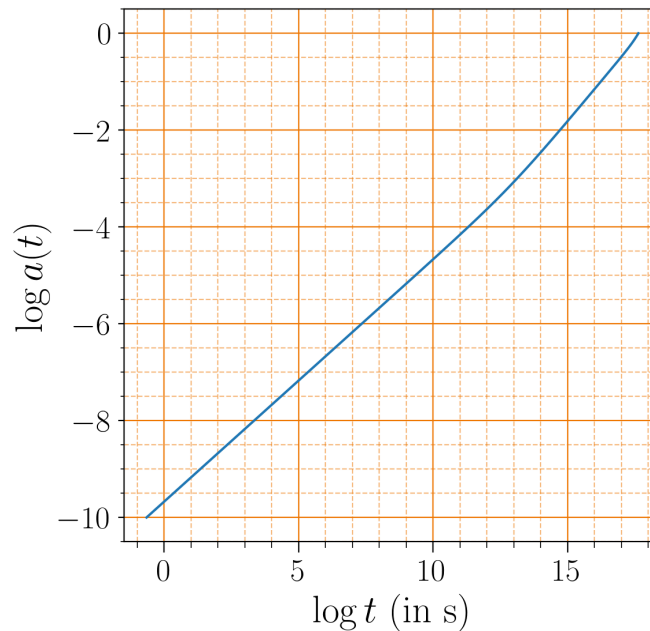
Sebuah PBH dengan massa 1×10^{12} kg terbentuk ketika usia Alam Semesta sekitar 1×10^{-23} s. Hitunglah usia Alam Semesta, t_{20} , ketika sebuah PBH yang bermassa 1×10^{20} kg terbentuk. [6]

(T12.2c) **Spektrum radiasi Hawking yang diamati dari PBH:** Andaikan sebuah PBH dengan massa awal 1×10^{10} kg yang sepenuhnya menguap di akhir masa hidupnya τ_{PBH} . Untuk bagian ini, asumsikan untuk penyederhanaan bahwa sebagian besar radiasi Hawking dipancarkan pada waktu ini, dengan suhu yang sesuai dengan massa awalnya. Juga, anggap faktor skala Alam Semesta berkembang sebagai $a(t) \sim t^{2/3}$.

Hitunglah panjang gelombang puncak dari radiasi Hawking ini jika diamati di Bumi, λ_{earth} , pada masa sekarang (pada $t = 14$ miliar tahun). [5]

(T12.2d) **Radiasi kosmik energi tinggi dari PBH:** Sekarang asumsikan bahwa radiasi Hawking yang dipancarkan pada waktu tertentu t berkorespondensi dengan foton yang dipancarkan dengan energi $k_B T_{\text{bh}}(t)$. Juga, suhu tertinggi yang mungkin untuk lubang hitam adalah suhu Planck T_{Planck} di mana $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Evolusi faktor skala selama rentang waktu yang relevan diberikan dalam gambar berikut. Faktor skala saat ini ditetapkan sebagai satu. $t(s)$ pada sumbu waktu mewakili usia alam semesta dalam detik.



Jika foton dengan energi $E_{\text{det}} = 3,0 \times 10^{20}$ eV diamati di Bumi, tentukan nilai terbesar dan terkecil yang mungkin dari massa awal PBH (M_0^{max} dan M_0^{min}) yang dapat bertanggung jawab atas foton ini. [10]

