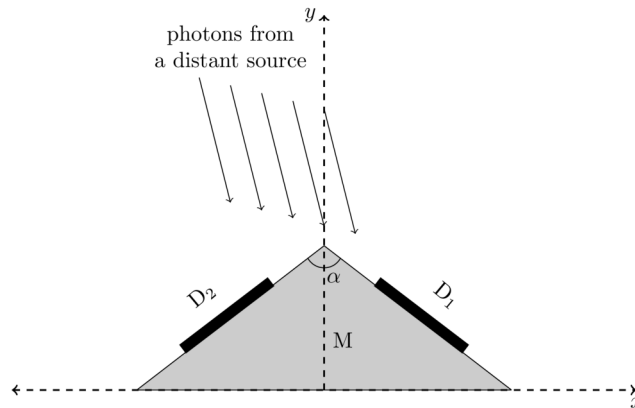


(T01) Daksha 任務

[10 分]

“Daksha” 是一個提議中的印度任務，由兩顆衛星 S_1 和 S_2 組成，這兩顆衛星在半徑為 $r = 7000$ 公里的相同圓形軌道上繞地球運行，但相位差為 180° 。這些衛星在高能域（X 射線和 γ 射線）觀測宇宙。Daksha 的每顆衛星使用多個平坦的矩形探測器。

為了理解如何在天空中定位一個源，我們將使用 Daksha 任務的簡化模型。假設 S_1 只有兩個相同的探測器 D_1 和 D_2 ，每個面積為 $A = 0.50 \text{ m}^2$ ，附著在一個不透明的支架 M 上，如下圖所示。探測器位於垂直於 x - y 平面的平面上，彼此之間形成 $\alpha = 120^\circ$ 的角度。



- (T01.1) 當觀察位於 x - y 平面上的遠處光源時，探測器 D_1 記錄的功率為 $P_1 = 2.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$ ，而探測器 D_2 記錄的功率為 $P_2 = 4.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$ 。

估算光源位置向量與正 y 軸所形成的角度 η ，逆時針方向的角度為正。

[5]

考慮來自遠處來源的單個脈衝（不一定在 x - y 平面上）由 Daksha 的兩顆衛星（ S_1 和 S_2 ）記錄。 S_1 和 S_2 記錄的脈衝峰值時間分別為 t_1 和 t_2 。

- (T01.2) 如果 $t_1 - t_2$ 被測量為 $10.0 \pm 0.1 \text{ ms}$ ，則確定來源可能位於天空中的部分， f 。

[5]

(T02) Makar-Sankranti

[10 分]

「Makar-Sankranti」節日目前在印度於每年 1 月 14 日左右慶祝，這時太陽從地球上看似進入摩羯座黃道區域（Makar = 摩羯座，Sankranti = Entry）。許多年前，這個節日也與北半球的冬至（12 月 21 日）同時發生。

- (T02.1) 根據上述資訊，找出此節日上一次與冬至重合的年份， y_c 。

[3]

- (T02.2) 如果太陽在孟買 2006 年 1 月 14 日的當地時間 11:50:13 進入摩羯座的黃道區域，計算其在 2013 年進入摩羯座的日期， D_{enter} ，和當地時間， t_{enter} 。

[3]

- (T02.3) Makar-Sankranti 節日在摩羯座區域的第一個日落當天於特定地點慶祝。你可以假設孟買一月份的當地日落時間是 18:30:00。

指出 2006 年至 2013 年間每年節日的慶祝日期（在總結答案表中的相應框中打勾（✓））。

[4]

(T03) 重力波
[15 分]

繞行的雙黑洞會產生重力波。考慮兩個黑洞，在我們的銀河系中，其質量分別為 $M = 36 M_{\odot}$ 和 $m = 29 M_{\odot}$ ，它們繞著質心做圓形軌道運動。

(T03.1) 假設牛頓引力，推導出黑洞軌道的角頻率 ω_{ini} 的表達式，當黑洞之間的距離是它們史瓦西半徑總和的 4.0 倍時，以 M 、 m 和物理常數為變量。

計算 ω_{ini} 的值（以 rad s^{-1} 為單位）。

[5]

(T03.2) 在廣義相對論中，軌道上的黑洞會發射頻率為 f_{GW} 的引力波， $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$ 。這會縮小黑洞的軌道，進而增加 f_{GW} 。 f_{GW} 的變化率為

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

其中 $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ 被稱為“啁啾質量 chirp mass”。

找出 α 、 β 和 δ 的值。

[4]

(T03.3) 假設與事件相關的重力波首先在時間 $t_{\text{ini}} = 0$ 被檢測到。

[6]

推導一個僅以 ω_{ini} 、 M_{chirp} 和物理常數為變數的表達式，用於觀察到的黑洞合併時間 t_{merge} ，當 f_{GW} 變得非常大時。

計算 t_{merge} 的值（以秒為單位）。

(T04) 巴耳末減量
[15 分]

考慮一顆主序星被一個星雲包圍，其觀測到的 V 波段星等為 11.315 mag。靠近恆星的星雲電離區域發射 $H\alpha$ 和 $H\beta$ 線；它們的波長分別為 $0.6563 \mu\text{m}$ 和 $0.4861 \mu\text{m}$ 。理論預測的 $H\alpha$ 與 $H\beta$ 線通量比為 $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2.86$ 。然而，當這些輻射通過冷塵星雲的外部時，觀測到的 $H\alpha$ 和 $H\beta$ 線的發射通量分別為 $6.80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ 和 $1.06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ 。

消光 A_{λ} 是波長的函數，表達式為

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

其中， $\kappa(\lambda)$ 是消光曲線， $E(B - V)$ 表示濾波器 B 和 V 波段的顏色超量。消光曲線（ λ 以 μm 為單位）如下所示。

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

其中， $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ 是總消光與選擇性消光的比率。

- (T04.1) 找出 $\kappa(\text{H}\alpha)$ 和 $\kappa(\text{H}\beta)$ 的值。 [3]
- (T04.2) 找出顏色過量比值 $\frac{E(\text{H}\beta - \text{H}\alpha)}{E(B - V)}$ 的值。 [4]
- (T04.3) 估算由星雲造成的消光， $A_{\text{H}\alpha}$ 和 $A_{\text{H}\beta}$ ，分別在 $\text{H}\alpha$ 和 $\text{H}\beta$ 波長。 [6]
- (T04.4) 估計星雲的消光程度 (A_V) 和在沒有星雲時，V 波段中恆星的視星等 m_{V0} 。 [2]