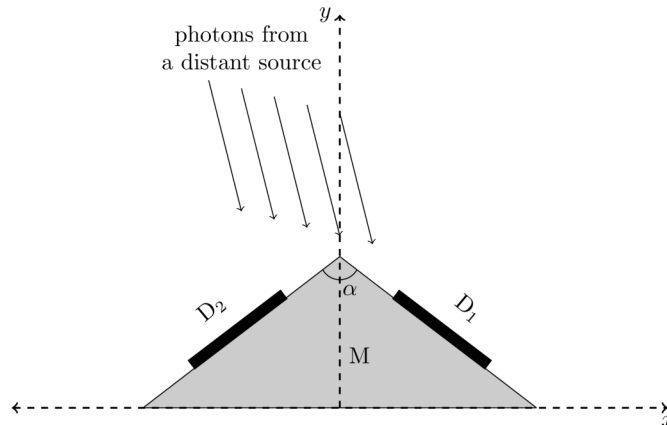


(T01) A Daksha-küldetés

[10 pont]

A „Daksha” egy tervezett indiai küldetés, amely két műholdból áll (S_1 és S_2), ezek a Föld körül ugyanazon $r = 7000$ km sugarú körpályán keringenek, de 180° -os fáziskülönbséggel. A műholdak a világegyetemet a nagy energiájú tartományban (röntgen- és γ -sugárzás) figyelik meg. A Daksha mindkét műholdja több sík, téglalap alakú detektort használ.

Azért, hogy megértsük, hogyan lehet lokalizálni egy forrást az égen, a Daksha-küldetés egy egyszerűsített modelljét használjuk. Tegyük fel, hogy az S_1 -nek két azonos detektora van (D_1 és D_2), mindkettő $A = 0,50$ m² területű, és egy átlátszatlan M tartóra vannak erősítve, ahogyan azt az alábbi ábra mutatja. A detektorok az y tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el az x - y síkra merőleges síkokban, és $\alpha = 120^\circ$ -os szöget zárnak be egymással.



- (T01.1) Az x - y síkban lévő távoli forrás megfigyelésekor a D_1 detektor $P_1 = 2,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹, a D_2 detektor pedig $P_2 = 4,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ teljesítményt mér.

Adj becslést a forrás helyvektora által az y tengellyel bezárt η szögére! Az y tengely pozitív irányától az óramutató járásával ellentétes irányban mért szög a pozitív. [5]

Tekintsünk egy távoli forrásból származó egyedi (nem feltétlenül az x - y síkba eső) felvillanást, amelyet mindkét Daksha-műhold (az S_1 és az S_2 is) rögzít. A felvillanás S_1 és S_2 által rögzített időpontjai legyenek rendre t_1 és t_2 .

- (T01.2) A $t_1 - t_2$ különbség mért értéke $10,0 \pm 0,1$ ms. A teljes éggömbhöz viszonyítva határozd meg az éggömb azon részének f arányát, ahol a forrás elhelyezkedhet! [5]

(T02) Makar-Sankranti

[10 pont]

A "Makar-Sankranti" fesztivált Indiában akkor ünneplik, amikor a Nap a Földről nézve belép a Capricornushoz tartozó állatövi régióba (Makar = Capricornus, Sankranti = belépés). Jelenleg minden év január 14-e körül ünneplik. Sok évvel ezelőtt ez az ünnep egybeesett az északi féltekén a téli napfordulóval is, amelyről feltehetjük, hogy december 21-én van.

- (T02.1) A fenti információk alapján határozd meg azt az y_c évet, amikor ez az ünnep utoljára egybeesett az északi félteke téli napfordulójával! [3]

- (T02.2) Ha a Nap 2006. január 14-én, helyi idő szerint 11:50:13 órakor lépett be a Capricornus állatövi régiójába Mumbaiból nézve, határozd meg a D_{enter} dátumot, és a t_{enter} helyi időt, amikor 2013-ban belépett a Capricornus régiójába. [3]

- (T02.3) A Makar-Sankranti fesztivált egy adott helyen azon a napon ünneplik, amikor a nap először nyugszik le a Capricornus állatövi régiójában. Feltételezhetjük, hogy Mumbaiban januárban a helyi napnyugta időpontja 18:30:00 óra.

Jelöld a fesztivál ünneplésének dátumát minden évben 2006 és 2013 között (a megfelelő mező bejelölésével (✓) az Összesítő Válaszlapon található táblázatban)! [4]

(T03) Gravitációs hullámok

[15 pont]

Kettős fekete lyukak keringő komponensei gravitációs hullámokat generálnak. Tekintsünk két fekete lyukat a galaxisunkban, amelyek tömegei $M = 36 M_{\odot}$ és $m = 29 M_{\odot}$, és ω szögsebességgel körpályákon keringenek a tömegközéppontjuk körül.

(T03.1) Newtoni gravitációt feltételezve csak M , m és fizikai állandók felhasználásával vezess le a fekete lyukak pályáinak ω_{ini} szögsebességére vonatkozó kifejezést abban a t_{ini} időpontban, amikor a fekete lyukak közötti távolság 4,0-szerese volt a Schwarzschild-sugaraik összegének!

Számítsd ki ω_{ini} értékét (rad s^{-1} -ban)!

[5]

(T03.2) Az általános relativitáselméletben a keringő fekete lyukak gravitációs hullámokat bocsátanak ki f_{GW} frekvenciával, ahol $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. Ez a fekete lyukak pályájának zsugorodását okozza, ami viszont növeli f_{GW} -t. A f_{GW} változási sebessége

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

ahol $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ az úgynevezett „chirp tömeg”.

Határozd meg α , β és δ értékeit!

[4]

(T03.3) Tegyük fel, hogy az eseményhez kapcsolódó gravitációs hullámokat először a $t_{\text{ini}} = 0$ időpontban észlelték. [6]

Származtass kifejezést a fekete lyukak összeolvadásának t_{merge} észlelt idejére, amikor f_{GW} nagyon nagyra válik, csak ω_{ini} , M_{chirp} és fizikai állandók felhasználásával!
Számítsd ki a t_{merge} értékét (másodpercben)!

(T04) Balmer-csökkenés

Tekintsünk egy fősorozati csillagot, amelyet egy köd vesz körül. A csillag V-sávban észlelt magnitúdója 11,315 mag. A köd a csillaghoz közeli, ionizált régiója $H\alpha$ és $H\beta$ vonalakat bocsát ki; ezek hullámhossza rendre $0,6563 \mu\text{m}$ és $0,4861 \mu\text{m}$. A $H\alpha$ és $H\beta$ vonalak fluxusának elméleti megfontolások alapján várt aránya $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2,86$. Azonban miután a sugárzás áthalad köd hideg, poros külső részén, a következő emissziós fluxusokat észleljük rendre a $H\alpha$ és a $H\beta$ vonalra: $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ és $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

Az A_{λ} extinkció a hullámhossz függvénye, és a következőképpen fejezhető ki:

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Itt $\kappa(\lambda)$ az extinkciós görbe, és $E(B - V)$ a színexcesszust jelöli a B és V sávok között. Az extinkciós görbét (ahol λ μm -ben van megadva) a következő összefüggés adja meg.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2,659 \times \left(-1,857 + \frac{1,040}{\lambda}\right) + R_V, & 0,63 \leq \lambda \leq 2,20, \\ 2,659 \times \left(-2,156 + \frac{1,509}{\lambda} - \frac{0,198}{\lambda^2} + \frac{0,011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0,12 \leq \lambda < 0,63, \end{cases}$$

ahol $R_V = A_V / E(B - V) = 3,1$ a teljes extinkció és a színexcesszus aránya.

(T04.1) Határozd meg $\kappa(H\alpha)$ és $\kappa(H\beta)$ értékeit! [3]

(T04.2) Határozd meg a $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$ színexcesszusarányt. [4]

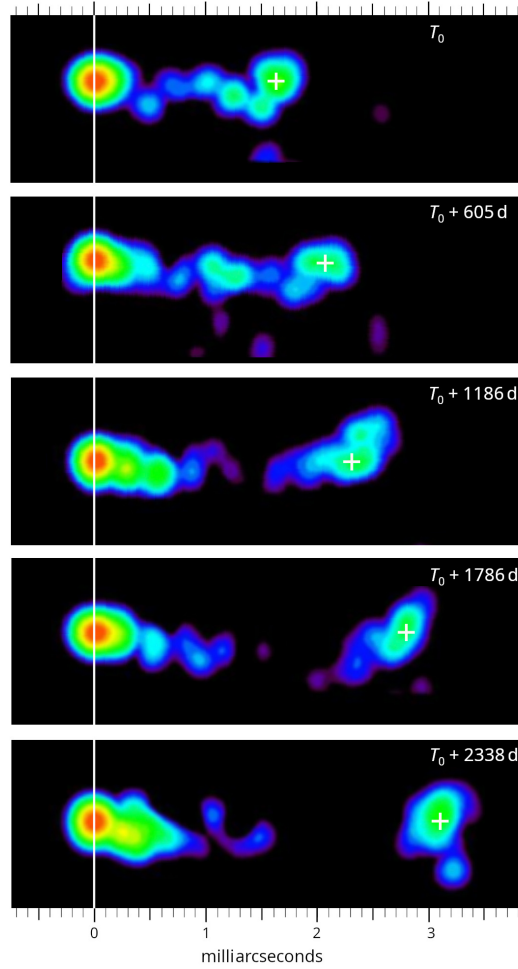
(T04.3) Adj becslést a köd miatti $A_{H\alpha}$ és $A_{H\beta}$ (azaz rendre a $H\alpha$ és $H\beta$ hullámhosszaknál mért) extinkcióra. [6]

(T04.4) Adj becslést a köd (A_V) extinkciójára, valamint arra, hogy a köd nélkül mekkora lenne a csillag m_{V0} látszó fényessége a V sávban. [2]

(T05) Kvazárok

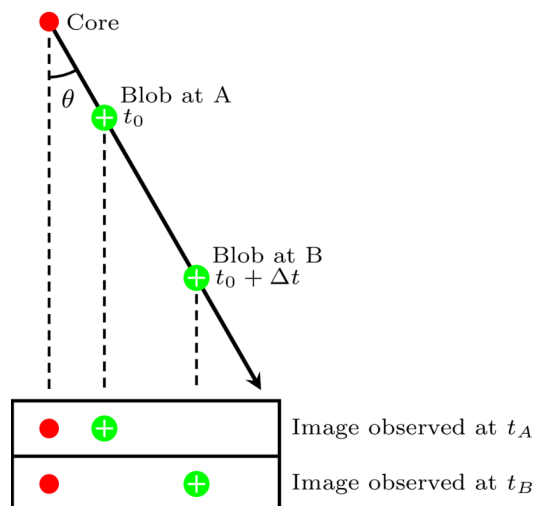
[20 pont]

A kvazárok rendkívül fényes aktív galaxisok, amelyeket szupernagy tömegű fekete lyukak hajtanak, és relativisztikus jeteket bocsátanak ki. Az ábra egy sorozatot mutat be egy kvazár (vöröseltolódása $z = 0.53$, luminozítás-távolsága $D_L = 1.00 \times 10^{10}$ fényév) rádióképeiről különböző időpontokban. A „mag” mindenkori helyzetét a függőleges fehér vonal jelzi (a képek ehhez vannak igazítva), míg a fehér + szimbólummal jelölt „csomót” tartalmazó jet folyamatosan távolodik tőle. A megfigyelési idő (az első képnél T_0 -al kezdve) és a szögskála az ábra tetején és alján van feltüntetve mindegyik panelen.



(T05.1) Határozd meg a csomó kvazár magjától mért ϕ_{blob} szögtávolságát (milliszekundumban) és a [5]
látóirányra merőleges l_{blob} távolságát (fényévben) mindegyik megfigyelés esetében! Számítsd ki a
csomó látóirányra merőleges v_{app} látszólagos sebességét a fénysebesség törtrészeként ($\beta_{\text{app}} =$
 v_{app}/c) az egymást követő mindegyik megfigyelésre! Ezután határozd meg a teljes észlelési
időtartamra vonatkozó $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ átlagos látszólagos sebességet!

A kvazár által kibocsátott jet ténylegesen $v \equiv \beta c$ relativisztikus sebességgel mozog, de nem feltétlenül az éggömb
érintősíkjában; általános esetben a mozgásának iránya θ szöget („látószög”) zár be a távoli megfigyelő
látóirányával (amelyet szaggatott vonalak jeleznek), ahogyan azt az alábbi vázlat mutatja.
Itt és az összes további résznél is hagyjuk figyelmen kívül a kvazár vöröseltolódását és bármilyen relativisztikus
hatást.



(T05.2) A csomó által két különböző időpontban – az A pozíciónak megfelelő t_0 -ban és a B pozíciónak megfelelő $t_0 + \Delta t$ -ben – kibocsátott fény t_A és t_B időpontokban éri el a megfigyelőt. Így az észlelt időkülönbség $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

(T05.2a) Határozd meg a $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ arány kifejezését β és θ függvényeként! [2]

(T05.2b) Ezt az arányt felhasználva fejezd ki β_{app} értékét β és θ függvényeként! [2]

(T05.3) A mozgást szuperluminálisnak nevezzük, ha a látszólagos sebesség meghaladja a fény sebességét ($\beta_{\text{app}} > 1$), és szubluminálisnak, ha nem ($\beta_{\text{app}} < 1$).

(T05.3a) A $\beta_{\text{app}} = 1$ esetre β és θ függvényében rajzold fel azt a sima görbét, amely elválasztja a szubluminális és szuperluminális mozgásokat! A szuperluminális régiót árnyékolj ferde vonalakkal (///) a grafikonon! [4]

(T05.3b) Határozd meg a $\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$ legalacsonyabb valódi jetsebességet, amelynél szuperluminális mozgás következik be, valamint az annak megfelelő θ_{low} látószöget. [2]

(T05.4) Adj meg kifejezést a θ_{max} maximális látószögére, amelynél egy adott β_{app} érték lehetséges lesz! [2]

A kvazár magja, a központi kompakt objektum által kibocsátott sugárzás intenzitása ok-okozatilag összefüggő régióban zajló belső folyamatok miatt ingadozik. Ennek a régiónak a méretét (= sugár) jellemzően a mag Schwarzschild-sugarával adják meg, annak ötszörösének meghatározva azt.

(T05.5) Egy bizonyos kvazár magjáról megállapították, hogy körülbelül 1 óra időskálán változik. Határozd meg a központi kompakt objektum tömegének $M_{c, \text{max}}$ felső határát naptömeg egységben kifejezve! [3]

(T06) A galaxis forgása

[20 pont]

Galaxisunk forgási görbét az alapállapotú (HI) hidrogénfelhők látóirányú sebességméréseiből határozzák meg különböző galaktikus hosszúságok mentén, a 21 cm-es HI-vonal észlelésével. Vegyünk egy l galaktikus hosszúságnál található HI-felhőt, amely a galaktikus középponttól (GC) R és a Naptól D távolságra van. Tekintsük a Nap távolságát a GC-től $R_0 = 8,5$ kpc-nek. Tegyük fel, hogy mind a Nap, mind a HI-felhő körpályán kering a GC körül a Galaxis síkjában, Ω_0 és Ω szögsebességgel, illetve V_0 és V forgási sebességgel.

A felhő Naptól észlelt radiális (V_r) és a látóirányra merőleges (V_t) sebességkomponensei a következőképpen fejezhetők ki:

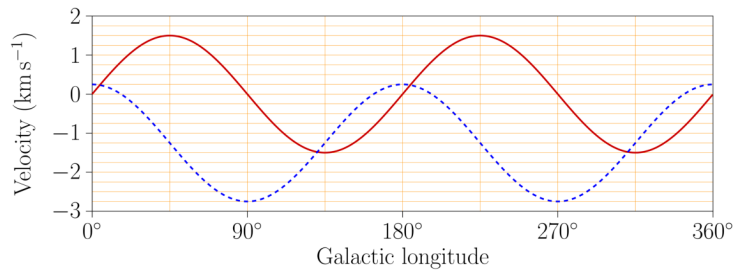
$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D.$$

Az északi galaktikus pólusról nézve a galaxis forgása az óramutató járásával megegyező irányban történik. A feladat során a látóirányú sebességet távolodáskor pozitívnak vesszük, és a felhőket pontszerű objektumként kezeljük.

(T06.1) Az Összesítő Válaszlapon található grafikonon vázold fel V_r -t D függvényében $D = 0$ és $D = 2R_0$ között, két, (i) $l = 45^\circ$ és (ii) $l = 135^\circ$ által meghatározott látóirányra! Jelöld mindegyik vonalat/görbét a hozzá tartozó l értékkel! [5]

(T06.2) Az alábbi grafikon a Naptól 100 pc távolságban lévő csillagok átlagos radiális (folytonos, piros görbe) és látóirányra merőleges (szaggatott, kék görbe) sebességkomponenseit a galaktikus hosszúság függvényében ábrázolja.



A grafikon segítségével adj becslést a Nap a GC körül való keringési periódusára (P) millió [3]
években (Myr)!

(T06.3) Jan Oort megállapította, hogy a Nap környezetében ($D \ll R_0$) a szögsebességek különbsége ($\Omega - \Omega_0$) kicsi lesz, és ezért a következő elsőrendű közelítést vezette le a radiális és a látóirányra merőleges sebességkomponensekre:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

ahol A és B az Oort-állandók.

Tekintsünk két esetet:

(I) a Galaxisunk ténylegesen megfigyelt forgási görbéje, és

(II) a forgási görbe egy olyan hipotetikus esetre, amelyben a galaxis nem tartalmaz sötét anyagot, és a galaxis teljes tömege a középpontjában koncentrálódik.

(T06.3a) Vezesd le a forgási sebesség $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ radiális irányú gradiensének képletét a két [2]
esetre!

(T06.3b) Fejezd ki az A és B értékeket V_0 , R_0 és a forgási sebesség radiális irányú gradiensének [8]
a Napnál vett $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ értéke függvényében!

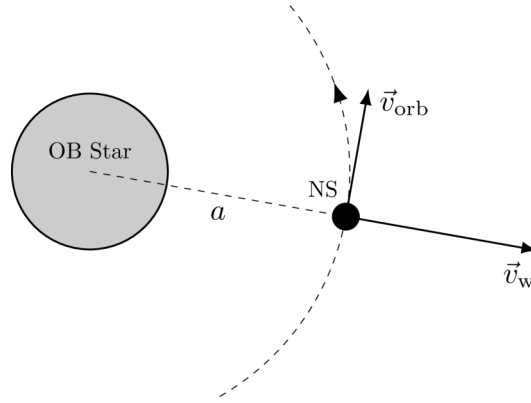
(T06.3c) Legyen az Oort-állandók A/B aránya a két, (I) és (II) esetben rendre F_I és F_{II} . [2]
Határozd meg F_I és F_{II} értékét!

(T07) Neutroncsillag kettős rendszerben

[20 pont]

Egy kompakt csillagot tartalmazó kettős rendszerben, amelyben a társ csillag nem tölti ki a Roche-térfogatát, a kompakt csillag fő akkréciós forrása a társ csillag csillagszele. A csillagszél által táplált akkréció különösen jelentős olyan rendszerekben, amelyekben egy korai színeképtípusú csillag (például O vagy B csillag, a továbbiakban OB csillag) társul szoros pályán egy kompakt objektummal, például egy neutroncsillaggal (NS).

Tekintsünk egy ilyen NS-OB kettős rendszert, ahol a neutroncsillag tömege $M_{NS} = 2,0 M_{\odot}$, sugara $R_{NS} = 11$ km, és körpályán kering az OB csillag középpontja körül a sugárral és $v_{orb} = 1,5 \times 10^5$ m s⁻¹ sebességgel (lásd az alábbi ábrát). A probléma során feltételezzük, hogy az OB csillag tömegvesztése gömbszimmetrikus, és annak mértéke $\dot{M}_{OB} = 1,0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.



- (T07.1) Az R_{acc} akkréciós sugár az a maximális távolság a neutroncsillagtól, amelynél az még képes befogni a csillagszelet. Legyen a csillagszél sebessége a neutroncsillag pályasugaránál $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$. A szokásos szökéssebesség-számítással határozd meg R_{acc} értékét a fenti rendszerre km-ben! [3]
- (T07.2) Feltételezve, hogy az összes, csillagszélből befogott anyag akkrécióval a neutroncsillagra kerül, adj becslést a $\dot{M}_{\text{acc}}$ tömegbefogási ütemre $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ egységben, ha $a = 0,5 \text{ CSE}$! A sugárnyomás és az akkretáló gáz véges hűlési idejének hatásait hanyagoljuk el. [3]
- (T07.3) Tekintsük azt a helyzetet, amikor a csillagszél sebessége az a pályasugárnál (közel a neutroncsillaghoz) összemérhetővé válik a neutroncsillag pálya menti sebességével. A csillagszélből a neutroncsillag általi tömegbefogás mértékét ebben az esetben egy $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} f(\tan \beta, q)$ alakú kifejezés adná meg, ahol $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$ a kettős rendszer tömegaránya, β pedig a neutroncsillaghoz rögzített rendszerben a csillagszél sebességének iránya és az OB csillaggal ellentétesen mutató radiális irány által bezárt szög. Határozd meg az $f(\tan \beta, q)$ kifejezést, feltételezve, hogy $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$! [6]
- (T07.4) Tegyük fel, hogy a teljesen ionizált anyag sugárirányban akkretálódik, de a neutroncsillag $\vec{B}$ indukciójú erős mágneses tere akadályozza ezt. A hatást mágneses nyomásként lehet modellezni, amelyet a következő összefüggés ad meg: $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Feltételezzük, hogy a neutroncsillagnak dipóltere van, amelynek erőssége az egyenlítői síkban a neutroncsillagtól mért r távolsággal

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

módon változik, ahol $r \gg R_{\text{NS}}$, B_0 pedig a mágneses tér erőssége a neutroncsillag egyenlítőjénél. Feltételezzük, hogy a mágneses dipólter tengelye egybeesik a neutroncsillag forgástengelyével.

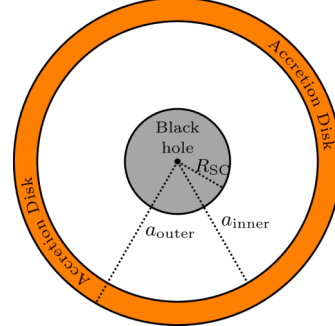
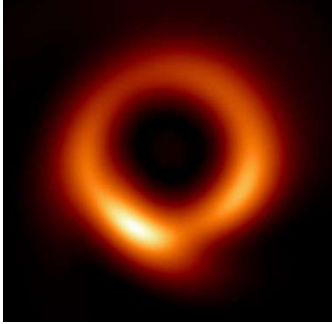
- (T07.4a) Határozd meg a $P_{\text{eq, mag}}$ mágneses nyomást az egyenlítői síkban B_0 , R_{NS} , r és egyéb [1]
megfelelő állandók függvényében!
- (T07.4b) Az a maximális távolság, ahol az akkréciós áramlást a mágneses tér az egyenlítő [7]
síkjaiban megállítja, az R_m magnetoszférus sugár. Ez az anyagáramlás nyomást fejt ki a bejövő csillagszél és a neutroncsillag közötti relatív mozgás miatt. Határozd meg a kritikus mágneses térerősség azon $B_{0, c}$ közelítő kifejezését, amelynél R_m megegyezik R_{acc} -kal, és számítsd ki annak értékét tesla egységben! A mágneses hatásokat elhanyagoljuk, ha $r > R_m$, és feltételezzük, hogy $v_w \gg v_{\text{orb}}$.

(T08) Egy fekete lyuk árnyéka

[20 pont]

Az Event Horizon Telescope (EHT) közzétett egy képet az M87 galaxis közepén található szupernagy tömegű fekete lyukról, ahogy az az alábbi ábra bal paneljén látható.

A kép néhány egyszerű jellegzetességének megértéséhez egy egyszerűsített modellt fogunk vizsgálni egy nem forgó, statikus, gömbszimmetrikus fekete lyukat véve, amelynek tömege $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$, és amelyet egy elhanyagolható tömegű, vékony, sík akkréciós korong vesz körül, amelynek belső és külső sugara $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ és $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, ahol R_{SC} a Schwarzschild-sugár. Egy felülnézeti vázlat látható az alábbi ábra jobb paneljén (az ábra nem méretarányos).



Feltételezzük, hogy az akkréciós korong az egyetlen fényforrás, amit figyelembe veszünk. A korong minden pontja minden irányba bocsát ki fényt. A fény terjedésére hatással van a fekete lyuk gravitációs tere. A fénysugarak útját az alábbi két egyenlet határozza meg (amelyek hasonlóak a Nap körüli objektumokéhoz):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

ahol $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ a radiális koordináta, $\phi \in [0, 2\pi)$ az azimutális szög, és E és L a energiamegmaradáshoz és az impulzusmomentum-megmaradáshoz kapcsolódó állandók.

Itt $v_r \equiv dr/dt$ a radiális sebesség nagysága, v_ϕ a tangenciális sebesség nagysága, és $\omega \equiv d\phi/dt$ a szögsebesség. A b impakt paramétert egy adott pályára a következőképpen definiáljuk: $b = L/\sqrt{2E}$. Az idődilatációt ebben a feladatban elhanyagoljuk.

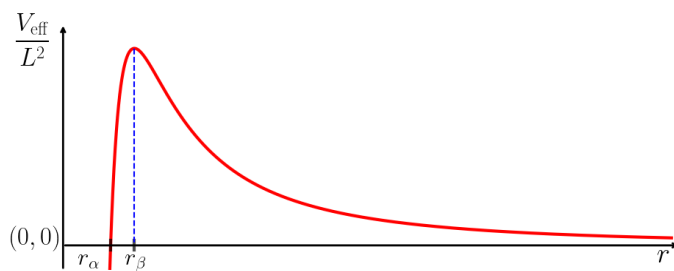
Egy másik hasznos egyenletet az első egyenlet deriválásával kapunk:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

(T08.1) A fény képes körpályán haladni a fekete lyuk körül. Határozd meg az ilyen r_{ph} fotonpályák [4]
sugarát, és a b_{ph} impakt paramétert, M és a releváns állandók függvényében!

(T08.2) Számítsd ki azt a T_{ph} időt, másodpercekben, amennyi idő alatt a fény megtesz egy teljes körpályát! [2]

(T08.3) A radiális sebességre fent megadott egyenlet (az első egyenlet ebben a kérdésben) összehasonlítható egy olyan alakú egyenlettel, mint $\frac{v^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ a fény pályáinak esetén. Alább egy vázlatos ábrán látható V_{eff}/L^2 r függvényében.



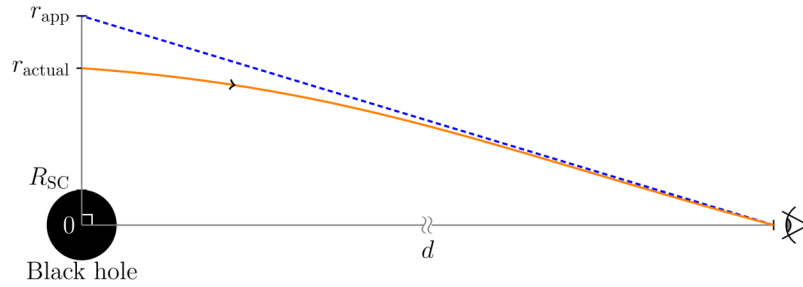
(T08.3a) A diagram jelöl két speciális sugarat, r_α és r_β . Fejezd ki r_α -t és r_β -t M és a releváns [2]
állandók függvényében!

(T08.3b)

[3]

Egy foton, amely befelé halad az akkréciós korongból a fekete lyuk felé, még mindig képes elszökni a végtelenbe bizonyos esetekben. Add meg a legkisebb visszafordulási ponthoz tartozó r_t sugár kifejezését egy ilyen foton esetében, M és releváns állandók függvényében! Határozd meg az impakt paraméter $b_{\min}$ legkisebb értékének kifejezését erre a fotonra.

- (T08.4) Egy, a látóirányra merőleges síkból, a rendszer középpontjától vett r_{actual} valódi sugártól érkező fénysugár erős elhajlást szenved a fekete lyuk gravitációja miatt, és végül eléri a rendszertől nagy távolságra d található megfigyelőt (szemmel jelölve), ahogy az alábbi ábrán látható.

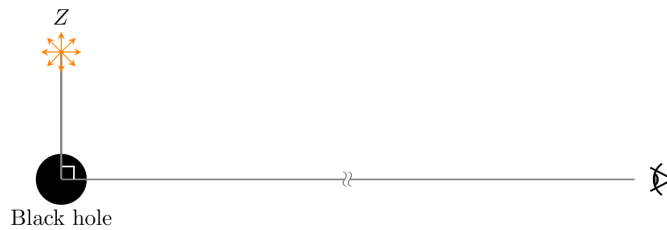


A megfigyelő számára úgy tűnik, mintha a fénysugár egy másik pontból származna, a látóirányra merőleges síkból, a fekete lyuk középpontjától $r_{\text{app}} \approx b$ távolságra, ahol b az adott foton pályájának impakt paramétere. Az akkréciós korong pontjaira $r = r_{\text{actual}}$ sugárnál feltételezhető a következő összefüggés:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

- A távoli megfigyelő számára, mint mi, lapjáról látott akkréciós korong esetén, a rendszer képe körszimmetrikusnak tűnik a látóirányra merőleges síkban. Határozd meg a kép legkülső látszó sugarát, r_{outer} , és a legbelső látszó sugarát, r_{inner} , csillagászati egységekben. [5]

- (T08.5) Vegyünk egy elszigetelt szupernagy tömegű fekete lyukat, amelynek tömege $M = 6,5 \times 10^9 M_{\odot}$, és nincs akkréciós korongja. Egy rövid, 5 másodpercig tartó, erős elektromágneses energiakitörés történik egy Z pontban, amely, mondjuk $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ távolságra van a fekete lyuktól, ahogy az ábra is mutatja. A Z pontban lévő kitörés minden irányba bocsát ki fényt. Egy a fekete lyuktól távoli megfigyelő (az alábbi ábrán szemmel jelölve), 60 másodperces hosszú expozíciós képet készít a fekete lyuk körüli területről.



Válaszd ki a helyes lehetőséget az alábbi állításokhoz:

- (T08.5a) A lehetséges utak száma, amelyeken a fény Z-ből az észlelőhöz juthat [2]
(A) Legfeljebb egy (B) Pontosan egy (C) Pontosan kettő (D) Több mint kettő.
- (T08.5b) A Z pontbeli EM kitörés képeinek száma, mely(ek) a hosszú expozíciós képen láthatóak lesznek [2]
(A) Legfeljebb egy (B) Pontosan egy (C) Pontosan kettő (D) Több mint kettő.

(T09) A légkör hatása – seeing
[35 pont]

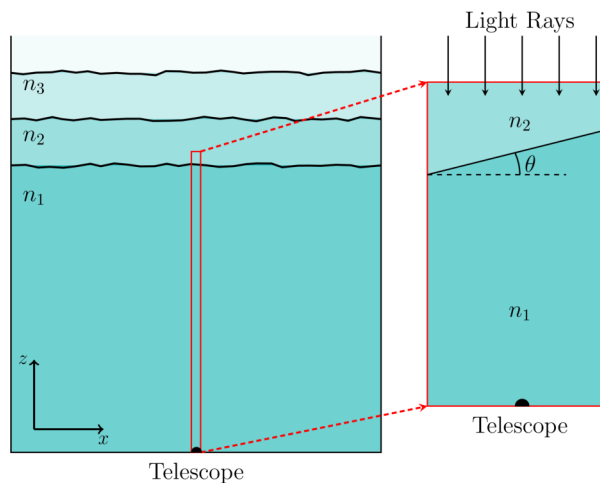
Egy távcső, amelynek akromatikus konvex objektívlencséje $D = 15$ cm átmérőjű és $f = 200$ cm fókusz távolságú, a zenitben látszó csillagra irányul.

- (T09.1) Határozd meg annak a képnek a d_{image} átmérőjét (m-ben), amelyet az objektív egy pontszerű fényforrásról a fókusz síkjában hoz létre zöld fény ($\lambda = 550$ nm) esetén, csak a diffrakció hatásait figyelembe véve! **[1]**

Egy csillagászati forrás képét az úgynevezett „seeing” is befolyásolja.

A légkör rétegei közötti határok, valamint a rétegek törésmutatói folyamatosan változnak a turbulencia, a hőmérséklet-változás és egyéb tényezők miatt. Ez apró változásokat eredményez a teleszkóp fókusz síkjában keletkező kép pozíciójában, amit „pislákolásnak” nevezünk. A probléma további részében a csillag képének diffrakció által korlátozott véges méretén kívül (ahogyan korábban használtuk), nem veszünk figyelembe interferenciahatásokat.

Az alábbi ábra bal oldali panelje a légkör függőleges keresztmetszetét mutatja, különböző törésmutatójú rétegekkel ($n_1, n_2, n_3, \dots$). A jobb oldali panel a légkör vékony függőleges szegmensének kinagyított nézetét és a két legalsó, n_1 és n_2 ($n_1 > n_2$) törésmutatójú légköri réteg közötti határt mutatja. Ebben a problémában csak ezt a két réteget és azok határát vesszük figyelembe. Az ábrák nem méretarányosak.

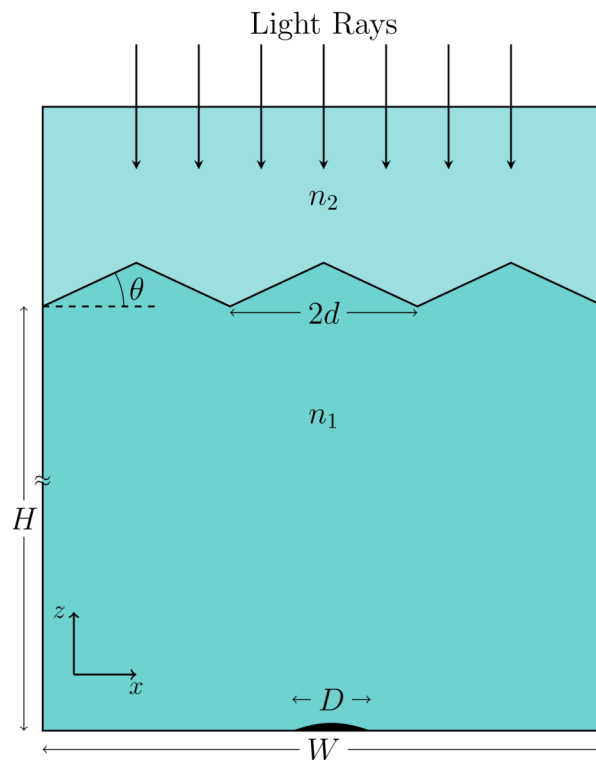


- (T09.2) Tegyük fel, hogy a két réteg közötti határ $H = 1$ km magasságban van közvetlenül a távcső objektívje felett, 30° -os dőléssel a vízszintes síkhoz képest. A probléma minden részében θ -t az óramutató járásával ellentétes irányban tekintünk pozitívnak. Egy monokromatikus fényforrásra $n_1 = 1.00027$ és $n_2 = 1.00026$. Legyen a kép szögeltolódása a távcső fókusz síkjában egy zenitben lévő csillagra α .
- (T09.2a) Rajzold fel a megfelelően feliratozott sugármenetet a határon, amelyen látható n_1, n_2, θ és α ! **[2]**
- (T09.2b) Határozd meg α kifejezését θ, n_1 és n_2 függvényében! Használd a kis szögekre $\sin \alpha \approx \alpha$ és $\cos \alpha \approx 1$ közelítéseket! **[2]**
- (T09.2c) Számítsd ki a kép pozíciójának Δx_θ eltolódást m-ben, ha θ 1%-kal növekszik (miközben n_1 és n_2 rögzített)! **[3]**
- (T09.2d) Számítsd ki a kép pozíciójának Δx_n eltolódását m-ben, ha n_2 0.0001%-kal növekszik (miközben n_1 és θ rögzített)! **[3]**
- (T09.3) Egy csillag zenitből érkező fehér fényére vonatkozóan válaszld ki, hogy az alábbiak közül melyik írja le legjobban a kép alakját és színét úgy, hogy a (✓) szimbólumot (csak egyet) elhelyezed a megfelelő mezőbe az Összefoglaló Válaszlap! Vedd figyelembe, hogy x balról jobbra növekszik az ábrán. **[2]**

	Kép színe	Kép alakja	Bal szél	Jobb szél
A	Fehér	Kör alakú		
B	Fehér	Elliptikus		
C	Színes	Kör alakú	Kék	Piros
D	Színes	Kör alakú	Piros	Kék
E	Színes	Elliptikus	Kék	Piros
F	Színes	Elliptikus	Piros	Kék

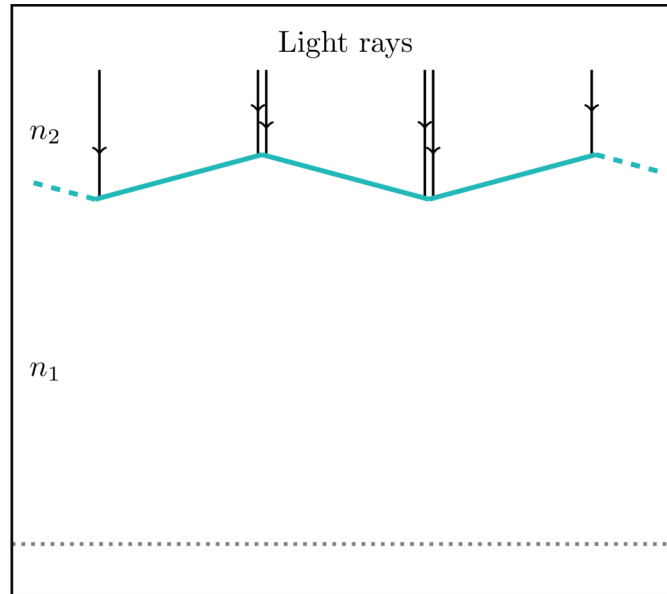
A kérdés teljes hátralévő részében tekintsünk monokromatikus zöld fényt $\lambda = 550$ nm hullámhosszal. A rétegek közötti határt fűrészfogas elrendezésű (a lap síkjára merőleges) síkok végtelen halmazaként modellezzük, amelyek az x tengely mentén $d = 10$ cm-rel vannak elválasztva, $\theta = 10^\circ$ vagy $\theta = -10^\circ$ szög mellett.

Az alábbi (nem méretarányos) ábra a léggör ezen modelljének keresztmetszetét mutatja, amelynek szélessége W ($W \ll H$). Nagy apertúrájú teleszkópok esetén a határ ezen fűrészfogas jellege a fókusz síkban foltok kialakulását eredményezi.



(T09.4) Tekintsünk egy fentiek szerint modellezett léggört.

(T09.4a) A léggör egy szakasza a korábban megadott paraméterekkel jellemzett egymást követő fűrészfog-síkokkal az alábbi (nem méretarányos) diagramon látható.



A diagramnak a Válaszlap összefoglalójában szerepelő példányán rajzold meg a beeső fénysugarak útját addig a síkig, ahol a teleszkóp objektívje található, amelyet a szürke szaggatott vonal jelöl!

Jelöld meg „X”-szel azokat a területeket az ábrán, ha vannak ilyenek, ahova nem érnek el fénysugarak! [4]

(T09.4b) Számítsd ki az ilyen terület(ek) W_X szélességét! [3]

(T09.4c) Add meg a teleszkópjobjektív $D_{\max}$ legnagyobb átmérőjét, amellyel egyetlen képet tudunk előállítani a csillagról a teleszkóp helyének a határ szerkezetét figyelembe vevő megfelelő megválasztásával! [4]

(T09.5) Tekintsük azt az esetet, amikor a határvonal fűrészfog mintázata az x és az y irányokban is megengedett (mint egy piramismező), és $D = 100$ cm, illetve $f = 200$ cm. [6]

Rajzold meg a keletkező foltok kvalitatív mintázatát az Összefoglaló Válaszlapon megadott keretben!

(T09.6) Turbulens légkör esetén ismét tekintsük a határréteg ugyanúgy párhuzamosan futó fűrészfog mintázatát, de csak az x irányban, és most a két sík közötti szög egyenletes ütemben változzon 10° -ról -10° -ra 1,0 s alatt. Tegyük fel, hogy ez a kép pozíciójának egyenletes ütemben történő eltolódását eredményezi. [5]

Tekintsünk egy teleszkópot, amelyre $D = 8$ cm és $f = 1$ m. Adj becslést a $t_{\max}$ lehetséges leghosszabb expozíciós időre, amely esetén a távcsőre szerelt CCD-kamerával csak egyetlen képet kapunk, és bármilyen lehetséges eltérés annak pozíciójában 1% alatt marad a kép diffrakció által korlátozott átmérőjéhez képest!

(T10) Big Bang nukleoszintézis

[35 pont]

A korai Univerzum sugárzás dominálta korszakában az Univerzum skálafaktora $a \propto t^{1/2}$, ahol t az Ősrobbanás óta eltelt idő. E korszak nagy részében a neutronok (n) és protonok (p) gyenge kölcsönhatások révén hőmérséketi egyensúlyban maradnak egymással. A szabad neutronok vagy protonok számsűrűsége (N) a T hőmérséklettel és a megfelelő m tömegükkel van összefüggésben, az alábbi módon:

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

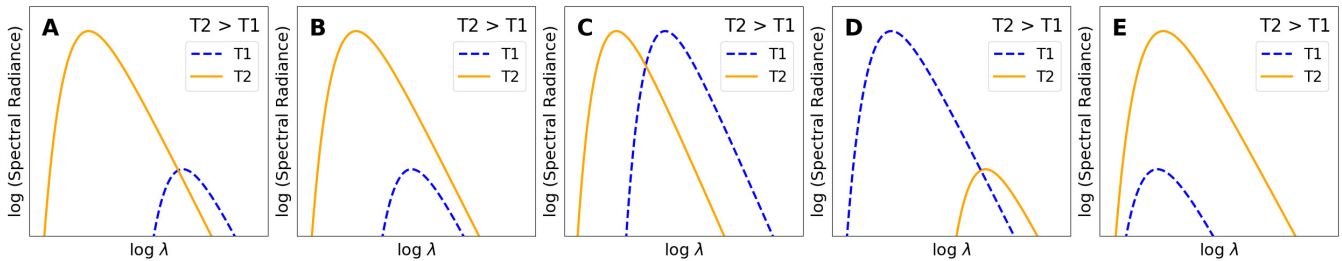
ameddig $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70$ s és $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. t_{wk} után a gyenge kölcsönhatások már nem tudják fenntartani ezt az egyensúlyt, és a szabad neutronok protonokká bomlanak 610,4 s felezési idővel.

(T10.1) Legyen a protonok számsűrűsége N_p , a neutronoké pedig N_n . Számítsd ki a neutronok relatív elemgyakoriságát, amelyet a következő arány ad meg a t_{wk} időpontban: $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ [4]

(T10.2) A fotonok megtartják a hőmérsékleti egyensúlyt és minden korszakban megőrzik a feketetest-spektrumot.

(T10.2a) Határozd meg a β indexet úgy, hogy $T(a) \propto a^\beta$ legyen! [2]

(T10.2b) Azonosítsd, hogy az alábbi grafikonok közül melyik ábrázolja a spektrális energiasűrűség helyes viselkedését két hőmérséklet, T_1 és T_2 esetén! Jelöld (✓) a helyes opciót az Összesítő Válaszlap! [2]



(T10.3) t_{wk} után a deutérium protonokból és neutronokból való képződésének folyamata a Saha-egyenletet követi, amelyet az indiai fizikus, Prof. Meghnad Saha határozott meg, és amely egyszerűsíthető a következőképpen:

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

Itt az η barion-foton arány $6,1 \times 10^{-10}$, és N_D a deutérium számsűrűsége.

(T10.3a) Ábrázold az N_D/N_n arányt az Összesítő Válaszlap, legalább 4 észszerűen felosztott hőmérsékleti értékre, amelyek a $k_B T = [60, 70]$ keV tartományba esnek, és rajzolj egy sima görbét, amely áthalad ezeken a pontokon. [5]

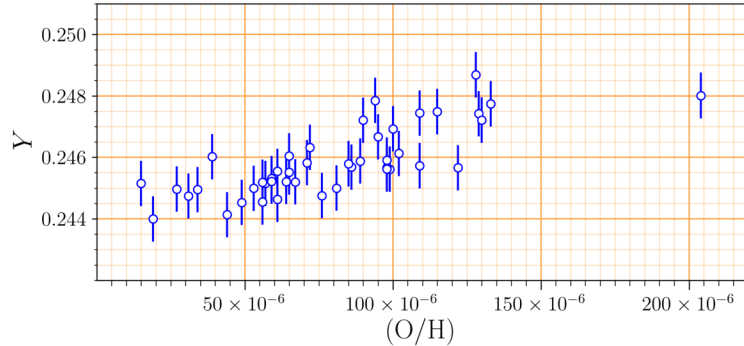
(T10.3b) Az ábra alapján határozd meg $k_B T_{\text{nuc}}$ -t (keV-ben), amikor $N_D = N_n$. [1]

(T10.3c) Ehelyett most feltételezzük, hogy az összes szabad neutron azonnal egyesül a protonokkal $k_B T_{\text{nuc}}$ hőmérsékleten, hogy deutériumot képezzen, és mindez azonnal héliummá (${}^4_2\text{He}$) alakul. Számítsd ki a hélium nukleoszintézissel történő keletkezésének megfelelő t_{nuc} korszakot vagy időt (másodpercben). [4]

(T10.4) Számítsd ki $X_{n, \text{nuc}}$ értékét közvetlenül t_{nuc} előtt! [5]

(T10.5) A hélium ősi elemgyakorisága, Y_{prim} , a világegyetem teljes barionikus tömegének azon hányadát jelenti, amely héliumot alkot közvetlenül t_{nuc} után. Adj egy elméleti becslést a Y_{prim} értékére. E számítás céljából feltételezd, hogy $m_p \approx m_n$ és hogy a hélium tömege, $m_{\text{He}} \approx 4m_n$. [3]

- (T10.6) A hélium ősi elemgyakorisága nagyon nehezen mérhető, mivel a csillagok folyamatosan alakítják át a hidrogént héliummá az Univerzumban. Egy galaxis csillagai által végzett átalakítás mértékét az oxigén (amelyet csak a csillagok termelnek) relatív elemgyakorisága adja meg a hidrogénhez viszonyítva, melyet (O/H) jelöl az adott galaxisra vonatkozóan. Az (O/H) , valamint a hélium Y elemgyakorisága, különböző galaxisokban végzett méréseinek összegzése az alábbi grafikonon van ábrázolva.



Használd az összes pontot ezen a grafikonon (amely az Összesítő Válaszlapon is szerepel), hogy válaszolj a következőkre!

- (T10.6a) Adj becslést Y értékére egy kék kompakt törpegalaxis esetében, melyre $(O/H)=1,75 \times 10^{-4}$! [2]
- (T10.6b) Határozd meg a fenti adatpontokra illesztett egyenes meredekségét, $dY/d(O/H)$ -t! [2]
- (T10.6c) Becsüld meg a hélium kezdeti elemgyakoriságát, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, a fenti megfigyelések alapján. [2]
- (T10.7) A Y_{prim} és a $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ közötti eltérés feloldható az η barion-foton arány megváltoztatásával. Amikor η csökken, ahogy azt a $\downarrow$ jelzi az Összesítő Válaszlapon, jelezd a növekedést ($\uparrow$) vagy csökkenést ($\downarrow$) az $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (amikor $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$, és Y_{prim} paraméterek esetében az Összesítő Válaszlapon található mezőkben. [3]

(T11) Csillagok grafikonokon keresztül

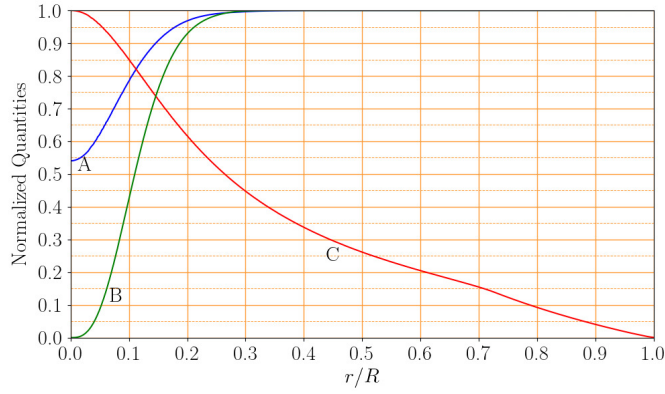
[50 pont]

A csillagok jól közelíthetők gömbszimmetrikus objektumokként, ezért a belső felépítésük modellezésénél a középponttól mért r radiális távolságot választhatjuk egyetlen független változóként. Az adott r sugáron belüli tömeget $m(r)$ jelöli. Az $l(r)$ luminozitást az r sugarú gömbfelületen egységnyi idő alatt kiáramló nettó energia definiálja. A további releváns mennyiségek, úgy mint a $\rho(r)$ sűrűség, a $T(r)$ hőmérséklet, a hidrogén $X(r)$ tömegaránya, a hélium $Y(r)$ tömegaránya és az egységnyi tömeg által, egységnyi idő alatt termelt $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$ nukleáris energia, r függvényeinek tekinthetők. A feladat során elhanyagoljuk a diffúziós folyamatok, valamint az elemek gravitációs ülepedésének hatását a csillag belsejében.

A "log" szimbólum a 10-es alapú logaritmusra utal. A feladat három független részből áll.

(T11.1) 1. rész: Egy csillag belseje

Az alábbi grafikon három mennyiség, A, B és C változását mutatja a r/R relatív sugár függvényében egy $1 M_{\odot}$ tömegű és 4 milliárd év korú csillagmodellben, ahol R a csillag fotoszférájához tartozó sugár. A (fotoszférának megfelelő) felszínen a hélium Y_s tömegarányának, valamint a Z_s fémességnének (ami a héliumnál nehezebb elemek tömegaránya) értéke ezen csillag esetében rendre: $(Y_s, Z_s) = (0,28, 0,02)$. A grafikonokon bemutatott összes mennyiség a maximumára normált.



(T11.1a) Azonosítsd a különböző A, B és C mennyiségeket a következő öt lehetőség közül: [6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Írd az A/B/C betűket a hozzájuk tartozó mennyiség melletti mezőbe az Összefoglaló Válaszlapon. Nem kell indokolnod a válaszod.)

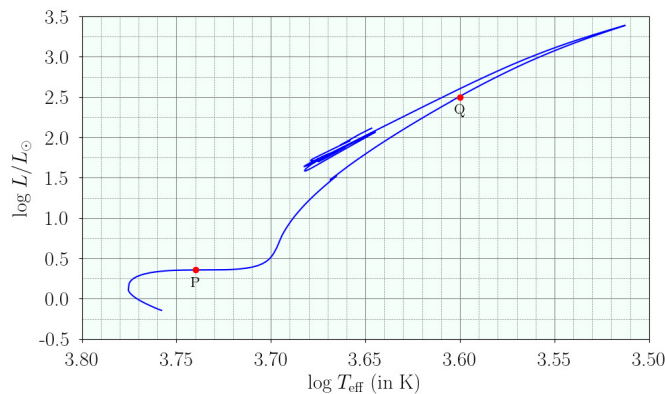
(T11.1b) Mi a hélium Y_c tömegaránya a csillag közepén? [3]

(T11.1c) Vázold fel a (T11.1a) pontban megadott ötös listából kimaradó két mennyiséget (azaz amiket nem azonosítottál A, B vagy C egyikeként) az Összefoglaló Válaszlap ugyanazon grafikonjára r/R függvényeként, és jelöld őket a hozzájuk tartozó mennyiségekkel! [5]

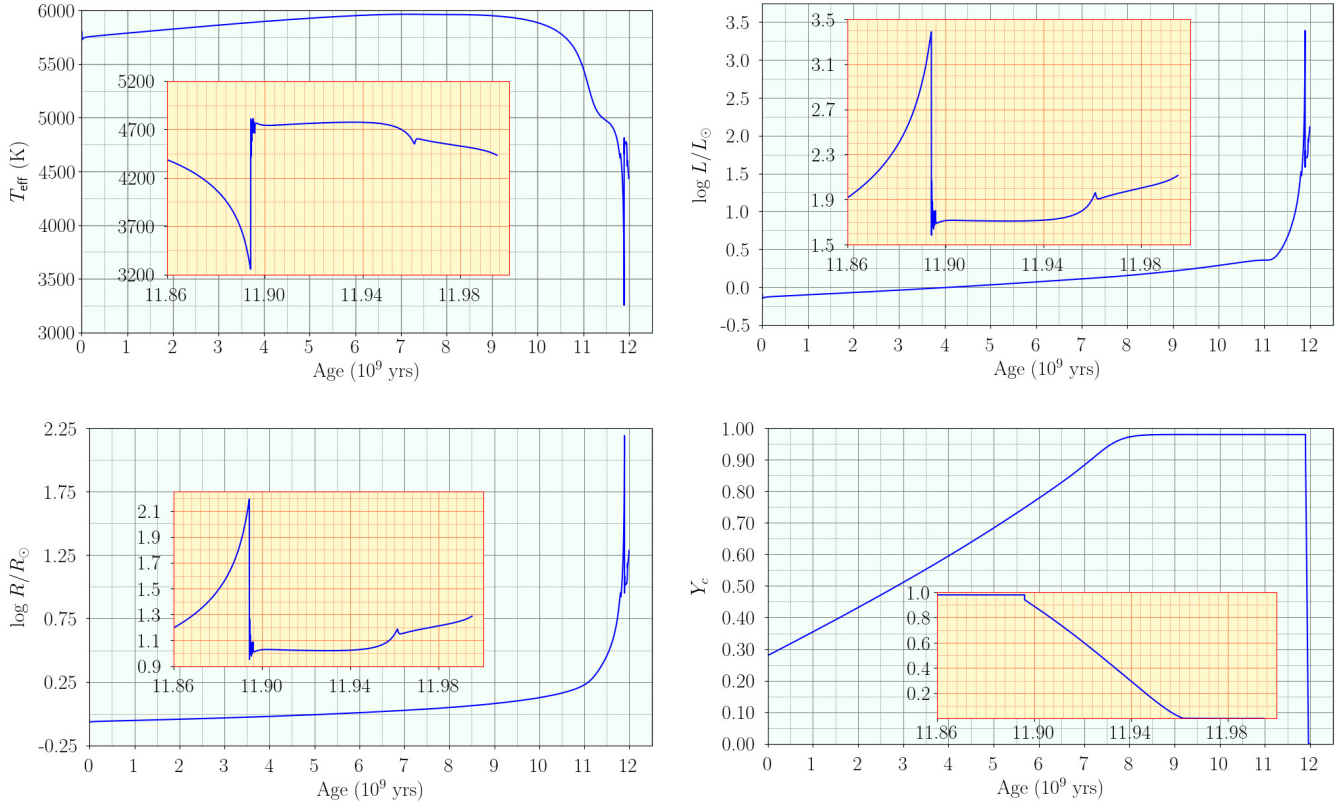
(T11.2) 2. rész: Csillagfejlődés

Tekintsük egy $1M_{\odot}$ tömegű csillag fejlődését, amelynek kezdeti, homogén összetételét a következő paraméterek írják le: a hélium tömegaránya $Y_0 = 0,28$, a fémek tömegaránya pedig $Z_0 = 0,02$. Az alábbi ábrák ezen csillag különböző globális mennyiségeinek változását mutatják, amint az a ZAMS-ról (Zero Age Main Sequence, nulla korú fősorozat) a magjában történő héliumégetés befejeztéig fejlődik.

Az alábbi grafikon a csillag a HRD-n való fejlődését mutatja ($\log L/L_{\odot}$ vs. $\log T_{\text{eff}}$, ahol L a felszíni luminozitás és T_{eff} az effektív hőmérséklet).



Az alábbi ábrán négy grafikont láthatsz, amelyek a következő mennyiségek változását mutatják a csillag (10^9 évben megadott) életkorának függvényében: T_{eff} (K-ben), L (mint $\log L/L_{\odot}$), R (mint $\log R/R_{\odot}$) és Y_c . A jobb láthatóság érdekében mindegyik grafikonon betétpanelek mutatják az adott mennyiségek változását $11,86 \times 10^9$ évtől $12,00 \times 10^9$ évig.



Használd ezeket a grafikonokat az alábbi kérdések megválaszolásához.

- (T11.2a) Mi a csillag hozzávetőleges t_{MS} fősorozati élettartama (években)? [1]
- (T11.2b) Mennyi a hélium a csillag magjában való égetésének hozzávetőleges időtartama, Δt_{He} (években)? [1]
- (T11.2c) A csillag közepén az eredeti hidrogénmennyiség mekkora f_{H} hányada került elégetésre addig, amikor a csillag fényessége $1 L_{\odot}$? [3]
- (T11.2d) Mekkora a csillag R_1 sugara ($R_{\odot}$ egységekben) akkor, ameddig a közepén lévő eredeti hidrogénmennyiség 60%-a elégett? [3]
- (T11.2e) Mekkora a csillag R_P és R_Q sugara ($R_{\odot}$ egységekben) a HRD-n P-vel és Q-val jelölt pontokban? [4]

(T11.3) **3. rész: Egy csillag tömegeloszlása**

A csillag belsejében való tömegeloszlást a következő egyenlet írja le:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r).$$

Ezt célszerű három dimenzióatlan változóval felírni: a q relatív tömeggel, az x relatív sugárral és a σ relatív sűrűséggel, amelyeket a következőképpen definiálunk:

$$q = m/M, \quad x = r/R, \quad \sigma = \rho/\bar{\rho},$$

ahol M és R a csillag teljes tömege és sugara, illetve $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ a csillag átlagos sűrűsége. Az ebben a részben vizsgált csillagra vonatkozóan a következő információk állnak rendelkezésre:

- A központi sűrűség $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$.
- A csillag tömegének fele a teljes sugara belső 25%-án, tömegének 70%-a pedig a sugár belső 35%-án belül található.

A feladat minden további részében elegendő az összes származtatott numerikus együtthatót 0,005-es pontosságra kerekíteni.

- (T11.3a) Fejezd ki a fenti, a tömeg sugárfüggését leíró egyenletet x , $\frac{dq(x)}{dx}$ és $\sigma(x)$ függvényében. [2]

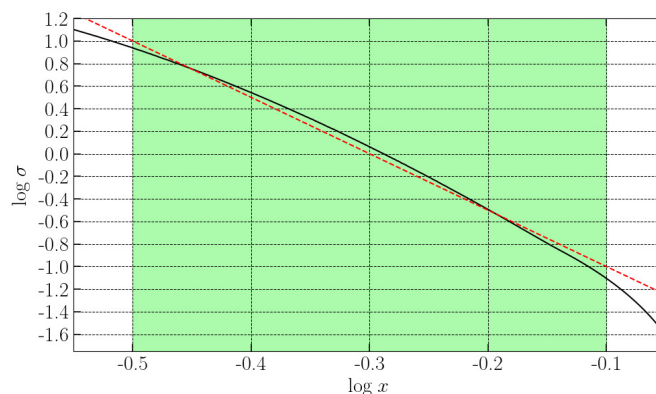
A tömeg sugár szerinti eloszlásának meghatározásához ismernünk kell a csillag belsejében lévő sűrűségprofil. A feladat során a sűrűség sugárfüggését x alábbi két tartományban közelítő alakban kezeljük:

- a csillag belső része: $0 \leq x \leq 0,32$,
- a csillag középső része: $0,32 < x < 0,80$.

A legkülső részre ($0,80 \leq x \leq 1,00$) nem alkalmazunk közelítést.

- (T11.3b) **Közelítés a középső részre:**

Az alábbi grafikonon a fekete görbe $\log \sigma$ változását mutatja $\log x$ függvényeként a csillag középső részében. Lineáris közelítést alkalmazunk (ld. szaggatott piros vonal) $\log \sigma$ és $\log x$ között a $-0,5 < \log x < -0,1$, azaz $0,32 \lesssim x \lesssim 0,80$ tartományon (ld. zöld színezésű terület). Továbbá közelítsük a vonal meredekségét a legközelebbi egész számmal.



Ezt a közelítést használva írd összefüggést $\sigma(x)$ -ra x függvényeként a $0,32 < x < 0,80$ tartományban! [4]

- (T11.3c) A (T11.3b) eredményéből fejezd ki $q(x)$ -et a $0,32 < x < 0,80$ tartományban! [6]

- (T11.3d) **Közelítés a belső részre:**

A csillag belső ($0 \leq x \leq 0,32$) részében a sűrűség közelíthető a sugár lineáris függvényeként, azaz mint $\sigma(x) = Ax + B$, ahol A, B állandók. Határozd meg A és B értékét, és ezzel fejezd ki a $q(x)$ függvényt a $0 \leq x \leq 0,32$ tartományban! Vedd figyelembe, hogy az előző részben és ebben a részben alkalmazott közelítések kis diszkontinuitásokat okozhatnak a sűrűségben vagy a tömegben $x = 0,32$ esetén. [8]

(T11.3e)

[4]

A (T11.3c) és (T11.3d) részekben kapott kifejezések $q(x)$ olyan közelítései, amelyek jól leírják a tömeg sugárfüggését, de csak a csillag adott részeiben. A $0,80 \leq x \leq 1$ tartományra, amelyre nem vezettünk le kifejezést, extrapolálhatunk a szomszédos régióból. Ezen közelítő kifejezések és a megadott adatok használatával vázolj egy sima görbét (anélkül, hogy diszkontinuitások lennének $q(x)$ -ben vagy annak deriváltjában) $q(x)$ és x között az egész csillagra ($0 \leq x \leq 1$) vonatkozóan, amely a tömeg sugárfüggését mutatja.

(T12) Hawking-sugárzás fekete lyukakból

[50 pont]

(T12.1) Egy fekete lyuk (BH) tipikusan egy nagytömegű csillag életciklusának végén, annak egyetlen ponttá történő gravitációs összeomlásával alakul ki, amelyet szingularitásnak nevezünk. Egy ilyen objektum extrém gravitációja miatt semmi sem képes elhagyni az úgynevezett eseményhorizontot (egy $r = R_{\text{SC}}$ sugarú gömbfelület, ahol r a szingularitástól mért távolság), miután belépett oda. Itt R_{SC} a Schwarzschild-sugár.

(T12.1a) **A Hawking-sugárzás eredetének modellezése:** Vegyünk egy részecskepárt, ahol a tagok tömege m , és amely a fekete lyuk horizontjának két oldalán keletkezik. Az egyik részecske kissé a horizonton kívül van $r \approx R_{\text{SC}}$ helyen, míg a másik részecske a horizonton belül van $r = \kappa R_{\text{SC}}$ helyen. Tegyük fel, hogy a részecske teljes energiája a nyugalmi tömeg mc^2 energiájának és a fekete lyuktól származó gravitációs potenciális energiájának az összege.

Határozd meg azt a κ értéket, amelynél a részecskepár teljes energiája nulla!

[4]

(T12.1b) **Egy fekete lyuk hőmérséklete:** Ha a horizonton kívül keletkezett részecskének elegendő kinetikus energiája van, elszökhet a fekete lyukból egy Hawking-sugárzásnak nevezett folyamat során. A horizonton belüli, amely negatív energiával rendelkezik, elnyelődik, és csökkenti a fekete lyuk tömegét.

Tegyük fel, hogy a teljes Hawking-sugárzás fotonokból áll, amelyek feketetest-spektrummal rendelkeznek, amely maximuma $\lambda_{\text{bb}} \approx 16R_{\text{SC}}$ hullámhossznál található. Ismert, hogy egy naptömegű fekete lyuk esetén $R_{\text{SC}, \odot} = 2,952 \text{ km}$.

Találj egy kifejezést a fekete lyuk T_{bh} hőmérsékletére, amely megfelel ennek a [4]
feketetest-sugárzásnak, az M_{bh} tömege és fizikai állandók függvényében! Számítsd ki az $R_{\text{SC}, 10\odot}$ Schwarzschild-sugarat és a $T_{\text{bh}, 10\odot}$ hőmérsékletet egy $10 M_{\odot}$ tömegű fekete lyuk esetén!

(T12.1c) **Egy fekete lyuk tömegvesztése:** Tegyük fel, hogy a Hawking-sugárzás az eseményhorizonttól bocsátódik ki.

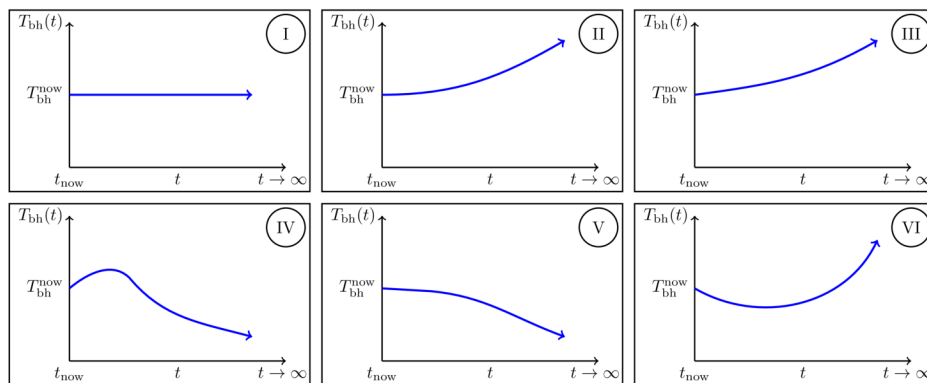
A tömeg-energia ekvivalencia felhasználásával találj egy kifejezést a tömegvesztés $dM_{\text{bh}}(t)/dt$ ütemére, a BH $M_{\text{bh}}(t)$ tömege és fizikai állandók függvényében.

Ez alapján határozz meg egy kifejezést $M_{\text{bh}}(t)$ -re egy M_0 kezdeti tömegű BH esetén! [8]
Vázold fel $M_{\text{bh}}(t)$ -t t függvényében $M_{\text{bh}} = M_0$ -tól $M_{\text{bh}} = 0$ -ig.

(T12.1d) **Egy fekete lyuk élettartama:** Találj egy kifejezést a τ_{BH} élettartamra, amikor egy M_0 kezdeti tömegű fekete lyuk teljesen elpárolog a Hawking-sugárzás következtében, M_0 és fizikai állandók függvényében! Számítsd ki a $\tau_{\text{bh}, 10\odot}$ élettartamot (másodpercben) egy olyan fekete lyuk esetén, amelyre $M_0 = 10 M_{\odot}$. [3]

- (T12.1e) **A CMB-ben fürdőző fekete lyuk:** Vegyünk egy elszigetelt fekete lyukat az űrben, távol más testektől, amelynek jelenlegi hőmérséklete T_{bh}^{now} , körülvéve a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzással (CMB), amelynek jelenlegi hőmérséklete $T_{cmb}^{now} = 2,7$ K. A fekete lyuk tömege nőhet a CMB sugárzás elnyelésével, és csökkenhet Hawking-sugárzás révén.

Figyelembe véve az Univerzum gyorsuló tágulását, azonosítsd, hogy az alábbi ábrák közül melyik mutatja a T_{bh} hosszútávú időbeli fejlődését a következő három esetben: (X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$!



Jelöld meg válaszd a helyes számmal jelölt grafikonhoz tartozó mező (pontosan egy) [6] kipipálásával a X, Y vagy Z esetekre az Összesítő Válaszlapon.

- (T12.2) A sokkal kisebb tömegű ősi fekete lyukak (PBH-k) a nagyon korai Univerzumban alakulhattak ki. Az összes következő kérdés a PBH-khoz kapcsolódik. Bármilyen, a fekete lyuk tömegét növelő folyamat elhanyagolható.

- (T12.2a) **A PBH-k párolgása jelenleg:** Ahogyan az előző kérdésekre adott válaszokból észrevehetted, a naptömegű fekete lyukaknak hosszú időbe telne elpárologni. Mivel azonban a PBH-k sokkal kisebb tömegűek lehetnek, előfordulhat, hogy jelenleg is láthatjuk a párolgásukat.

Határozd meg az $M_{0, PBH}$ kezdeti tömeget (kg-ban), az $R_{SC, PBH}$ Schwarzschild-sugarat [4] (m-ben) és a T_{PBH} hőmérsékletet (K-ben) az olyan fekete lyukakra, amelyek mára teljesen elpárologhattak, tehát azokra, amelyek élettartama $\tau_{PBH} = 14$ milliárd év.

- (T12.2b) **A PBH-k kialakulása:** A sugárzás által dominált korai Univerzumban a skálafaktor $a(t) \sim t^{1/2}$ módon változik. Ebben a korszakban a PBH-k úgy alakulnak ki, hogy egy ct fizikai méretű régió összes energiája összesűrűsödik, ahol t az Univerzum kora abban az időben.

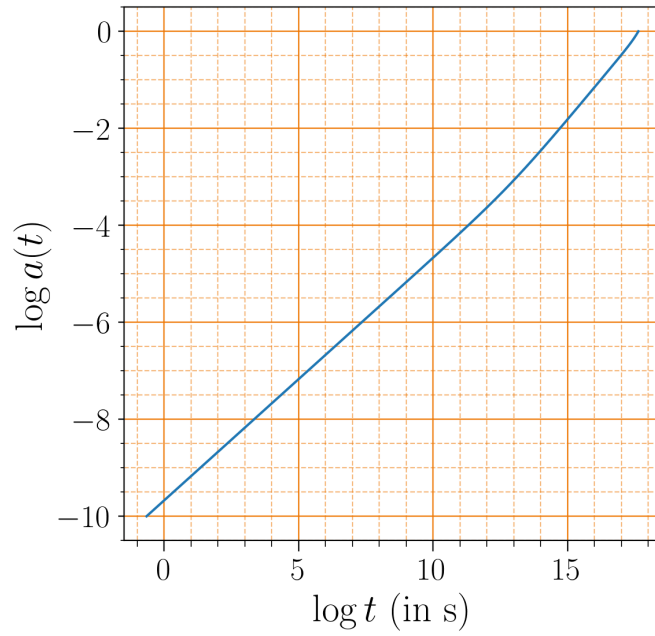
Az 1×10^{12} kg tömegű PBH-k akkor alakulnak ki, amikor az Univerzum kora [6] körülbelül 1×10^{-23} s. Számítsd ki az Univerzum t_{20} korát, tehát amikor az 1×10^{20} kg tömegű PBH-k alakulnak ki!

- (T12.2c) **A PBH-k Hawking-sugárzásának megfigyelt spektruma:** Tekintsünk egy PBH-t, amelynek kezdeti tömege 1×10^{10} kg, és amely teljesen elpárolog τ_{PBH} élettartama végére. Ebben a részben az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a Hawking-sugárzás nagy része ekkor kerül kibocsátásra, a kezdeti tömegének megfelelő hőmérséklettel. Továbbá vegyük úgy, hogy az Univerzum skálafaktora $a(t) \sim t^{2/3}$ módon változik.

Számítsd ki ennek a Hawking-sugárzásnak a maximális intenzitáshoz tartozó, a Földről [5] megfigyelhető λ_{earth} hullámhosszát jelenleg, azaz $t = 14$ milliárd évnél!

- (T12.2d) **A PBH-k nagyenergiájú kozmikus sugárzása:** Most tegyük fel, hogy a t időpontban kibocsátott Hawking-sugárzás $k_B T_{\text{bh}}(t)$ energiájú fotonoknak felel meg. Továbbá a fekete lyuk lehetséges legmagasabb hőmérséklete a T_{Planck} Planck-hőmérséklet, ahol $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19} \text{ GeV}$.

A skálafaktor fejlődése a releváns időskálákon a következő ábrán látható. A mai skálafaktort egységnyinek tekintjük. Az időtengelyen $t(s)$ az univerzum korát jelöli másodpercben.



A Földön egy $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20} \text{ eV}$ energiájú fotont észlelnek. Határozd meg annak a **[10]** PBH-nak lehetséges legnagyobb és legkisebb kezdeti tömegét (M_0^{max} és M_0^{min} , sorrendben), amely felelős lehet ezen foton kibocsátásáért!