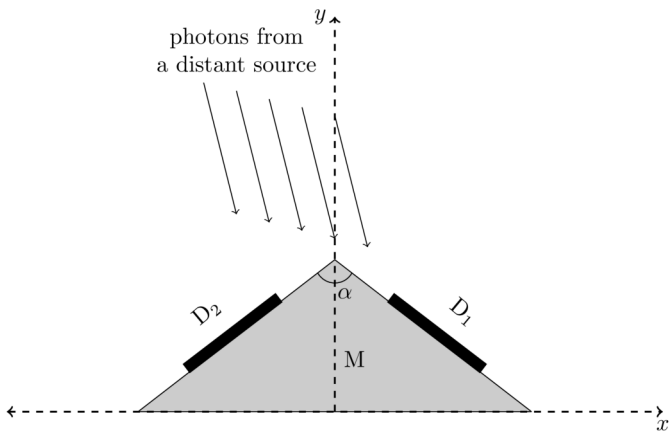
(T01) Daksha-Mission [10 Punkte]

"Daksha" ist eine vorgeschlagene indische Mission, die aus zwei Satelliten S_1 und S_2 besteht, die die Erde auf derselben kreisförmigen Bahn mit einem Radius von $r = 7000$ km, aber mit einem Phasenunterschied von 180° umkreisen. Diese Satelliten beobachten das Universum im Hochenergiebereich (Röntgenstrahlen und γ-Strahlen). Jeder der Daksha-Satelliten verwendet mehrere flache, rechteckige Detektoren.

Um zu verstehen, wie eine Quelle am Himmel lokalisiert werden kann, wollen wir ein vereinfachtes Modell der Daksha-Mission verwenden. Wir nehmen an, dass S_1 nur zwei identische Detektoren D_1 und D_2 hat, jeder mit einer Fläche $A = 0.50\ \mathrm{m}^2$, die an einer undurchsichtigen Halterung M befestigt sind, wie in der Abbildung unten gezeigt. Die Detektoren liegen symmetrisch um die y-Achse in Ebenen senkrecht zur x-y-Ebene und bilden einen Winkel $\alpha = 120°$ miteinander.



(T01.1) Bei der Beobachtung einer weit entfernten Quelle, die sich in der x-y-Ebene befindet, zeichnet der Detektor D_1 eine Leistung $P_1 = 2.70 \times 10^{-10}\ \mathrm{J\ s^{-1}}$ und der Detektor D_2 eine Leistung $P_2 = 4.70 \times 10^{-10}\ \mathrm{J\ s^{-1}}$ auf.

Bestimme den Winkel η, den der Positionsvektor der Quelle mit der positiven y-Achse bildet, wobei ein Winkel entgegen dem Uhrzeigersinn von der positiven y-Achse als positiv gilt. **[5]**

Betrachte einen einzelnen Puls von einer weit entfernten Quelle (nicht unbedingt in der x-y-Ebene), der von beiden Satelliten (S_1 und S_2) von Daksha aufgezeichnet wurde. Die Zeitpunkte der Spitzenwerte der von S_1 und S_2 aufgezeichneten Pulse sind t_1 bzw. t_2.

(T01.2) Bestimme den Anteil f der Himmelskugel, in dem die Quelle liegen könnte, wenn $t_1 - t_2$ mit 10.0 ± 0.1 ms gemessen wurde. **[5]**

(T02) Makar-Sankranti [10 Punkte]

Das Fest "Makar-Sankranti" wird in Indien gefeiert, wenn die Sonne von der Erde aus gesehen in den Tierkreisbereich des Steinbocks eintritt (Makar = Steinbock, Sankranti = Eintritt). Derzeit wird es jedes Jahr um den 14. Januar herum gefeiert. Vor vielen Jahren fiel dieses Fest auch mit der Wintersonnenwende in der nördlichen Hemisphäre zusammen, von der wir annehmen, dass sie am 21. Dezember stattfindet.

(T02.1) Ermittle auf der Grundlage der obigen Informationen das Jahr y_c, in dem die Feier dieses Festes zuletzt mit der Wintersonnenwende auf der Nordhalbkugel zusammenfiel. **[3]**

(T02.2) Gegeben, dass die Sonne am 14. Januar 2006 um 11:50:13 Uhr in Mumbai in die Tierkreisregion des Steinbocks eingetreten ist, berechne das Datum D_{enter} und die Ortszeit t_{enter} ihres Eintritts in den Steinbock im Jahr 2013. **[3]**

(T02.3) Das Makar-Sankranti-Fest wird an einem bestimmten Ort am Tag des ersten Sonnenuntergangs im Tierkreisgebiet des Steinbocks gefeiert. Du kannst davon ausgehen, dass der Sonnenuntergang in Mumbai im Januar um 18:30:00 Uhr stattfindet.

Gib für jedes Jahr zwischen 2006 und 2013 das Datum an, an dem das Fest gefeiert wurde (durch Ankreuzen (✓) des entsprechenden Kästchens in der Tabelle auf dem zusammenfassenden Antwortbogen). **[4]**

(T03) Gravitationswellen [15 Punkte]

Zwei sich umkreisende Schwarze Löcher erzeugen Gravitationswellen. Betrachte zwei Schwarze Löcher in unserer Galaxie mit den Massen $M = 36\ \mathrm{M}_\odot$ und $m = 29\ \mathrm{M}_\odot$, die sich auf kreisförmigen Bahnen mit einer Umlaufwinkelfrequenz ω um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen.

(T03.1) Leite unter Annahme der Newtonschen Gravitationsgesetze einen Ausdruck für die Winkelfrequenz ω_{ini} der Bahnen der Schwarzen Löcher zu einem Zeitpunkt t_{ini} her, zu dem der Abstand zwischen den Schwarzen Löchern das 4,0-fache der Summe ihrer Schwarzschild-Radien beträgt, und zwar nur in Abhängigkeit von M, m und physikalischen Konstanten.

Berechne den Wert von ω_{ini} (in rad s^{-1}). **[5]**

(T03.2) Laut der allgemeinen Relativitätstheorie senden sich umkreisende Schwarze Löcher Gravitationswellen mit einer Frequenz f_{GW} aus, so dass $2\pi f_{\mathrm{GW}} = \omega_{\mathrm{GW}} = 2\omega$. Dadurch schrumpfen die Umlaufbahnen der Schwarzen Löcher, was wiederum f_{GW} vergrößert. Die Änderungsrate von f_{GW} ist

$$\frac{df_{\mathrm{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} {M_{\mathrm{chirp}}}^{\alpha/3} f_{\mathrm{GW}}^{\delta/3},$$

wobei $M_{\mathrm{chirp}} = \dfrac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ als "Chirp-Masse" bezeichnet wird.

Ermittle die Werte von α, β und δ. **[4]**

(T03.3) Nimm an, dass die mit dem Ereignis verbundenen Gravitationswellen zum ersten Mal zum Zeitpunkt $t_{\mathrm{ini}} = 0$ nachgewiesen wurden. **[6]**

Leite einen Ausdruck für den beobachteten Zeitpunkt t_{merge} der Verschmelzung der Schwarzen Löcher her, zu dem f_{GW} divergiert, und zwar nur in Abhängigkeit von ω_{ini}, M_{chirp} und physikalischen Konstanten.
Berechne den Wert von t_{merge} (in Sekunden).

(T04) Balmer-Dekrement [15 Punkte]

Betrachte einen Hauptreihenstern, der von einem Nebel umgeben ist, dessen beobachtete V-Band-Helligkeit 11.315 mag beträgt. Der ionisierte Bereich des Nebels in der Nähe des Sterns emittiert Hα- und Hβ-Linien; deren Wellenlängen sind 0.6563 µm bzw. 0.4861 µm. Das theoretisch vorhergesagte Verhältnis der Flüsse der Hα- und Hβ-Linien ist $f_{\mathrm{H}\alpha}/f_{\mathrm{H}\beta} = 2.86$. Wenn diese Strahlung jedoch den äußeren Teil des kalten Staubnebels durchquert, betragen die beobachteten Emissionsflüsse der Linien Hα und Hβ 6.80×10^{-15} W m^{-2} bzw. 1.06×10^{-15} W m^{-2}.

Die Extinktion A_λ ist eine Funktion der Wellenlänge und wird ausgedrückt als

$$A_\lambda = \kappa(\lambda) E(B-V).$$

Hier ist $\kappa(\lambda)$ die Extinktionskurve und $E(B-V)$ bezeichnet den Farbexzess in den Filterbändern B und V. Die Extinktionskurve (mit λ in µm) ist wie folgt gegeben:

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

wobei $R_V = A_V / E(B-V) = 3.1$ das Verhältnis von Gesamt- zu selektiver Extinktion ist.

(T04.1) Ermittle die Werte von $\kappa(\mathrm{H}\alpha)$ und $\kappa(\mathrm{H}\beta)$. **[3]**

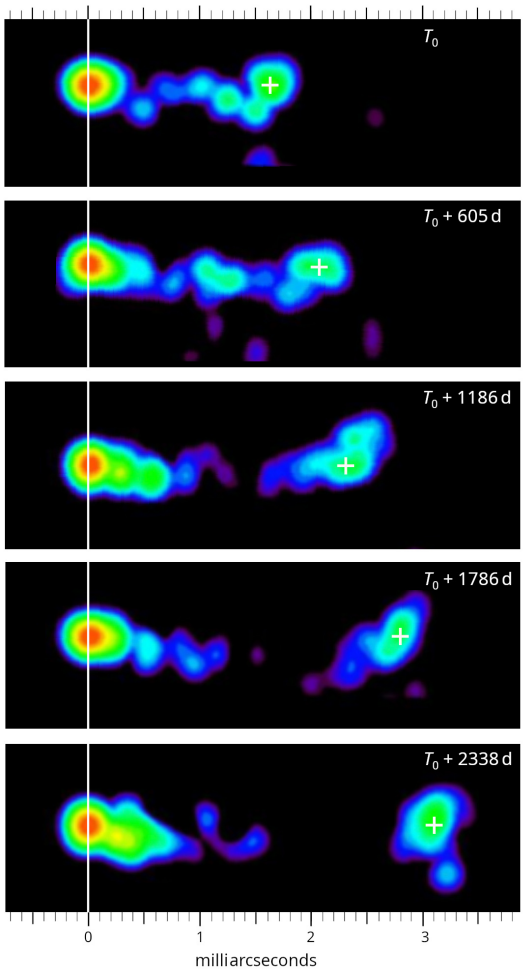
(T04.2) Ermittle den Wert des Verhältnisses der Farbexzesse $\dfrac{E(\mathrm{H}\beta - \mathrm{H}\alpha)}{E(B-V)}$. **[4]**

(T04.3) Schätze die Extinktionen durch den Nebel, $A_{\mathrm{H}\alpha}$ und $A_{\mathrm{H}\beta}$, bei den Wellenlängen von $\mathrm{H}\alpha$ bzw. $\mathrm{H}\beta$ ab. **[6]**

(T04.4) Schätze die Extinktion des Nebels (A_V) und die scheinbare Helligkeit des Sterns im V-Band, m_{V0}, in Abwesenheit des Nebels ab. **[2]**

(T05) Quasare **[20 Punkte]**

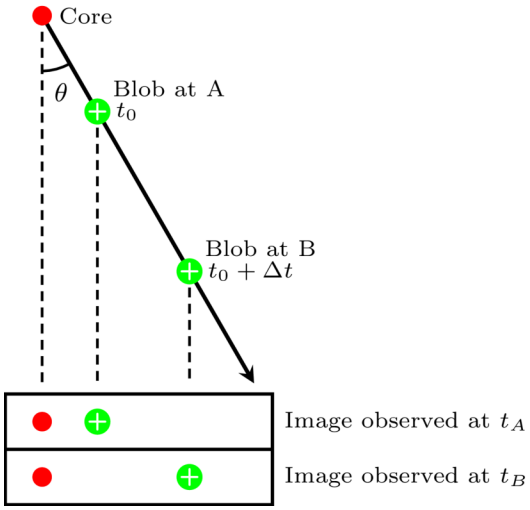
Ein Quasar ist eine extrem hell leuchtende aktive Galaxie, die von einem supermassereichen schwarzen Loch angetrieben wird, das relativistische Jets aussendet. Die Abbildung zeigt eine Reihe von Radiobildern eines Quasars (mit Rotverschiebung $z = 0.53$ und Luminosity Distance $D_{\mathrm{L}} = 1.00 \times 10^{10}$ ly) zu verschiedenen Zeiten. Der "Kern" richtet sich an der vertikalen weißen Linie aus, während sich ein Jet, bestehend aus einem "Blob" (mit einem weißen $+$ markiert), im Laufe der Zeit davon wegbewegt. Jedes Feld zeigt die Beobachtungszeit (beginnend mit T_0 für das erste Bild), und die Winkelskala ist oben und unten in der Abbildung angegeben.



(T05.1) **[5]**

Bestimme den Winkelabstand des Blob, ϕ_{blob} (in Millibogensekunden), und seine transversale Entfernung, l_{blob} (in Lichtjahren), vom Quasarkern für jede Beobachtung. Berechne dann die scheinbare Geschwindigkeit des Blob in transversaler Richtung (v_{app}) als Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit, β_{app} ($= v_{\text{app}}/\text{c}$), indem Du aufeinanderfolgende Beobachtungen verwendest. Berechne außerdem die mittlere scheinbare Geschwindigkeit $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ über den gesamten Beobachtungszeitraum.

Der Quasarjet bewegt sich tatsächlich mit einer relativistischen Geschwindigkeit $v \equiv \beta c$, aber nicht notwendigerweise in der Himmelsebene; d.h. er bildet einen Winkel θ (den "Betrachtungswinkel") in Bezug auf die Sichtlinie eines entfernten Beobachters (durch die gestrichelten Linien angedeutet), wie in der Skizze unten gezeigt.
Ignoriere für diesen und alle folgenden Teile die Rotverschiebung des Quasars und alle relativistischen Effekte.



(T05.2) Das von dem Blob zu zwei verschiedenen Zeitpunkten t_0 (entspricht der Position A) und $t_0 + \Delta t$ (entspricht der Position B) ausgesandte Licht erreicht den Beobachter zu Zeitpunkten t_A bzw. t_B. Die beobachtete Zeitdifferenz ist also $\Delta t_\mathrm{app} = t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A}$.

(T05.2a) Finde einen Ausdruck für das Verhältnis $\dfrac{\Delta t_\mathrm{app}}{\Delta t}$ in Abhängigkeit von β und θ. **[2]**

(T05.2b) Verwende dieses Verhältnis, um β_{app} in Abhängigkeit von β und θ auszudrücken. **[2]**

(T05.3) Eine Bewegung wird als superluminal bezeichnet, wenn die scheinbare Geschwindigkeit die des Lichts übersteigt ($\beta_\mathrm{app} > 1$), und subluminal, wenn sie dies nicht tut ($\beta_\mathrm{app} < 1$).

(T05.3a) Zeichne für $\beta_\mathrm{app} = 1$ eine glatte Kurve von β als Funktion von θ, um die Grenze zwischen subluminalen und superluminalen Bewegungen zu markieren. Schattiere den superluminalen Bereich in der Grafik mit schrägen Linien (///). **[4]**

(T05.3b) Ermittle die niedrigste wahre Jetgeschwindigkeit ($\beta_\mathrm{low} = v_\mathrm{low}/c$), bei der die superluminale Bewegung auftritt, sowie den entsprechenden Betrachtungswinkel θ_low. **[2]**

(T05.4) Finde einen Ausdruck für den maximalen Betrachtungswinkel, θ_max, für den ein bestimmter Wert von β_app möglich ist. **[2]**

Der Kern eines Quasars, sein zentrales kompaktes Objekt, weist eine Variabilität in seiner Emission auf, die auf interne Prozesse zurückzuführen ist, die innerhalb einer kausal verbundenen Region stattfinden. Die Größe (= Radius) dieser Region wird üblicherweise mit dem Fünffachen des Schwarzschild-Radius des Kerns angenommen.

(T05.5) Der Kern eines bestimmten Quasars verändert sich auf Zeitskalen von etwa 1 h. Bestimme eine Obergrenze für die Masse $M_\mathrm{c,\,max}$ des zentralen kompakten Objekts in Einheiten der Sonnenmasse. **[3]**

(T06) Galaktische Rotation **[20 Punkte]**

Die Rotationskurve unserer Galaxie wird anhand von Sichtliniengeschwindigkeitsmessungen neutraler Wasserstoffwolken (HI-Wolken) entlang verschiedener galaktischer Längengrade bestimmt, die über die 21-cm-HI-Linie beobachtet wurden. Betrachte eine HI-Wolke mit der galaktischen Länge l, die sich in einem Abstand R vom galaktischen Zentrum (GC) und einem Abstand D von der Sonne befindet. Nimm an, dass sich die Sonne in einem Abstand $R_0 = 8{,}5$ kpc vom GC befindet. Nimm außerdem an, dass sich sowohl die Sonne als auch die HI-Wolke auf kreisförmigen Bahnen um das GC in der galaktischen Ebene befinden, mit den Winkelgeschwindigkeiten Ω_0 und Ω bzw. den Rotationsgeschwindigkeiten V_0 und V.

Die Komponenten der Sichtliniengeschwindigkeit (V_r) und der Transversalgeschwindigkeit (V_t) der Wolke, wie sie von der Sonne aus beobachtet werden, lassen sich ausdrücken als

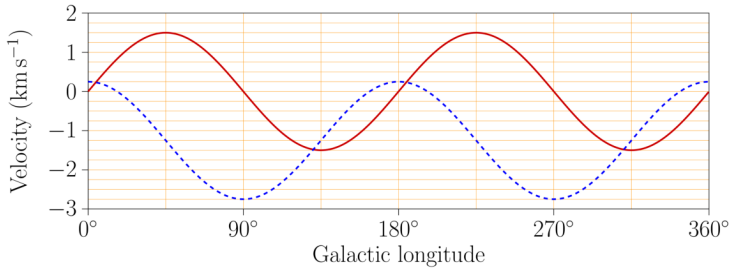
$$V_\mathrm{r} = (\Omega - \Omega_0) R_0 \sin l$$

$$V_\mathrm{t} = (\Omega - \Omega_0) R_0 \cos l - \Omega D$$

Vom galaktischen Nordpol aus gesehen erfolgt die galaktische Rotation im Uhrzeigersinn. In dieser Aufgabe wird die Sichtliniengeschwindigkeit als positiv angenommen, wenn sich ein Objekt entfernt, und die Wolken werden als Punktobjekte behandelt.

(T06.1) Skizziere in der Grafik auf dem Antwortbogen V_r als Funktion von D von $D = 0$ bis $D = 2R_0$ für zwei Sichtlinien, die durch (i) l =45° und (ii) l = 135° definiert sind. Beschrifte jede Deiner Linien/Kurven mit dem Wert von l. **[5]**

(T06.2) Das folgende Diagramm zeigt die durchschnittlichen radialen (durchgezogene, rote Kurve) und transversalen (gestrichelte, blaue Kurve) Geschwindigkeitskomponenten von Sternen in einer Entfernung von 100 pc von der Sonne, aufgetragen als Funktion der galaktischen Länge.



Schätze anhand der Grafik die Umlaufzeit der Sonne (P) um das GC in Megajahren (Myr) ab. **[3]**

(T06.3) Jan Oort stellte fest, dass in der Sonnenumgebung ($D \ll R_0$) die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten ($\Omega - \Omega_0$) klein sein wird, und leitete daher die folgende Näherung erster Ordnung für die Sichtlinien- und die Transversalgeschwindigkeitskomponenten ab:

$$V_\mathrm{r} = AD \sin 2l$$
$$V_\mathrm{t} = AD \cos 2l + BD$$

wobei A und B als Oortsche Konstanten bekannt sind.

Betrachten wir zwei Fälle:
(I) die tatsächlich beobachtete Rotationskurve der Galaxie und
(II) die Rotationskurve für ein hypothetisches Szenario, in dem die Galaxie frei von dunkler Materie ist und die gesamte Masse der Galaxie in ihrem Zentrum konzentriert ist.

(T06.3a) Leite Ausdrücke für den radialen Gradienten der Rotationsgeschwindigkeit am Ort der Sonne, $\left.\frac{dV}{dR}\right|_{R=R_0}$, für die beiden Fälle her. **[2]**

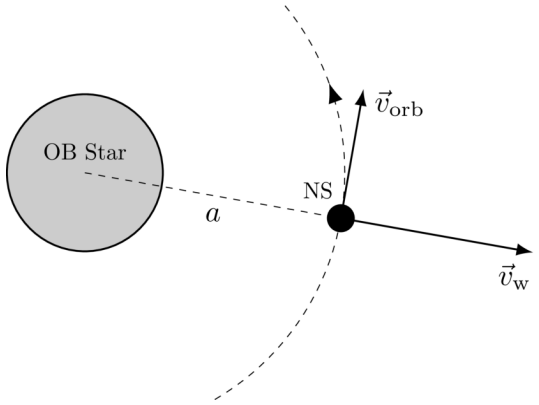
(T06.3b) Drücke A und B in Abhängigkeit von V_0, R_0 und dem radialen Gradienten der Rotationsgeschwindigkeit am Ort der Sonne, $\left.\frac{dV}{dR}\right|_{R=R_0}$, aus. **[8]**

(T06.3c) Die Verhältnisse (A/B) der Oortschen Konstanten für die beiden gegebenen Fälle (I) und (II) sind definiert als F_I bzw. F_II. Bestimme F_I und F_II. **[2]**

(T07) Neutronendoppelstern **[20 Punkte]**

In einem Doppelsternsystem mit einem kompakten Stern, bei dem der Roche-Lappen des Begleitsterns nicht überfließt, ist die Hauptquelle der Akkretion für den kompakten Stern der Sternwind des Begleitsterns. Diese windgespeiste Akkretion ist besonders wichtig in Systemen, die einen Stern eines frühen Typs (wie einen O- oder B-Stern, im Folgenden als OB-Stern bezeichnet) neben einem kompakten Objekt wie einem Neutronenstern (NS) in einer engen Umlaufbahn enthalten.

Betrachten wir ein solches NS-OB-Doppelsternsystem, in dem ein Neutronenstern der Masse $M_{\mathrm{NS}} = 2.0\,\mathrm{M}_\odot$ und des Radius $R_{\mathrm{NS}} = 11$ km auf einer Kreisbahn mit Radius a um das Zentrum des OB-Sterns mit einer Geschwindigkeit $v_{\mathrm{orb}} = 1.5 \times 10^5$ m s^{-1} kreist (siehe Abbildung unten). In dieser Aufgabe wird angenommen, dass der Massenverlust des OB-Sterns sphärisch symmetrisch ist und die Rate $\dot{M}_{\mathrm{OB}} = 1.0 \times 10^{-4}\,\mathrm{M}_\odot\mathrm{yr}^{-1}$ beträgt .



(T07.1) Der Akkretionsradius, R_{acc}, ist definiert als die maximale Entfernung vom NS, in der der stellare Wind vom NS eingefangen werden kann. Bestimme R_{acc} für das obige System in km unter Verwendung einer Standard-Fluchtgeschwindigkeitsrechnung, wenn die Geschwindigkeit des Sternwindes in der Bahndistanz des NS $v_{\mathrm{w}} = 3.0 \times 10^6$ m s^{-1} beträgt. **[3]**

(T07.2) Schätze unter der Annahme, dass das gesamte eingefangene Material vom NS akkretiert wird, die Massenakkretionsrate, $\dot{M}_{\mathrm{acc}}$, vom Sternwind auf den NS in Einheiten von $\mathrm{M}_\odot\mathrm{yr}^{-1}$ ab, wenn $a = 0.5$ au. Vernachlässige die Auswirkungen des Strahlungsdrucks und die endliche Abkühlungszeit des akkretierenden Gases. **[3]**

(T07.3) Betrachte nun die Situation, in der die Geschwindigkeit des stellaren Windes im Orbitalabstand a (in der Nähe des NS) mit der Umlaufgeschwindigkeit des NS vergleichbar wird. Die Massenakkretionsrate vom Sternwind auf den NS wäre in diesem Fall durch einen Ausdruck der Form $\dot{M}_{\mathrm{acc}} = \dot{M}_{\mathrm{OB}} f(\tan\beta, q)$ gegeben, wobei $q = M_{\mathrm{NS}}/M_{\mathrm{OB}}$ das Massenverhältnis des Doppelsterns ist und β der Winkel zwischen der Windgeschwindigkeitsrichtung und der radialen Richtung vom OB-Stern weg im Bezugssystem des NS ist. Bestimme einen Ausdruck für $f(\tan\beta, q)$ unter der Annahme $M_{\mathrm{OB}} \gg M_{\mathrm{NS}}$. **[6]**

(T07.4) Berücksichtige nun, dass das vollständig ionisierte Material radial akkretiert und durch das starke Magnetfeld $\vec{B}$ des NS behindert wird. Dieser Effekt kann als Druck modelliert werden, der durch $\frac{B^2}{2\mu_0}$ gegeben ist. Wir nehmen an, dass der NS ein magnetisches Dipolfeld besitzt, dessen Betrag in der Äquatorebene mit dem Abstand r vom NS für $r \gg R_{\mathrm{NS}}$ wie

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\mathrm{NS}}}{r} \right)^3$$

variiert, wobei B_0 das Magnetfeld am Äquator des NS ist. Es wird angenommen, dass die Achse des magnetischen Dipols mit der Rotationsachse des NS übereinstimmt.

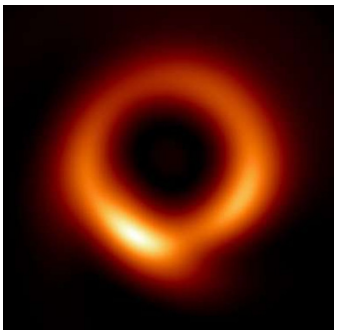
(T07.4a) Bestimme den magnetischen Druck, $P_{\mathrm{eq,\,mag}}$, in der Äquatorebene in Abhängigkeit von B_0, R_{NS}, r, und anderen geeigneten Konstanten. **[1]**

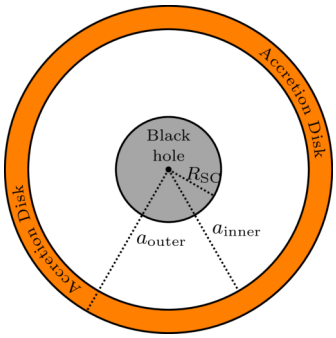
(T07.4b) Die maximale Entfernung, in der der Akkretionsstrom durch das Magnetfeld in der Äquatorebene gestoppt wird, wird als Magnetosphärenradius R_{m} bezeichnet. Dieser Materiestrom übt aufgrund der relativen Bewegung zwischen dem ankommenden Sternwind und dem NS einen Druck aus. Ermittle einen Näherungsausdruck für das kritische Magnetfeld $B_{0,\,\mathrm{c}}$, für welches R_{m} mit R_{acc} übereinstimmt, und berechne dessen Wert in Tesla. Magnetische Effekte werden für $r > R_{\mathrm{m}}$ vernachlässigt und betrachte $v_{\mathrm{w}} \gg v_{\mathrm{orb}}$. **[7]**

(T08) Schatten eines Schwarzen Lochs **[20 Punkte]**

Das Event Horizon Telescope (EHT) hat ein Bild des supermassereichen Schwarzen Lochs im Zentrum der Galaxie M87 aufgenommen, das in der Abbildung unten links zu sehen ist.

Um die grundlegenden Merkmale dieses Bildes zu verstehen, betrachten wir ein vereinfachtes Modell eines nicht-rotierenden, statischen, sphärisch symmetrischen Schwarzen Lochs der Masse $M = 6.5 \times 10^9 \mathrm{M}_\odot$, das von einer masselosen, dünnen, planaren Akkretionsscheibe mit den Radien $a_{\mathrm{inner}} = 6R_{\mathrm{SC}}$ und $a_{\mathrm{outer}} = 10R_{\mathrm{SC}}$ umgeben ist, wobei R_{SC} der Schwarzschildradius ist. Eine Skizze der Frontalansicht ist im rechten Feld der Abbildung unten zu sehen (Abbildung nicht maßstabsgetreu).





Es sei angenommen, dass die Akkretionsscheibe die einzige zu betrachtende Lichtquelle ist. Jeder Punkt auf der Scheibe strahlt Licht in alle Richtungen ab. Dieses Licht bewegt sich unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes des Schwarzen Lochs. Der Strahlengang wird durch die beiden folgenden Gleichungen bestimmt (die jenen eines Objekts, das die Sonne umkreist, ähneln):

$$\frac{1}{2}v_{\mathrm{r}}^2 + \frac{L^2}{2r^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \qquad v_\phi = r\,\omega = \frac{L}{r}$$

wobei $r \in (R_{\mathrm{SC}}, \infty)$ die Radialkoordinate ist, $\phi \in [0, 2\pi)$ ist der Azimutalwinkel, und E und L sind Konstanten, die sich auf die Energieerhaltung bzw. den Drehimpulserhalt beziehen.

Dabei ist $v_{\mathrm{r}} \equiv dr/dt$ der Betrag der Radialgeschwindigkeit, v_ϕ ist der Betrag der Tangentialgeschwindigkeit und $\omega \equiv d\phi/dt$ ist die Winkelgeschwindigkeit. Wir definieren den Stoßparameter b für eine Flugbahn als $b = L/\sqrt{2E}$. Die Zeitdilatation wird bei dieser Aufgabe vernachlässigt.

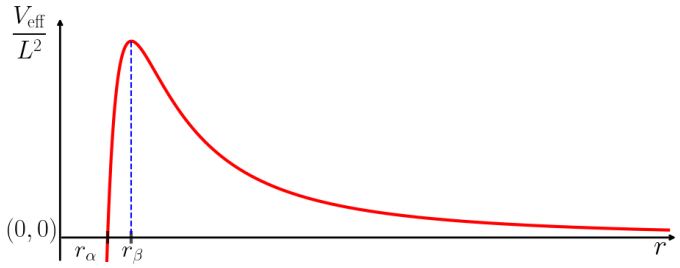
Eine weitere nützliche Gleichung erhält man durch Differenzieren der ersten Gleichung:

$$\frac{dv_{\mathrm{r}}}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

(T08.1) Es können kreisförmige Lichtbahnen um das Schwarze Loch existieren. Bestimme den Radius, r_{ph}, und den Stoßparameter, b_{ph}, für solche Photonenbahnen in Abhängigkeit von M und den relevanten Konstanten. **[4]**

(T08.2) Berechne die Zeit, T_{ph}, die benötigt wird, um einen vollen Umlauf der kreisförmigen Lichtbahn zu vollenden, in Sekunden. **[2]**

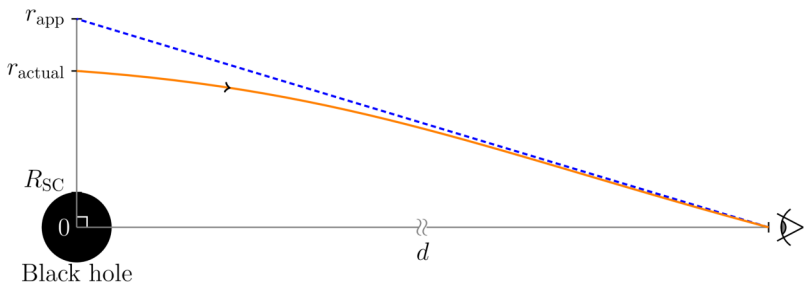
(T08.3) Die oben angegebene Gleichung der Radialgeschwindigkeit (die erste Gleichung in dieser Aufgabe) kann mit einer Gleichung der Form $\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ für Photonenbahnen verglichen werden. Unten ist eine schematische Darstellung von V_{eff}/L^2 in Abhängigkeit von r dargestellt.



(T08.3a) Die Skizze zeigt zwei spezielle Radien, r_α und r_β. Ermittle Ausdrücke für r_α und r_β in Abhängigkeit von M und den relevanten Konstanten. **[2]**

(T08.3b) Ein Photon, das sich von der Akkretionsscheibe in Richtung des Schwarzen Lochs bewegt, kann in einigen Fällen immer noch ins Unendliche entkommen. Finde den Ausdruck für den kleinsten Wert des Wendepunktradius, r_t, für ein solches Photon in Abhängigkeit von M und den relevanten Konstanten. Ermittle den Ausdruck für den kleinsten Wert des Stoßparameters, b_{min}, für dieses Photon. **[3]**

Ein Lichtstrahl, der von einem Radius r_{actual} vom Zentrum des Systems in der Himmelsebene kommt, wird aufgrund der Schwerkraft des Schwarzen Lochs stark abgelenkt und erreicht schließlich einen Beobachter (dargestellt durch ein Auge) in großer Entfernung d vom System, wie unten dargestellt.

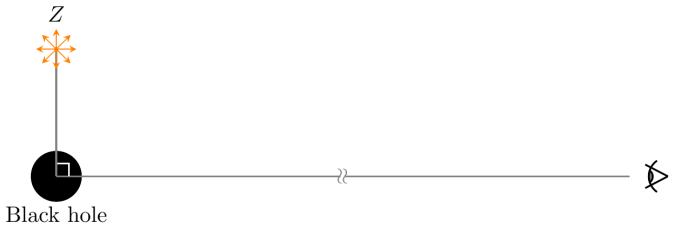


Für diesen Beobachter scheint der Strahl von einem anderen Punkt in einem Abstand $r_{\text{app}} \approx b$ vom Zentrum des Schwarzen Lochs in der Himmelsebene ausgegangen zu sein, wobei b der Stoßparameter für diese Photonenbahn ist. Für Punkte auf der Akkretionsscheibe bei $r = r_{\text{actual}}$ kann man die folgende Beziehung annehmen:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

Für einen entfernten Beobachter wie uns, der von vorn auf die Akkretionsscheibe blickt, erscheint das Bild des Systems kreisförmig symmetrisch in der Himmelsebene. Bestimme den äußersten scheinbaren Radius, r_{outer}, und den innersten scheinbaren Radius, r_{inner}, des Bildes in Einheiten von au. **[5]**

(T08.5) Betrachte ein isoliertes supermassereiches Schwarzes Loch der Masse $M = 6.5 \times 10^9\ \text{M}_\odot$ ohne Akkretionsscheibe. Ein kurzer starker Ausbruch elektromagnetischer Strahlung tritt für 5 s an einem Punkt Z auf, der sich, wie in der Abbildung gezeigt, in einem Abstand von $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ vom Schwarzen Loch befindet. Der Ausbruch im Punkt Z strahlt Licht in alle Richtungen ab. Ein Beobachter an einem Punkt, der weit vom Schwarzen Loch entfernt ist (in der Abbildung durch ein Auge gekennzeichnet), macht eine Langzeitaufnahme der Region um das Schwarze Loch für 60 s.



Wähle die richtige Option für jede der folgenden Aussagen:

(T08.5a) Die Anzahl der möglichen Strahlenwege, die das Licht von Z zum Beobachter zurücklegen kann, ist **[2]**
(A) Höchstens einer (B) Genau einer (C) Genau zwei (D) Größer als zwei.

(T08.5b) Die Anzahl der Bilder des EM-Ausbruchs bei Z, die bei der Langzeitbelichtung zu sehen sein werden, ist **[2]**
(A) Höchstens eins (B) Genau eins (C) Genau zwei (D) Mehr als zwei.

(T09) Atmosphärisches Seeing **[35 Punkte]**

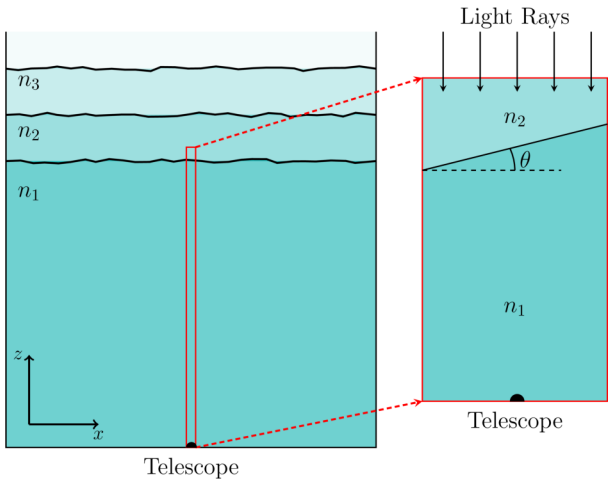
Ein Teleskop mit einer achromatischen konvexen Objektivlinse mit Durchmesser $D = 15$ cm und Brennweite $f = 200$ cm wird auf einen Stern im Zenit gerichtet.

(T09.1) Bestimme den Durchmesser (in m), d_{image}, des Bildes einer Punktquelle, wie es von der Objektivlinse in ihrer Brennebene für grünes Licht ($\lambda = 550$ nm) erzeugt wird, wobei nur Beugungseffekte berücksichtigt werden sollen. **[1]**

Das Bild einer astronomischen Quelle wird auch durch das so genannte "atmosphärische Seeing" beeinflusst.

Die Grenzen zwischen den Schichten in der Atmosphäre sowie die Brechungsindizes der Schichten ändern sich aufgrund von Turbulenzen, Temperaturschwankungen und anderen Faktoren ständig. Dies führt zu winzigen Veränderungen der Position des Bildes in der Brennebene des Teleskops, die als "Zwinkereffekt" bekannt sind. Für den Rest des Problems werden keine Interferenzeffekte berücksichtigt, abgesehen von der beugungsbegrenzten endlichen Größe des Bildes des Sterns (wie oben beschrieben).

Das linke Feld der Abbildung unten zeigt einen vertikalen Querschnitt durch die Atmosphäre mit mehreren Schichten unterschiedlicher Brechungsindizes ($n_1, n_2, n_3, \ldots$). Das rechte Feld zeigt die vergrößerte Ansicht eines dünnen vertikalen Segments der Atmosphäre und die Grenze zwischen den beiden untersten atmosphärischen Schichten mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 ($n_1 > n_2$). Wir betrachten für dieses Problem nur diese beiden Schichten und ihre Grenzen. Die Diagramme sind nicht maßstabsgetreu.



(T09.2) Die Grenze zwischen den beiden Schichten befinde sich in einer Höhe $H = 1$ km direkt über dem Teleskopobjektiv, mit einer Neigung von $\theta = 30°$ in Bezug auf die horizontale Ebene. In allen Teilen dieser Aufgabe wird davon ausgegangen, dass θ im Gegenuhrzeigersinn positiv ist. Für eine monochromatische Lichtquelle ist $n_1 = 1.00027$ und $n_2 = 1.00026$. Die Winkelverschiebung des Bildes in der Brennebene des Teleskops sei für einen im Zenit stehenden Stern α.

(T09.2a) Zeichne ein entsprechend beschriftetes Strahlendiagramm an der Grenze, das n_1, n_2, θ und α zeigt. **[2]**

(T09.2b) Finde einen Ausdruck für α in Abhängigkeit von θ, n_1 und n_2. Verwende die Kleinwinkelnäherungen: $\sin\alpha \approx \alpha$ und $\cos\alpha \approx 1$. **[2]**

(T09.2c) Berechne die Verschiebung, Δx_θ (in m), in der Position des Bildes, wenn θ um 1% zunimmt (wobei n_1 und n_2 konstant bleiben). **[3]**

(T09.2d) Berechne die Verschiebung, Δx_n (in m), in der Position des Bildes, wenn n_2 um 0.0001% zunimmt (wobei n_1 und θ konstant bleiben). **[3]**

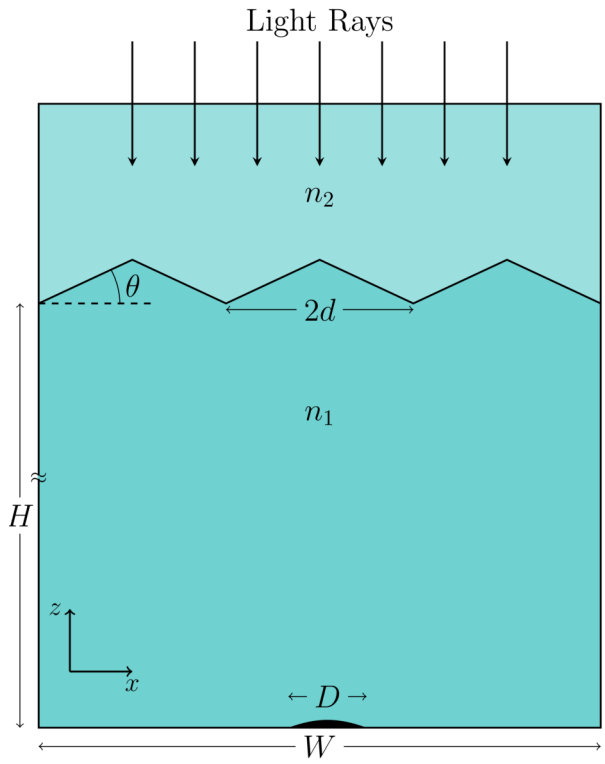
(T09.3) **[2]**

Wähle für weißes Licht, das von einem Stern im Zenit ausgeht, diejenige der folgenden Möglichkeiten aus, die die Form und Farbe des Bildes am besten beschreibt, indem Du das entsprechende Kästchen (nur eines) auf dem Antwortbogen abhakst (✓). Beachte, dass x in der Abbildung von links nach rechts zunimmt.

	Farbe des Bildes	Form des Bildes	Linker Rand	Rechter Rand
A	Weiß	Kreisförmig		
B	Weiß	Elliptisch		
C	Farbig	Kreisförmig	Blau	Rot
D	Farbig	Kreisförmig	Rot	Blau
E	Farbig	Elliptisch	Blau	Rot
F	Farbig	Elliptisch	Rot	Blau

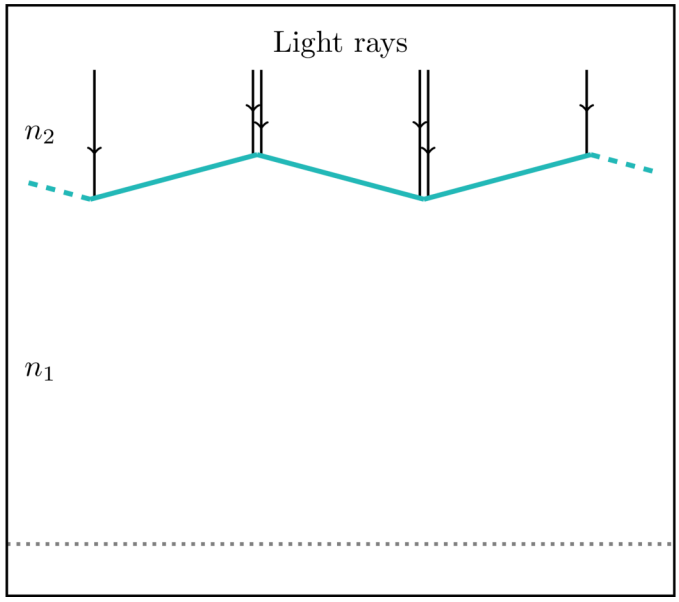
Für alle weiteren Teile dieser Frage betrachten wir monochromatisches grünes Licht mit $\lambda = 550$ nm. Wir modellieren die Grenze zwischen den Schichten als eine Reihe von unendlichen Zickzack-Ebenen (die senkrecht zur Ebene der Seite verlaufen), die durch $d = 10$ cm entlang der x-Achse voneinander getrennt sind, mit entweder $\theta = 10°$ oder $\theta = -10°$.

Die nachstehende Abbildung (nicht maßstabsgetreu) zeigt einen Querschnitt dieses Modells der Atmosphäre mit der Breite W ($W \ll H$). Bei Teleskopen mit großer Öffnung führt diese zickzackförmige Grenze zur Bildung von Flecken in der Brennebene.



(T09.4) Betrachte eine wie oben modellierte Atmosphäre.

(T09.4a) Die folgende Abbildung (nicht maßstabsgetreu) zeigt einen Ausschnitt aus der Atmosphäre mit aufeinanderfolgenden Zickzack-Ebenen und den gleichen Parametern wie oben angegeben.



Zeichne in diesem Diagramm, das auf dem zusammenfassenden Antwortbogen wiedergegeben ist, die Wege der einfallenden Lichtstrahlen bis zu der Ebene ein, in der sich das Objektiv des Teleskops befindet, dargestellt durch die graue gepunktete Linie.

Markiere die Bereiche im Diagramm mit einem "X", in die keine Lichtstrahlen eindringen können (falls es solche gibt). **[4]**

(T09.4b) Berechne die Breite W_{X} dieser Region(en). **[3]**

(T09.4c) Ermittle den größten Durchmesser $D_{\max}$ des Teleskopobjektivs, mit dem es möglich ist, ein einzelnes Bild eines Sterns zu erhalten, indem Du den Standort des Teleskops in Bezug auf die Struktur der Grenze angemessen wählst. **[4]**

(T09.5) Betrachte den Fall, dass die Zickzackform der Grenze sowohl in x als auch in y Richtung erlaubt ist (wie ein Pyramidenfeld) und $D = 100$ cm (mit $f = 200$ cm). **[6]**

Zeichne das qualitative Muster der sich ergebenden Flecken in das Kästchen auf dem zusammenfassenden Antwortbogen.

(T09.6) Für eine turbulente Atmosphäre betrachten wir wieder die gleiche parallel verlaufende Zickzackform der Grenzschicht nur entlang der x-Richtung, aber jetzt ändert sich der Winkel zwischen zwei Ebenen mit einer gleichmäßigen Rate von 10° auf $-10°$ in 1.0 s. Nimm an, dass dies zu einer gleichmäßigen Verschiebungsrate der Position des Bildes führt. **[5]**

Betrachte ein Teleskop mit $D = 8$ cm und $f = 1$ m. Schätze die längste Belichtungszeit $t_{\max}$ ab, die für seine CCD-Kamera zulässig ist, so dass man nur ein einziges Bild erhält und jede mögliche Abweichung in der Position weniger als 1% des beugungsbegrenzten Durchmessers des Bildes bleibt.

(T10) Big-Bang-Nukleosynthese [35 Punkte]

Während der strahlungsdominierten Ära im frühen Universum verhielt sich der Skalenfaktor des Universums wie $a \propto t^{1/2}$, wobei t die Zeit seit dem Urknall ist. Während des größten Teils dieser Zeit befinden sich Neutronen (n) und Protonen (p) über schwache Wechselwirkungen im thermischen Gleichgewicht miteinander. Die Anzahldichte (N) der freien Neutronen oder Protonen hängt mit der Temperatur T und ihren entsprechenden Massen m zusammen, so dass

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_{\mathrm{B}}T}\right),$$

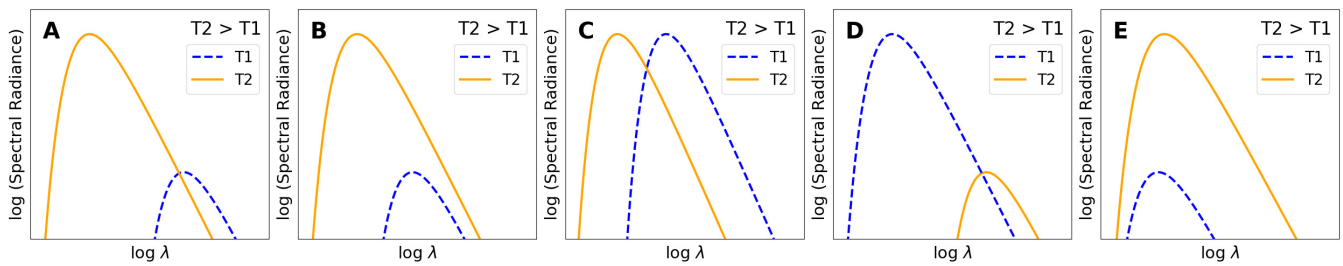
solange die Zeit $t \leq t_{\mathrm{wk}} = 1.70$ s, wenn $k_{\mathrm{B}}T \geq k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{wk}} = 800$ keV. Nach t_{wk} können die schwachen Wechselwirkungen dieses Gleichgewicht nicht mehr aufrechterhalten, und freie Neutronen zerfallen mit einer Halbwertszeit von 610.4 s in Protonen.

(T10.1) Die Anzahldichte der Protonen sei N_{p} und die der Neutronen sei N_{n}. Berechne die relative Häufigkeit von Neutronen, die durch das Verhältnis $X_{\mathrm{n,\,wk}} = N_{\mathrm{n}}/(N_{\mathrm{n}} + N_{\mathrm{p}})$ zur Zeit t_{wk} gegeben ist. **[4]**

(T10.2) Photonen verbleiben im thermischen Gleichgewicht und behalten zu allen Zeiten ein Schwarzkörperspektrum.

(T10.2a) Finde den Index β, so dass $T(a) \propto a^{\beta}$. **[2]**

(T10.2b) Ermittle, welches der folgenden Diagramme das richtige Verhalten der spektralen Energiedichte für zwei Temperaturen T_1 und T_2 zeigt. Hake (✓) die richtige Option auf dem zusammenfassenden Antwortbogen ab. **[2]**



(T10.3) Nach t_{wk} wird der Prozess der Bildung von Deuterium aus Protonen und Neutronen durch die von dem indischen Physiker Prof. Meghnad Saha aufgestellte Saha-Gleichung beschrieben, die vereinfacht werden kann zu

$$\frac{N_{\mathrm{D}}}{N_{\mathrm{n}}} = 6.5\eta\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m_{\mathrm{n}}c^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(m_{\mathrm{D}} - m_{\mathrm{p}} - m_{\mathrm{n}})c^2}{k_{\mathrm{B}}T}\right).$$

Hier ist das Baryon-zu-Photonen-Verhältnis $\eta = 6.1 \times 10^{-10}$, und N_{D} ist die Anzahldichte von Deuterium.

(T10.3a) Zeichne das Verhältnis $N_{\mathrm{D}}/N_{\mathrm{n}}$ auf dem Raster des zusammenfassenden Antwortbogens für mindestens 4 sinnvoll beabstandete Temperaturwerte ein, die im Bereich $k_{\mathrm{B}}T$ = [60, 70] keV liegen, und zeichne eine glatte Kurve, die durch diese Punkte verläuft. **[5]**

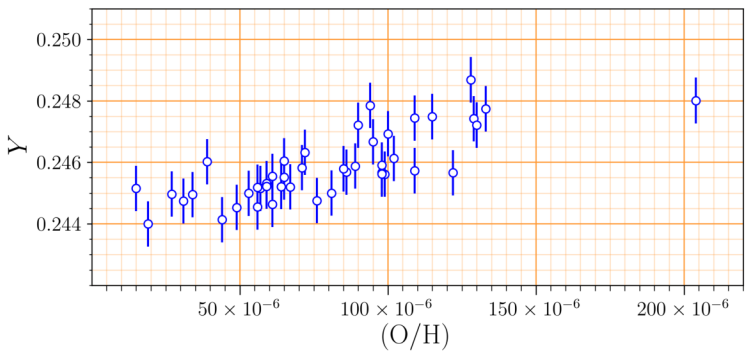
(T10.3b) Ermittle aus dieser Darstellung $k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{nuc}}$ (in keV), wenn $N_{\mathrm{D}} = N_{\mathrm{n}}$. **[1]**

(T10.3c) Stattdessen nehmen wir nun an, dass sich alle freien Neutronen sofort mit den Protonen bei $k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{nuc}}$ verbinden, um Deuterium zu bilden, das sofort in Helium umgewandelt wird ($^4_2$He). Berechne die entsprechende Epoche oder Zeit der Nukleosynthese, t_{nuc} (in s), für die Bildung von Helium. **[4]**

(T10.4) Berechne den Wert von $X_{\mathrm{n,\,nuc}}$ unmittelbar vor t_{nuc}. **[5]**

(T10.5) Die primordiale Heliumhäufigkeit, Y_{prim}, ist definiert als der Anteil an der gesamten baryonischen Masse im Universum, der unmittelbar nach t_{nuc} in Helium gebunden ist. Ermittle eine theoretische Schätzung für den Wert von Y_{prim}. Nimm nur für diese Rechnung an, dass $m_{\mathrm{p}} \approx m_{\mathrm{n}}$ und dass die Masse von Helium $m_{\mathrm{He}} \approx 4m_{\mathrm{n}}$. **[3]**

(T10.6) Die primordiale Heliumhäufigkeit ist sehr schwer zu messen, da die Sterne im Universum kontinuierlich Wasserstoff in Helium umwandeln. Das Ausmaß der Umwandlung durch Sterne in einer Galaxie wird durch die relative Anzahldichte von Sauerstoff (der nur von Sternen produziert wird) zu Wasserstoff in der Galaxie charakterisiert, bezeichnet als (O/H). Eine Zusammenstellung der Messungen von (O/H) und der Heliumhäufigkeit, Y, für verschiedene Galaxien ist unten aufgetragen.



Verwende alle Punkte in dieser Grafik (die auch auf dem zusammenfassenden Antwortbogen abgebildet ist), um die folgende Fragen zu beantworten.

(T10.6a) Schätze Y für eine blaue kompakte Zwerggalaxie mit einem Wert von (O/H)=1.75×10^{-4} ab. **[2]**

(T10.6b) Ermittle die Steigung $dY/d(\mathrm{O/H})$ der an die obigen Daten gefitteten Geraden. **[2]**

(T10.6c) Schätze die primordiale Heliumhäufigkeit, $Y_{\mathrm{prim}}^{\mathrm{obs}}$, basierend auf den obigen Beobachtungen ab. **[2]**

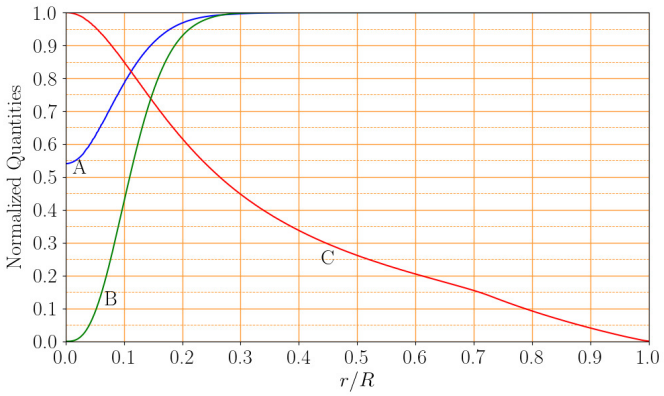
(T10.7) Die Abweichung zwischen Y_{prim} und $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ kann durch Änderung des Baryon-zu-Photonen-Verhältnisses η ausgeglichen werden. Wenn η verringert wird, wie durch $\downarrow$ im zusammenfassenden Antwortbogen angegeben, kennzeichne die Zunahme ($\uparrow$) oder Abnahme ($\downarrow$) von $N_{\text{D}}/N_{\text{n}}(T)$, T_{nuc} (wenn $N_{\text{D}} = N_{\text{n}}$), t_{nuc}, $X_{\text{n, nuc}}$ und Y_{prim} in den Kästchen auf dem Antwortbogen. **[3]**

(T11) Sterne durch Diagramme [50 Punkte]

Sterne können gut als kugelsymmetrische Objekte angenähert werden, und daher kann der radiale Abstand r vom Zentrum als einzige unabhängige Variable bei der Modellierung des Sterninneren gewählt werden. Die Masse, die in einer Kugel mit dem Radius r enthalten ist, wird mit $m(r)$ bezeichnet. Die Leuchtkraft $l(r)$ ist definiert als die Nettoenergie, die pro Zeiteinheit durch eine Kugeloberfläche mit dem Radius r nach außen fließt. Andere Größen von Interesse, z.B. die Dichte $\rho(r)$, die Temperatur $T(r)$, der Wasserstoffmassenanteil $X(r)$, der Heliummassenanteil $Y(r)$ und die pro Masseneinheit und Zeiteinheit erzeugte Kernenergie $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, werden als Funktionen von r betrachtet. Die Auswirkungen der Diffusion und der gravitativen Ablagerung von Elementen im Inneren des Sterns werden in diesem Problem vernachlässigt.

Das Symbol "log" bezieht sich auf den Logarithmus zur Basis 10. Die Aufgabe besteht aus drei unabhängigen Teilen.

(T11.1) **Teil 1: Das Innere eines Sterns**
Das nachstehende Diagramm zeigt die Variation von drei strukturellen Größen, A, B und C, als Funktionen des fraktionellen Radius r/R in einem Sternmodell der Masse 1 $\text{M}_\odot$ und des Alters 4 GYr , wobei R der Photosphärenradius des Sterns ist. Die Werte des Helium-Massenanteils an der (photosphärischen) Oberfläche, Y_{s}, und der Metallizität (Massenanteil aller Elemente, die schwerer sind als Helium) an der (photosphärischen) Oberfläche, Z_{s}, des Sterns sind gegeben durch (Y_{s}, Z_{s}) = (0.28, 0.02). Alle in den Diagrammen dargestellten Größen sind auf ihre jeweiligen Maximalwerte normiert.



(T11.1a) Identifiziere die drei Größen A, B und C eindeutig unter den fünf Möglichkeiten: **[6]**

$$T(r),\ l(r),\ \epsilon_{\text{nuc}}(r),\ X(r),\ Y(r).$$

(Schreibe A/B/C in die Kästchen neben den entsprechenden Größen auf dem zusammenfassenden Antwortbogen. Eine Begründung für Deine Antwort ist nicht erforderlich.)

(T11.1b) Wie hoch ist der Massenanteil von Helium, Y_{c}, im Zentrum des Sterns? **[3]**

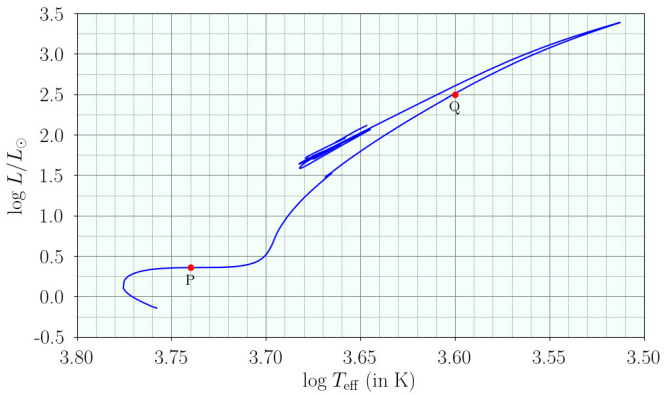
(T11.1c) **[5]**

Skizziere die beiden verbleibenden Größen aus der Fünferliste (die nicht als Kurven A, B oder C identifiziert wurden) aus (T11.1a) als Funktionen von r/R in dasselbe Diagramm auf dem zusammenfassenden Antwortbogen und beschrifte sie mit ihren jeweiligen Größen.

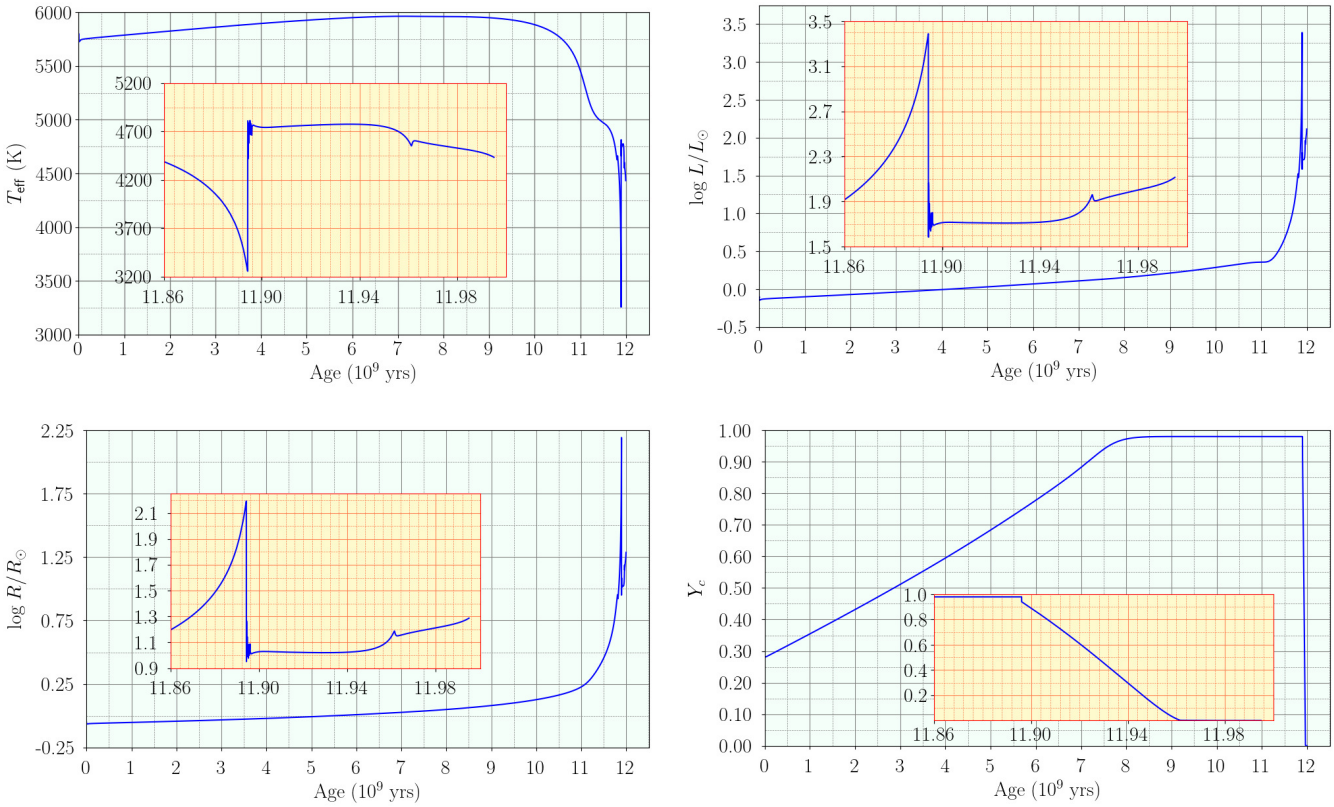
(T11.2) **Teil 2: Sternentwicklung**

Betrachte die Entwicklung eines $1\mathrm{M}_\odot$ Sterns, dessen anfänglich einheitliche Zusammensetzung durch die Massenanteile von Helium, $Y_0 = 0.28$, und Metallen, $Z_0 = 0.02$, gegeben ist. Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Variation verschiedener globaler Größen dieses Sterns während seiner Entwicklung von der ZAMS (Zero Age Main Sequence) bis zum Ende des Heliumbrennens in seinem Kern.

Die nachstehende Grafik zeigt den Entwicklungsverlauf des Sterns im HR-Diagramm (Darstellung von $\log L/L_\odot$ über $\log T_{\mathrm{eff}}$, wobei L die Oberflächenleuchtkraft und T_{eff} die effektive Temperatur ist).



Die folgende Abbildung zeigt vier Diagramme, die die Veränderung von T_{eff} (in K), L (aufgetragen als $\log L/L_\odot$), R (aufgetragen als $\log R/R_\odot$) und Y_{c} mit dem Alter (in 10^9 yr) des gleichen Sterns darstellen. In jedem dieser vier Diagramme zeigen die Einschübe die Veränderungen der jeweiligen Größen im Detail zwischen dem Alter von 11.86×10^9 Jahren und 12.00×10^9 Jahren, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen.



Verwende diese Diagramme, um die folgenden Fragen zu beantworten.

(T11.2a) Wie hoch ist die ungefähre Lebensdauer des Sterns in der Hauptreihe, $t_{\rm MS}$ (in Jahren)? **[1]**

(T11.2b) Wie lang ist die ungefähre Dauer, $\Delta t_{\rm He}$ (in Jahren), für die der Stern Helium in seinem Kern verbrennt? **[1]**

(T11.2c) Welcher Bruchteil, $f_{\rm H}$, der anfänglichen Wasserstoffmenge in seinem Zentrum ist verbrannt, wenn die Leuchtkraft des Sterns 1 $\rm L_\odot$ beträgt? **[3]**

(T11.2d) Wie groß ist der Radius des Sterns, R_1 (in Einheiten von $\rm R_\odot$), wenn 60% der anfänglichen Wasserstoffmenge in seinem Zentrum verbrannt ist? **[3]**

(T11.2e) Wie groß sind die Radien des Sterns, $R_{\rm P}$ und $R_{\rm Q}$ (in Einheiten von $\rm R_\odot$), die seinen Positionen P bzw. Q entsprechen, wie sie im HR-Diagramm markiert sind? **[4]**

(T11.3) Teil 3: Massenverteilung im Inneren eines Sterns

Die Gleichung, die die Verteilung der Masse im Inneren eines Sterns bestimmt, lautet

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Es wäre praktisch, diese Gleichung in Form von drei dimensionslosen Variablen auszudrücken, nämlich der Teilmasse q, dem Teilradius x, und der relativen Dichte, σ, die wir als

$$q = m/M \qquad x = r/R \qquad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

definieren, wobei M und R die Gesamtmasse bzw. der Radius des Sterns sind, und $\bar{\rho} \equiv \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ die mittlere Dichte des Sterns ist. Für den speziellen Stern, den wir in diesem Teil betrachten werden, sind die folgenden Informationen gegeben:

- Die zentrale Dichte $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$

- Die Hälfte der Masse des Sterns ist in den inneren 25 % seines Gesamtradius enthalten, und 70 % seiner Masse sind in den inneren 35 % seines Gesamtradius enthalten.

In allen folgenden Teilen dieser Frage genügt es, alle abgeleiteten numerischen Koeffizienten auf 0.005 abzurunden.

(T11.3a) Drücke die obige Gleichung, die die Abhängigkeit der Masse vom Radius beschreibt, in Form von x, $\frac{dq(x)}{dx}$ und $\sigma(x)$ aus. **[2]**

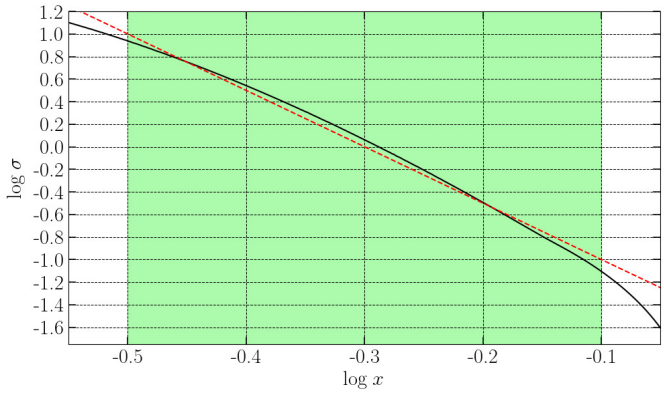
Um die Verteilung der Masse mit dem Radius zu erhalten, müssen wir das Dichteprofil im Inneren des Sterns kennen. Für dieses Problem werden wir die Variation der Dichte mit dem Radius durch Näherungsformen in zwei Bereichen von x beschreiben:

- der innere Teil des Sterns: $0 \leq x \leq 0.32$
- der mittlere Teil des Sterns: $0.32 < x < 0.80$

Für den äußersten Teil des Sterns, d.h. $0.80 \leq x \leq 1.00$, wird keine Näherung vorgenommen.

(T11.3b) **Näherung für den mittleren Teil**:

Der Verlauf von $\log \sigma$ in Abhängigkeit von $\log x$ im mittleren Teil des Sterns ist in der nachstehenden Grafik dargestellt (schwarze Kurve). Für $\log \sigma$ als Funktion von $\log x$ im Bereich $-0.5 < \log x < -0.1$, d.h. $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (dargestellt durch den grün schattierten Bereich), nehmen wir eine lineare Näherung vor (als gestrichelte rote Linie im Diagramm). Außerdem nähern wir die Steigung dieser Gerade durch die nächstliegende ganze Zahl.



Verwende diese Näherung, um einen Ausdruck für $\sigma(x)$ als Funktion von x im Bereich $0.32 < x < 0.80$ zu schreiben. **[4]**

(T11.3c) Leite mit dem Ergebnis von (T11.3b) einen Ausdruck für $q(x)$ im Bereich $0.32 < x < 0.80$ her. **[6]**

(T11.3d) **Näherung für den inneren Teil**:

Im inneren Teil des Sterns ($0 \leq x \leq 0.32$) kann die Dichte als lineare Funktion des Radius angenähert werden, d.h. $\sigma(x) = Ax + B$, wobei A, B Konstanten sind. Bestimme A und B und ermittle so einen Ausdruck für $q(x)$ im Bereich $0 \leq x \leq 0.32$. Es ist zu beachten, dass die im vorhergehenden Teil und in diesem Teil verwendeten Näherungen zu kleinen Unstetigkeiten in der Dichte oder Masse bei $x = 0.32$ führen können. **[8]**

(T11.3e) Die in den Teilen (T11.3c) und (T11.3d) erhaltenen Ausdrücke für $q(x)$ sind Näherungen, die die Variation der Masse mit dem Radius recht gut beschreiben, allerdings nur in bestimmten Regionen des Sterns. Für den Bereich $0.80 \leq x \leq 1$ (für den wir keinen Ausdruck abgeleitet haben) ist es möglich, eine geeignete Extrapolation aus der Nachbarregion zu verwenden. Verwende diese Näherungsausdrücke und die gegebenen Daten, um eine glatte Kurve (ohne Unstetigkeiten in $q(x)$ oder der Ableitung von $q(x)$) für $q(x)$ über x für den gesamten Stern ($0 \leq x \leq 1$) zu skizzieren, die die Veränderung der Masse mit dem Radius darstellt. **[4]**

(T12) Hawking-Strahlung von Schwarzen Löchern **[50 Mark]**

(T12.1) Ein Schwarzes Loch (Black Hole, BH) entsteht in der Regel durch einen Gravitationskollaps am Ende des Lebenszyklus eines massereichen Sterns zu einem Punkt, der Singularität genannt wird. Aufgrund der extremen Schwerkraft eines solchen Objekts kann nichts, was in den so genannten Ereignishorizont (eine Kugeloberfläche mit $r = R_{\mathrm{SC}}$, wobei r die Entfernung von der Singularität ist) eintritt, aus diesem entkommen. Hier wird R_{SC} als Schwarzschildradius bezeichnet.

(T12.1a) **Modellierung des Ursprungs der Hawking-Strahlung:** Betrachten wir ein Teilchenpaar, jedes mit Masse m, das auf beiden Seiten des BH-Horizonts entsteht. Ein Teilchen befindet sich etwas außerhalb des Horizonts bei $r \approx R_{\mathrm{SC}}$, während sich das andere Teilchen innerhalb des Horizonts bei $r = \kappa R_{\mathrm{SC}}$ befindet. Nimm an, dass die Gesamtenergie eines Teilchens die Summe seiner Ruhemassenenergie mc^2 und der potenziellen Gravitationsenergie aufgrund des BH ist.

Bestimme den Wert von κ, bei dem das Teilchenpaar eine Gesamtenergie von Null hat. **[4]**

(T12.1b) **Temperatur eines Schwarzen Lochs:** Wenn das Teilchen, das bei dem obigen Prozess außerhalb des Horizonts erzeugt wird, über genügend kinetische Energie verfügt, kann es dem BH in einem Prozess, der Hawking-Strahlung genannt wird, entkommen. Das Teilchen innerhalb des Horizonts, das eine negative Energie hat, wird absorbiert und verringert die Masse des BHs.

Nimm an, dass die gesamte Hawking-Strahlung aus Photonen besteht, deren Spektrum dem eines Schwarzen Körpers entspricht, dessen Maximum bei einer Wellenlänge von $\lambda_{\mathrm{bh}} \approx 16 R_{\mathrm{SC}}$ liegt. Es ist bekannt, dass für ein BH von einer Sonnenmasse $R_{\mathrm{SC},\odot} = 2.952\,\mathrm{km}$ beträgt.

Ermittele einen Ausdruck für die Temperatur T_{bh} des BH, die dieser Schwarzkörperstrahlung entspricht, in Abhängigkeit von seiner Masse (M_\text{bh}\) und physikalischen Konstanten. Berechne den Schwarzschildradius $R_{\mathrm{SC},\,10\odot}$ und die Temperatur $T_{\mathrm{bh},\,10\odot}$ für ein BH mit der Masse $10\,\mathrm{M}_\odot$. **[4]**

(T12.1c) **Massenverlust eines Schwarzen Lochs:** Nimm an, dass die Hawking-Strahlung aus dem Ereignishorizont heraus emittiert wird.

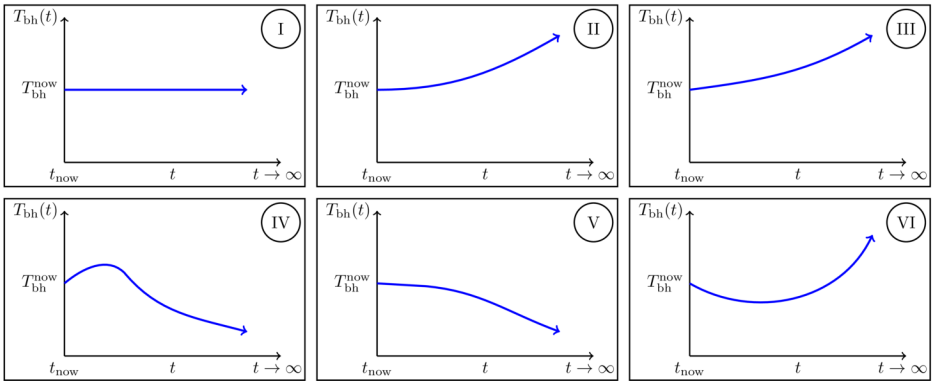
Ermittele unter Verwendung der Masse-Energie-Äquivalenz einen Ausdruck für die Rate des Massenverlustes, $dM_{\mathrm{bh}}(t)/dt$, in Abhängigkeit von der Masse $M_{\mathrm{bh}}(t)$ des BH und physikalischen Konstanten.

Ermittele damit einen Ausdruck für $M_{\mathrm{bh}}(t)$ für ein BH mit der Anfangsmasse M_0. Skizziere $M_{\mathrm{bh}}(t)$ als Funktion von t von $M_{\mathrm{bh}} = M_0$ bis $M_{\mathrm{bh}} = 0$. **[8]**

(T12.1d) **Lebensdauer eines Schwarzen Lochs:** Ermittle einen Ausdruck für die Lebensdauer τ_{BH}, bei der ein Schwarzes Loch mit der Anfangsmasse M_0 aufgrund von Hawking-Strahlung vollständig verdampft, in Abhängigkeit von M_0 und physikalischen Konstanten. Berechne die Lebensdauer $\tau_{\mathrm{bh},10\odot}$ (in Sekunden) für ein Schwarzes Loch mit $M_0 = 10\,\mathrm{M}_\odot$. **[3]**

(T12.1e) **Schwarzes Loch in einem CMB-Strahlungsbad:** Betrachte ein isoliertes Schwarzes Loch im Weltraum, weit entfernt von anderen Körpern, mit einer aktuellen Temperatur $T_{\text{bh}}^{\text{now}}$, umgeben vom kosmischen Mikrowellenhintergrund (CMB) mit einer aktuellen Temperatur $T_{\text{cmb}}^{\text{now}} = 2.7$ K. Das Schwarze Loch kann an Masse gewinnen, indem es CMB-Strahlung absorbiert, und seine Masse durch Hawking-Strahlung verlieren.

Berücksichtige die beschleunigte Expansion des Universums und bestimme, welche der folgenden Abbildungen die langfristige zeitliche Entwicklung von T_{bh} in den drei gegebenen Fällen korrekt darstellt:
(X) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} > T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$, (Y) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} = T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$, (Z) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} < T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$.



Gib deine Antwort an, indem du in der Tabelle in der Zusammenfassung des Antwortbogens jeweils genau ein Kästchen für die Fälle X, Y und Z entsprechend der Abbildungsnummer, die deiner Einschätzung nach zutrifft, ankreuzt. **[6]**

(T12.2) Primordiale Schwarze Löcher (Primordial Black Holes = PBHs) mit sehr viel geringerer Masse konnten sich im sehr frühen Universum bilden. Alle folgenden Fragen beziehen sich auf PBHs. Dabei können alle Prozesse, die die Masse des Schwarzen Lochs erhöhen, vernachlässigt werden.

(T12.2a) **PBH, die in der gegenwärtigen Epoche verdampfen:** Wie man aus den vorherigen Antworten entnehmen kann, würden Schwarze Löcher mit einer Sonnenmasse sehr lange benötigen, um zu verdampfen. Da PBHs jedoch eine viel geringere Masse haben können, können wir sie eventuell in der heutigen Zeit verdampfen sehen.

Ermittle die anfängliche Masse $M_{0,\,\text{PBH}}$ (in kg), den Schwarzschildradius $R_{\text{SC},\,\text{PBH}}$ (in m) und die Temperatur T_{PBH} (in K) eines Schwarzen Lochs, das zum gegenwärtigen Zeitpunkt möglicherweise vollständig verdampft, d.h. eines mit einer Lebensdauer $\tau_{\text{PBH}} = 14$ Milliarden Jahren. **[4]**

(T12.2b) **Bildung eines PBH**: Im strahlungsdominierten frühen Universum wächst der Skalenfaktor wie $a(t) \sim t^{1/2}$. In dieser Ära bilden sich PBHs durch den Kollaps der gesamten Energie, die in einer Region der physischen Ausdehnung ct enthalten ist, wobei t das Alter des Universums zu diesem Zeitpunkt beschreibt.

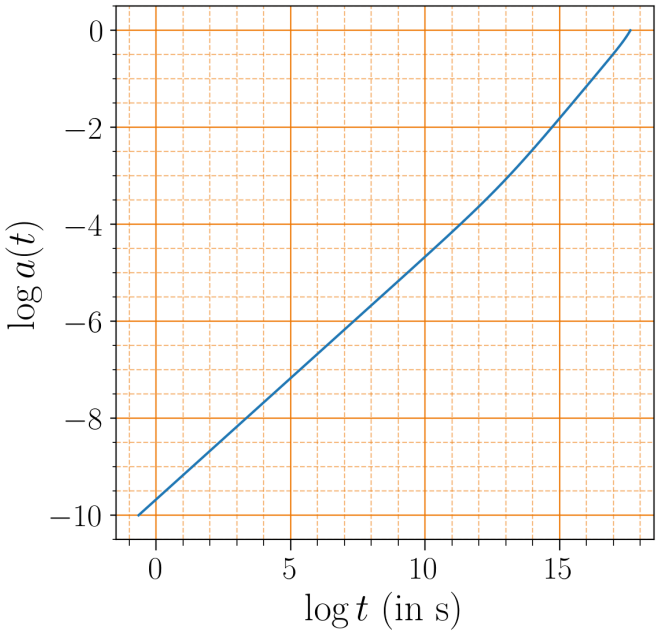
Ein PBH mit einer Masse von 1×10^{12} kg bildet sich, wenn das Alter des Universums etwa 1×10^{-23} s beträgt. Berechne das Alter des Universums, t_{20}, wenn sich ein PBH der Masse 1×10^{20} kg bildet. **[6]**

(T12.2c) **Beobachtetes Spektrum der Hawking-Strahlung von PBH:** Betrachte ein PBH mit einer Anfangsmasse von 1×10^{10} kg, das am Ende seiner Lebensdauer τ_{PBH} vollständig verdampft. Für diesen Teil nehmen wir der Einfachheit halber an, dass der größte Teil der Hawking-Strahlung zu diesem Zeitpunkt emittiert wird, und zwar mit einer Temperatur, die seiner Anfangsmasse entspricht. Nimm außerdem an, dass sich der Skalenfaktor des Universums wie $a(t) \sim t^{2/3}$ entwickelt.

Berechne die Wellenlänge, λ_{earth}, des Maximums dieser Hawking-Strahlung, wie sie in der gegenwärtigen Epoche ($t = 14$ Milliarden Jahre) auf der Erde beobachtet wird. **[5]**

(T12.2d) **Hochenergetische kosmische Strahlung von PBH:** Nimm nun an, dass die zu einem bestimmten Zeitpunkt t emittierte Hawking-Strahlung aus Photonen mit einer Energie $k_B T_{bh}(t)$ besteht. Außerdem entspricht die höchstmögliche Temperatur für ein Schwarzes Loch der Planck-Temperatur T_{Planck}, wobei $k_B T_{Planck} = 1 \times 10^{19}$ GeV beträgt.

Die Entwicklung des Skalenfaktors über relevante Zeitskalen ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Der Skalenfaktor wird heute auf Eins gesetzt. $t(s)$ auf der Zeitachse stellt das Alter des Universums in Sekunden dar.



Bestimme den größtmöglichen und den kleinstmöglichen Wert der Anfangsmasse des PBH M_0^{max} bzw. M_0^{min}, das für ein Photon mit einer auf der Erde beobachtete Energie von $E_{det} = 3.0 \times 10^{20}$ eV verantwortlich sein könnte. **[10]**