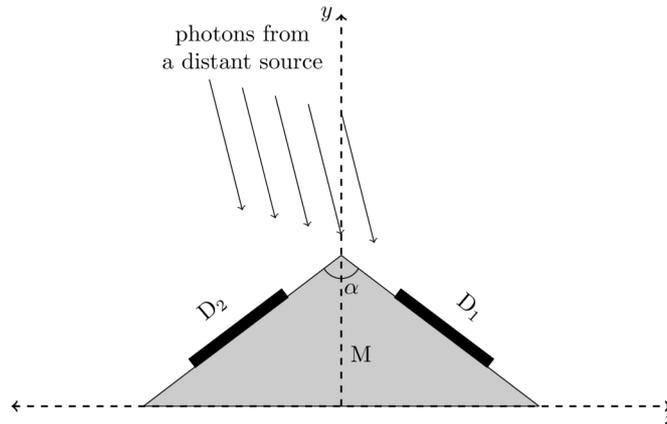


(T01) Mission Daksha

[10 points]

« Daksha » est une mission indienne proposée, composée de deux satellites S_1 et S_2 orbitant autour de la Terre sur la même orbite circulaire de rayon $r = 7\,000$ km, mais avec un déphasage de 180° . Ces satellites observent l'univers dans le domaine des hautes énergies (rayons X et γ). Chacun des satellites de Daksha utilise plusieurs détecteurs rectangulaires plats.

Pour comprendre comment localiser une source dans le ciel, on utilise un modèle simplifié de la mission Daksha. On suppose que S_1 ne possède que deux détecteurs identiques D_1 et D_2 , chacun d'une surface $A = 0,50$ m², fixés à une monture opaque M comme illustré sur la figure ci-dessous. Les détecteurs sont disposés symétriquement autour de l'axe y dans des plans perpendiculaires au plan $x - y$ et forment un angle $\alpha = 120^\circ$ entre eux.



- (T01.1) Lors de l'observation d'une source distante située dans le plan $x - y$, le détecteur D_1 enregistre une puissance $P_1 = 2,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ et le détecteur D_2 enregistre une puissance $P_2 = 4,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹.

Estimer l'angle η formé par le vecteur de position de la source avec l'axe y positif, l'angle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre par rapport à l'axe y positif étant considéré comme positif. **[5]**

On considère une impulsion unique provenant d'une source distante (pas nécessairement dans le plan $x - y$) enregistrée par les deux satellites (S_1 et S_2) de Daksha. Les temps des pics des impulsions enregistrées par S_1 et S_2 sont respectivement t_1 et t_2 .

- (T01.2) Si $t_1 - t_2$ a été mesuré à $10,0 \pm 0,1$ ms, déterminer alors la fraction, f , de la sphère céleste où la source pourrait se trouver. **[5]**

(T02) Makar-Sankranti

[10 points]

La fête de « Makar-Sankranti » est célébrée en Inde lorsque le Soleil semble entrer dans la région zodiacale du Capricorne (Makar = Capricorne, Sankranti = entrée) vue de la Terre. Elle est actuellement célébrée chaque année autour du 14 janvier. Autrefois, cette fête coïncidait également avec le solstice d'hiver dans l'hémisphère nord, que l'on suppose avoir lieu le 21 décembre.

- (T02.1) Sur la base des informations ci-dessus, trouver l'année, y_c , où la célébration de ce festival a coïncidé pour la dernière fois avec le solstice d'hiver dans l'hémisphère nord. **[3]**
- (T02.2) Si le Soleil semble entrer dans la région zodiacale du Capricorne à l'heure locale de 11:50:13 le 14 janvier 2006 à Mumbai, calculer la date, D_{enter} , et l'heure locale, t_{enter} , de son entrée en Capricorne en l'an 2013. **[3]**
- (T02.3) Le festival Makar-Sankranti est célébré à un endroit précis le jour du premier coucher de soleil dans la région zodiacale du Capricorne. On peut supposer que l'heure locale du coucher du soleil à Mumbai en janvier est 18:30:00.

Indiquer la date de célébration de la fête chaque année entre 2006 et 2013 (en cochant (✓) la case [4] correspondante dans le tableau donné dans la feuille de réponses récapitulative).

(T03) Ondes gravitationnelles

[15 points]

Les trous noirs binaires en orbite génèrent des ondes gravitationnelles. On considère deux trous noirs de notre galaxie, de masses $M = 36 M_{\odot}$ et $m = 29 M_{\odot}$, tournant sur des orbites circulaires de fréquence angulaire orbitale ω autour de leur centre de masse.

(T03.1) En supposant une gravité newtonienne, déduire une expression pour la fréquence angulaire, ω_{ini} , des orbites des trous noirs à un instant, t_{ini} , lorsque la séparation entre les trous noirs était 4,0 fois la somme de leurs rayons de Schwarzschild, en fonction uniquement de M , m et de constantes physiques.

Calculer la valeur de ω_{ini} (en rad s^{-1}).

[5]

(T03.2) En relativité générale, les trous noirs en orbite émettent des ondes gravitationnelles de fréquence f_{GW} , telle que $2\pi f_{GW} = \omega_{GW} = 2\omega$. Cela rétrécit les orbites des trous noirs, ce qui augmente à son tour f_{GW} . Le taux de variation de f_{GW} est

$$\frac{df_{GW}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{GW}^{\delta/3},$$

où $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ est appelée la « masse chirp ».

Trouver les valeurs de α , β et δ .

[4]

(T03.3) On suppose que les ondes gravitationnelles associées à l'événement ont été détectées pour la première fois à l'instant $t_{ini} = 0$. [6]

Déduire une expression pour le temps observé de fusion des trous noirs, t_{merge} , lorsque f_{GW} devient très grand, en termes de ω_{ini} , M_{chirp} et de constantes physiques uniquement. Calculer la valeur de t_{merge} (en secondes).

(T04) Décrément de Balmer

[15 points]

On considère une étoile de la séquence principale entourée d'une nébuleuse. La magnitude observée de l'étoile dans la bande V est de 11,315 mag. La région ionisée de la nébuleuse proche de l'étoile émet des raies $H\alpha$ et $H\beta$; leurs longueurs d'onde sont respectivement de $0,6563 \mu\text{m}$ et $0,4861 \mu\text{m}$. Le rapport théoriquement prédit des flux dans les raies $H\alpha$ et $H\beta$ est $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2,86$. Cependant, lorsque ce rayonnement traverse la partie extérieure de la nébuleuse froide et poussiéreuse, les flux d'émission observés des raies $H\alpha$ et $H\beta$ sont respectivement de $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ et $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

L'extinction A_{λ} est une fonction de la longueur d'onde et s'exprime comme

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Ici, $\kappa(\lambda)$ est la courbe d'extinction et $E(B - V)$ désigne l'excès de couleur dans les bandes B et V. La courbe d'extinction (avec λ en μm) est donnée comme suit.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2,659 \times \left(-1,857 + \frac{1,040}{\lambda}\right) + R_V, & 0,63 \leq \lambda \leq 2,20 \\ 2,659 \times \left(-2,156 + \frac{1,509}{\lambda} - \frac{0,198}{\lambda^2} + \frac{0,011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0,12 \leq \lambda < 0,63 \end{cases}$$

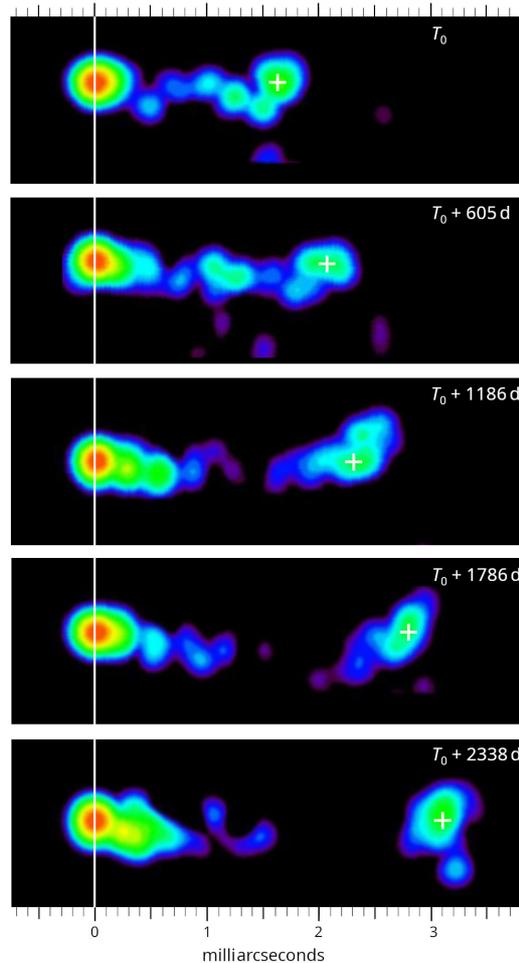
où, $R_V = A_V/E(B - V) = 3,1$ est le rapport entre l'extinction totale et l'extinction sélective.

- (T04.1) Trouver les valeurs de $\kappa(H\alpha)$ et $\kappa(H\beta)$. [3]
- (T04.2) Trouver la valeur du rapport d'excès de couleur $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$. [4]
- (T04.3) Estimer l'extinction due à la nébuleuse, $A_{H\alpha}$ et $A_{H\beta}$, aux longueurs d'onde respectives $H\alpha$ et $H\beta$. [6]
- (T04.4) Estimer l'extinction de la nébuleuse (A_V) et la magnitude apparente de l'étoile dans la bande V, m_{V0} , en l'absence de la nébuleuse. [2]

(T05) Quasars

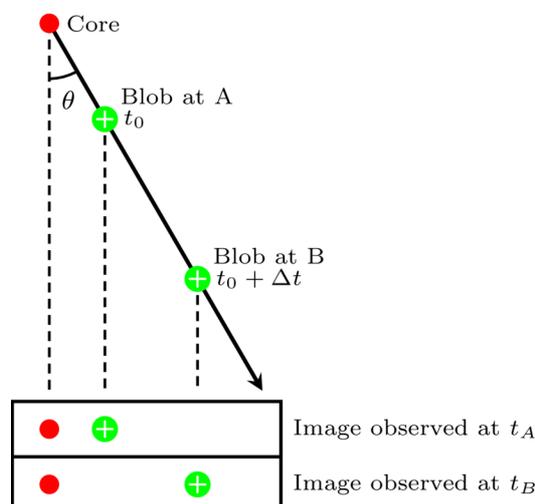
[20 points]

Un quasar est une galaxie active extrêmement lumineuse, alimentée par un trou noir supermassif émettant des jets relativistes. La figure montre une série d'images radio d'un quasar (avec un décalage vers le rouge $z = 0,53$ et une distance de luminosité $D_L = 1,00 \times 10^{10}$ al à différents instants). Le « noyau » est aligné sur la ligne blanche verticale, tandis qu'un jet, constitué d'une « goutte » (marquée en blanc +), s'en éloigne au fil du temps. Chaque image indique l'heure d'observation en jours (à partir de T_0 pour la première image), et l'échelle angulaire est indiquée en haut et en bas de la figure.



- (T05.1) Déterminer la séparation angulaire de la goutte, ϕ_{blob} (en millisecondes d'arc), et sa distance transversale, l_{blob} (en années-lumière), par rapport au noyau du quasar pour chaque observation. [5]
Calculer ensuite la vitesse apparente de la goutte dans la direction transversale (v_{app}) comme une fraction de la célérité de la lumière, $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ en utilisant des observations consécutives. Calculer également la vitesse apparente moyenne $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ sur toute la période d'observation.

Le jet du quasar se déplace en réalité à une vitesse relativiste $v \equiv \beta c$, mais pas nécessairement dans le plan du ciel ; par exemple, il forme un angle θ (l'« angle de vue ») par rapport à la ligne de visée d'un observateur distant (indiqué par les lignes pointillées), comme le montre le schéma ci-dessous.
Pour cette partie et toutes les parties suivantes, on ignore le décalage vers le rouge du quasar et tous les effets relativistes.



- (T05.2) La lumière émise par la goutte à deux instants différents t_0 (correspondant à la position A) et $t_0 + \Delta t$ (correspondant à la position B) atteint l'observateur respectivement à t_A et t_B . La différence de temps observée est donc $\Delta t_{app} = t_B - t_A$.
- (T05.2a) Trouver une expression pour le rapport $\frac{\Delta t_{app}}{\Delta t}$ en fonction de β and θ . [2]
- (T05.2b) En utilisant ce rapport, exprimer β_{app} en fonction de β et θ . [2]
- (T05.3) Le mouvement est dit supraluminique si la vitesse apparente dépasse celle de la lumière ($\beta_{app} > 1$), et subluminique si elle ne la dépasse pas ($\beta_{app} < 1$).
- (T05.3a) Pour $\beta_{app} = 1$, tracer une courbe lissée de β en fonction de θ pour marquer la limite [4]
entre les mouvements subluminiques et supraluminiques. Colorier la région supraluminique du graphique avec des lignes obliques (///).
- (T05.3b) Trouver la vitesse réelle du jet la plus basse ($\beta_{low} = v_{low}/c$) pour que le mouvement [2]
supraluminique se produise ainsi que son angle d'orientation correspondant θ_{low} .
- (T05.4) Trouver une expression pour l'angle de vue maximal, θ_{max} , pour lequel une valeur donnée de [2]
 β_{app} sera possible.

Le noyau d'un quasar, son objet compact central, présente une variabilité d'émission due à des processus internes se produisant dans une région causalement connectée. La taille (= rayon) de cette région est généralement estimée à environ cinq fois le rayon de Schwarzschild du noyau.

- (T05.5) On a constaté que le noyau d'un certain quasar varie sur des échelles de temps d'environ 1 h. [3]
Obtenir une limite supérieure, $M_{c, max}$, de la masse de l'objet compact central, en unités de masse solaire.

(T06) Rotation galactique

[20 points]

La courbe de rotation de notre galaxie est déterminée à l'aide de mesures de vitesse radiale de nuages d'hydrogène neutre (HI) le long de diverses longitudes galactiques, observées à travers la raie HI à 21 cm. On considère un nuage HI de longitude galactique l , situé à une distance R du centre galactique (GC) et à une distance D du Soleil. On considère que le Soleil est à une distance $R_0 = 8,5$ kpc du GC. On suppose que le Soleil et le nuage HI sont tous deux sur des orbites circulaires autour du GC dans le plan galactique, avec des vitesses angulaires Ω_0 et Ω , et des vitesses de rotation respectives V_0 et V .

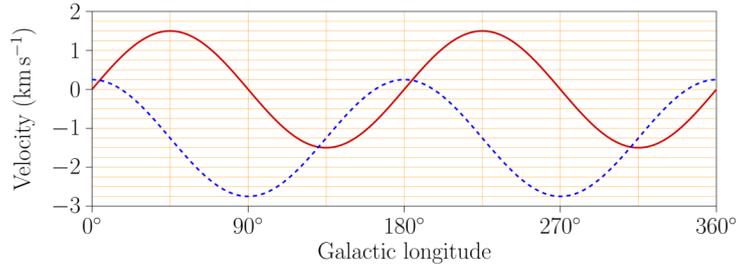
Les composantes de la vitesse radiale (V_r) et de la vitesse transversale (V_t) du nuage, observées depuis le Soleil, peuvent être exprimées comme

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D.$$

Vue du pôle Nord galactique, la rotation galactique s'effectue dans le sens horaire. Dans ce problème, on considère la vitesse radiale comme positive lors du recul et les nuages seront traités comme des objets ponctuels.

- (T06.1) Dans le graphique fourni sur la feuille de réponses récapitulative, tracer V_r en fonction de D de [5]
 $D = 0$ à $D = 2R_0$ pour deux axes de visée définis par (i) $l = 45^\circ$ et (ii) $l = 135^\circ$. Nommer chacune des droites/courbes avec la valeur de l .
- (T06.2) Le graphique ci-dessous montre les composantes de vitesse radiale moyenne (courbe continue, rouge) et transversale (courbe en pointillés, bleue) des étoiles à une distance de 100 pc du Soleil, tracées en fonction de la longitude galactique.



A l'aide du graphique, estimer la période orbitale du Soleil (P) autour du GC en méga-années [3] (Myr).

(T06.3) Jan Oort a noté que dans le voisinage solaire ($D \ll R_0$), la différence des vitesses angulaires ($\Omega - \Omega_0$) sera faible, et a donc déduit l'approximation du premier ordre suivante pour la ligne de visée et les composantes de vitesse transversale :

$$\begin{aligned} V_r &= AD \sin 2l \\ V_t &= AD \cos 2l + BD \end{aligned}$$

où A et B sont connues comme les constantes d'Oort.

On considère deux cas :

(I) la courbe de rotation réelle observée de la galaxie, et

(II) la courbe de rotation correspond à un scénario hypothétique dans lequel la galaxie est dépourvue de matière noire et la masse entière de la galaxie est supposée être concentrée en son centre.

(T06.3a) Déduire les expressions du gradient radial de la vitesse de rotation à l'emplacement du Soleil, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$, pour les deux cas. [2]

(T06.3b) Exprimer A et B en fonction de V_0 , R_0 , et du gradient radial de la vitesse de rotation à l'emplacement du Soleil, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$. [8]

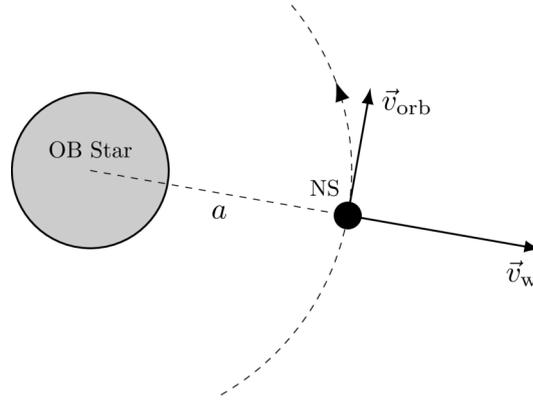
(T06.3c) Le rapport (A/B) des constantes d'Oort pour les deux cas donnés, (I) et (II), est défini comme F_I et F_{II} , respectivement. Déterminer F_I et F_{II} . [2]

(T07) Étoile à neutrons binaire

[20 points]

Dans un système binaire comprenant une étoile compacte, où l'étoile compagnon ne déborde pas de son lobe de Roche, la principale source d'accrétion de l'étoile compacte est le vent stellaire de l'étoile compagnon. Cette accrétion, alimentée par le vent, est particulièrement importante dans les systèmes comprenant une étoile de type précoce (comme une étoile O ou B, désignée ci-après par étoile OB), aux côtés d'un objet compact comme une étoile à neutrons (NS) en orbite rapprochée.

On considère un système binaire d'étoiles NS-OB où une étoile à neutrons de masse $M_{NS} = 2,0 M_\odot$ et de rayon $R_{NS} = 11 \text{ km}$ orbite sur une orbite circulaire de rayon a autour du centre de l'étoile OB avec une vitesse $v_{orb} = 1,5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (voir figure ci-dessous). Tout au long de ce problème, la perte de masse de l'étoile OB est supposée sphériquement symétrique et son taux est $\dot{M}_{OB} = 1,0 \times 10^{-4} M_\odot \text{ an}^{-1}$.



- (T07.1) Le rayon d'accrétion, R_{acc} , est défini comme la distance maximale de la NS à laquelle le vent stellaire peut être capturé par la NS. Si la vitesse du vent stellaire à la distance orbitale de la NS est $v_w = 3,0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, trouver R_{acc} pour le système ci-dessus en km en utilisant le calcul standard de la vitesse de libération. [3]
- (T07.2) En supposant que toute la matière capturée est accrétée par la NS, estimer le taux d'accrétion de masse, \dot{M}_{acc} , du vent stellaire sur la NS en unités de $M_{\odot} \text{ an}^{-1}$ si $a = 0,5 \text{ ua}$. Négliger les effets de la pression de radiation et du temps de refroidissement fini du gaz accrétant. [3]
- (T07.3) On considère maintenant la situation où la vitesse du vent stellaire à la distance orbitale a (près de la NS) devient comparable à la vitesse orbitale de la NS. Le taux d'accrétion de masse du vent stellaire sur la NS serait alors donné par une expression de la forme $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} f(\tan \beta; q)$, où $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$ est le rapport de masse de l'étoile binaire et β est l'angle dans le référentiel de la NS entre la direction de la vitesse du vent et la direction radiale depuis l'étoile OB. Déterminer l'expression de $f(\tan \beta; q)$ en supposant $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$. [6]
- (T07.4) On considère que le matériau entièrement ionisé s'accrète radialement et est gêné par le fort champ magnétique \vec{B} de la NS. Cet effet peut être modélisé par une pression, donnée par $\frac{B^2}{2\mu_0}$. On supposera que la NS possède un champ magnétique dipolaire dont l'amplitude dans le plan équatorial varie avec la distance r de la NS pour $r \gg R_{\text{NS}}$ comme

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

où B_0 est le champ magnétique à l'équateur de la NS. On suppose que l'axe du dipôle magnétique est aligné avec l'axe de rotation de la NS.

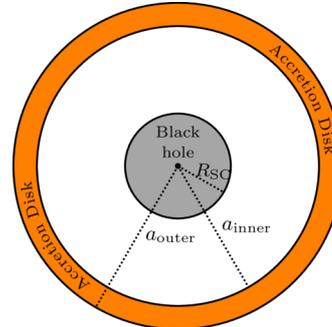
- (T07.4a) Obtenir la pression magnétique, $P_{\text{eq, mag}}$, dans le plan équatorial en fonction de B_0 , R_{NS} , r et d'autres constantes appropriées. [1]
- (T07.4b) La distance maximale à laquelle le flux d'accrétion est arrêté par le champ magnétique à l'équateur est appelée rayon magnétosphérique R_m . Ce flux de matière exerce une pression due au mouvement relatif entre le vent stellaire incident et la surface stellaire. Obtenir une expression approximative du champ magnétique critique $B_{0, c}$ pour lequel R_m coïncide avec R_{acc} et calculer sa valeur en Tesla. Les effets magnétiques sont négligés pour $r > R_m$ et considérer $v_w \gg v_{\text{orb}}$. [7]

(T08) L'ombre d'un trou noir

[20 points]

L'Event Horizon Telescope (EHT) a publié une image du trou noir supermassif au centre de la galaxie M87, comme le montre la partie gauche de la figure ci-dessous.

Pour comprendre certaines caractéristiques simples de cette image, on considère un modèle simplifié d'un trou noir non rotatif, statique et à symétrie sphérique, de masse $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$, entouré d'un disque d'accrétion plan, mince et sans masse, de rayons intérieur et extérieur, $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ et $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, respectivement, où R_{SC} est le rayon de Schwarzschild. Une vue de face est présentée dans la partie de droite de la figure ci-dessous (la figure n'est pas à l'échelle).



On suppose que le disque d'accrétion est la seule source de lumière à considérer. Chaque point du disque émet de la lumière dans toutes les directions. Cette lumière se propage sous l'influence du champ gravitationnel du trou noir. La trajectoire des rayons lumineux est régie par deux équations données ci-dessous (qui sont similaires à celles d'un objet autour du Soleil) :

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

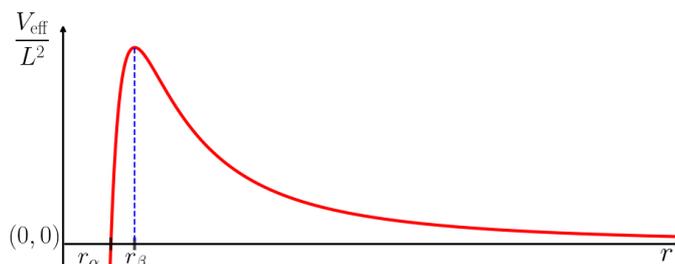
où $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ est la coordonnée radiale, $\phi \in [0, 2\pi)$ est l'angle azimutal, et E et L sont des constantes liées respectivement à l'énergie conservée et au moment angulaire conservé.

Ici, $v_r \equiv dr/dt$ est la valeur de la vitesse radiale, v_ϕ est la valeur de la vitesse tangentielle et $\omega \equiv d\phi/dt$ est la vitesse angulaire. On définit le paramètre d'impact b pour une trajectoire comme $b = L/\sqrt{2E}$. La dilatation du temps est négligée dans ce problème.

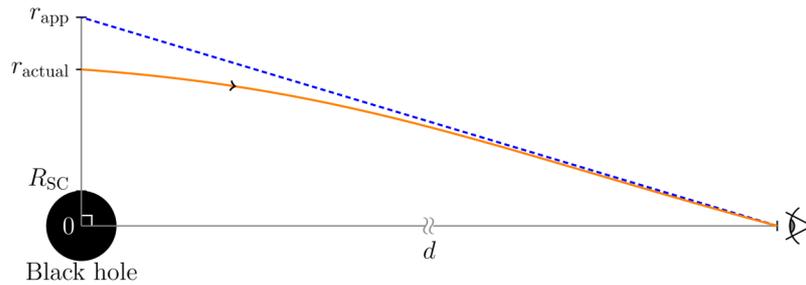
Une autre équation utile est obtenue en dérivant la première équation :

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0.$$

- (T08.1) Des trajectoires lumineuses circulaires peuvent exister autour du trou noir. Déterminer le rayon, r_{ph} , et le paramètre d'impact, b_{ph} , pour ces trajectoires de photons, en fonction de M et des constantes correspondantes. [4]
- (T08.2) Calculer le temps, T_{ph} , nécessaire pour effectuer une orbite complète de la trajectoire lumineuse circulaire en secondes. [2]
- (T08.3) L'équation de vitesse radiale donnée ci-dessus (la première équation de ce problème) peut être comparée à une équation de la forme $\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ pour les trajectoires lumineuses. Un graphique schématique de V_{eff}/L^2 en fonction de r est donné ci-dessous.



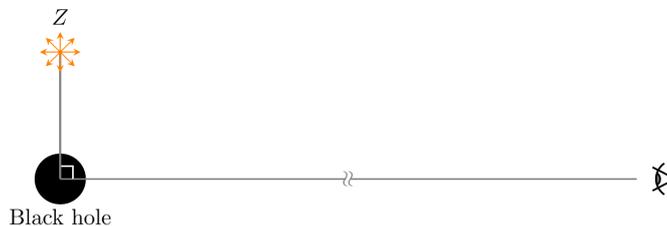
- (T08.3a) Le graphique indique deux rayons spéciaux, r_α et r_β . Obtenir les expressions de r_α et r_β en fonction de M et des constantes correspondantes. [2]
- (T08.3b) Un photon se déplaçant du disque d'accrétion vers le trou noir peut encore s'échapper vers l'infini dans certains cas. Trouver l'expression de la plus petite valeur du rayon du point de retournement, r_t , pour un tel photon, en fonction de M et des constantes pertinentes. Trouver l'expression de la valeur minimale du paramètre d'impact, b_{\min} , pour ce photon. [3]
- (T08.4) Un rayon de lumière provenant d'un rayon r_{actual} du centre du système dans le plan du ciel subira une forte courbure en raison de la gravité du trou noir, et finira par atteindre un observateur (indiqué par un œil) à une grande distance d du système, comme indiqué ci-dessous.



Pour cet observateur, le rayon semble provenir d'un point différent, situé à une distance $r_{\text{app}} \approx b$ du centre du trou noir dans le plan céleste, où b est le paramètre d'impact de la trajectoire du photon. Pour les points du disque d'accrétion à $r = r_{\text{actual}}$, on peut supposer la relation suivante :

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{SC}/r_{\text{actual}})^{1/2}.$$

- Pour l'observateur distant, comme nous, qui observe le disque d'accrétion de face, l'image du système apparaîtra symétrique de révolution dans le plan céleste. Déterminer le rayon apparent le plus externe, r_{outer} , et le rayon apparent le plus interne, r_{inner} , de l'image avec l'unité ua. [5]
- (T08.5) On considère un trou noir supermassif isolé de masse $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$ sans disque d'accrétion. Une brève et intense explosion de rayonnement électromagnétique se produit pendant 5 s en un point Z à une distance, disons, $r_Z = 6R_{SC}$ du trou noir, comme le montre la figure. L'explosion au point Z émet de la lumière dans toutes les directions. Un observateur situé loin du trou noir (indiqué par un œil sur la figure ci-dessous) prend une image à longue exposition de la région autour du trou noir pendant 60 s.



Choisir l'option correcte pour chacune des affirmations ci-dessous :

- (T08.5a) Le nombre de chemins possibles pour que la lumière voyage de Z à l'observateur est [2]
 (A) Au plus un (B) Exactement un (C) Exactement deux (D) Plus de deux.
- (T08.5b) Le nombre d'images de l'explosion électromagnétique qui seront visibles en Z dans l'image à longue exposition est [2]
 (A) Au plus un (B) Exactement un (C) Exactement deux (D) Plus de deux.

(T09) Qualité de la visibilité

[35 points]

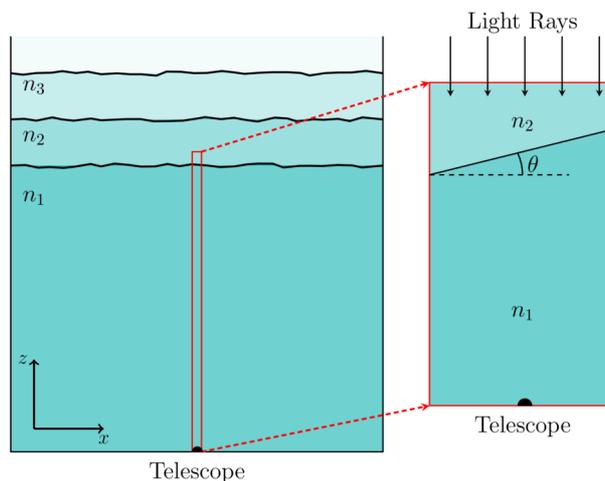
Une lunette avec un objectif convexe achromatique de diamètre $D = 15$ cm et de distance focale $f = 200$ cm est pointé vers une étoile au zénith.

- (T09.1) Trouver le diamètre (en m), d_{image} , de l'image d'une source ponctuelle telle que produite par l'objectif dans son plan focal pour la lumière verte ($\lambda = 550$ nm), en considérant uniquement les effets de la diffraction. **[1]**

L'image d'une source astronomique est également affectée par ce que l'on appelle la « qualité de la visibilité ».

Les limites entre les couches de l'atmosphère ainsi que leurs indices de réfraction changent continuellement sous l'effet de la turbulence, des variations de température et d'autres facteurs. Cela entraîne de minuscules variations de la position de l'image dans le plan focal du télescope, appelées « effet de scintillement ». Pour la suite du problème, hormis l'utilisation de la taille finie de l'image de l'étoile limitée par la diffraction (comme indiqué ci-dessus), aucun effet d'interférence ne sera pris en compte.

La partie gauche de la figure ci-dessous montre une coupe verticale de l'atmosphère avec plusieurs couches d'indices de réfraction différents (n_1, n_2, n_3, \dots). La partie droite montre la vue agrandie d'un mince segment vertical de l'atmosphère et la limite entre les deux couches atmosphériques les plus basses d'indices de réfraction n_1 et n_2 ($n_1 > n_2$). On ne considère que ces deux couches et leur limite pour ce problème. Les diagrammes ne sont pas à l'échelle.

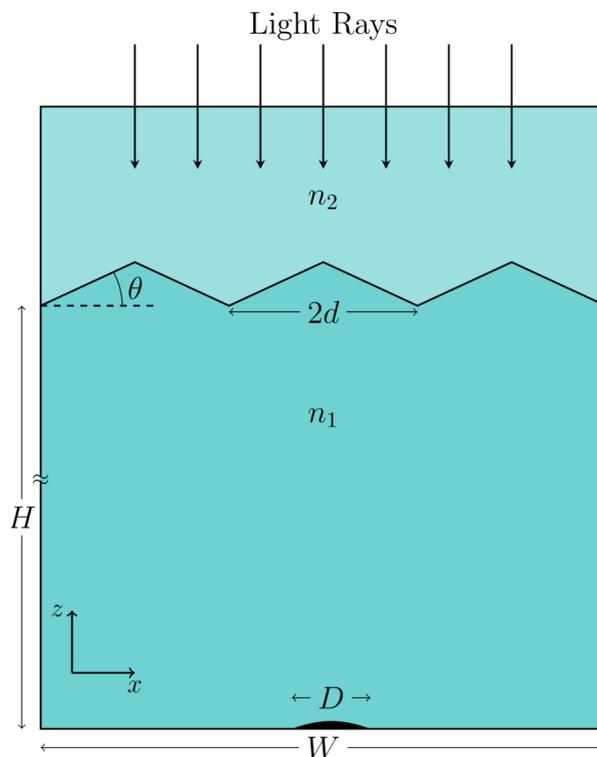


- (T09.2) Soit la limite entre les deux couches à une hauteur $H = 1$ km directement au-dessus de l'objectif de la lunette, avec une inclinaison de $\theta = 30^\circ$ par rapport au plan horizontal. Dans toutes les parties de ce problème, θ est considéré comme positif dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Pour une source lumineuse monochromatique, $n_1 = 1,00027$ et $n_2 = 1,00026$. Soit le décalage angulaire de l'image au plan focal de la lunette pour une étoile au zénith α .
- (T09.2a) Dessiner un diagramme correctement légendé des rayons à la frontière montrant n_1, n_2, θ et α . **[2]**
- (T09.2b) Trouver l'expression de α en fonction de θ, n_1 et n_2 . Utiliser les approximations des petits angles : $\sin \alpha \approx \alpha$ et $\cos \alpha \approx 1$. **[2]**
- (T09.2c) Calculer le déplacement, Δx_θ (en m), dans la position de l'image si θ augmente de 1% (en gardant n_1 et n_2 fixes). **[3]**
- (T09.2d) Calculer le déplacement, Δx_n (en m), dans la position de l'image si n_2 augmente de 0,0001 % (en gardant n_1 et θ fixes). **[3]**
- (T09.3) Pour la lumière blanche provenant d'une étoile au zénith, choisir parmi les propositions suivantes celle qui décrit le mieux la forme et la couleur de l'image en cochant la case correspondante (une seule \checkmark dans la feuille de réponses récapitulative. Noter que la valeur de x augmente de gauche à droite sur la figure). **[2]**

	Couleur de l'image	Forme de l'image	Bord gauche	Bord droit
A	blanc	circulaire		
B	blanc	elliptique		
C	coloré	circulaire	bleu	rouge
D	coloré	circulaire	rouge	bleu
E	coloré	elliptique	bleu	rouge
F	coloré	elliptique	rouge	bleu

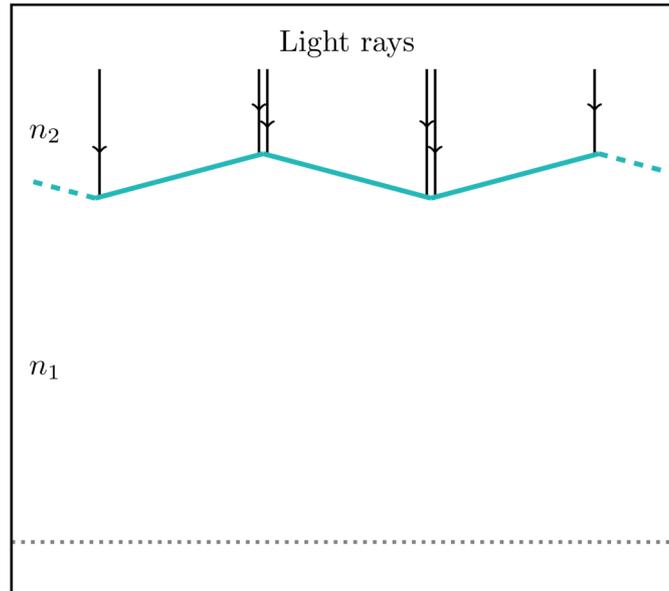
Pour toutes les autres parties de ce problème $\lambda =$ on considère une lumière verte monochromatique à 550 nm. On modélise la frontière entre les couches comme un ensemble de plans infinis en zigzag (perpendiculaires au plan de la page) séparés par $d = 10$ cm le long de l'axe x , $\theta = 10^\circ$ ou $\theta = -10^\circ$.

La figure ci-dessous (non à l'échelle) montre une coupe transversale de ce modèle d'atmosphère de largeur W ($W \ll H$). Pour les lunettes à grande ouverture, cette nature en zigzag de la frontière entraîne la formation de taches dans le plan focal.



(T09.4) Considérer une atmosphère modélisée comme ci-dessus.

(T09.4a) Une section de l'atmosphère avec des plans en zigzag consécutifs, avec les mêmes paramètres que ceux indiqués ci-dessus, est représentée dans le diagramme ci-dessous (non à l'échelle).



Dans ce schéma, reproduit dans la feuille de réponses récapitulatives, tracer les trajectoires des rayons lumineux incidents jusqu'au plan où est placé l'objectif du télescope, représenté par la ligne pointillée grise.

Marquer la ou les régions, le cas échéant, par un « X » dans le diagramme où aucun rayon lumineux n'arrivera. [4]

(T09.4b) Calculer la largeur W_X de cette ou ces régions. [3]

(T09.4c) Trouver le plus grand diamètre, D_{\max} , de l'objectif de la lunette avec lequel il sera possible d'obtenir une seule image d'une étoile, en choisissant de manière appropriée l'emplacement de la lunette par rapport à la structure de la frontière. [4]

(T09.5) On considère le cas où la forme en zigzag de la frontière est autorisée dans les directions x et y (comme un champ de pyramides), et $D = 100$ cm (avec $f = 200$ cm). [6]

Dessiner le modèle qualitatif des taches obtenues dans la case donnée dans la feuille de réponses récapitulative.

(T09.6) Pour une atmosphère turbulente, on considère à nouveau la même forme en zigzag parallèle de la couche limite, mais uniquement dans la direction x , mais l'angle entre deux plans change à une vitesse uniforme de 10° à -10° en 1,0 s. On suppose que cela entraîne un décalage uniforme de la position de l'image. [5]

On considère une lunette avec $D = 8$ cm et $f = 1$ m. Estimer le temps d'exposition le plus long t_{\max} autorisé pour sa caméra CCD afin que l'on n'obtienne qu'une seule image, et que toute déviation possible de sa position reste inférieure à 1% du diamètre limité par diffraction de l'image.

(T10) Nucléosynthèse du Big Bang

[35 points]

Durant l'ère dominée par le rayonnement dans l'Univers primordial, le facteur d'échelle de l'Univers $a \propto t^{1/2}$, où t est le temps écoulé depuis le Big Bang. Pendant la majeure partie de cette ère, les neutrons (n) et les protons (p) restent en équilibre thermique les uns avec les autres via des interactions faibles. La densité numérique (N) de neutrons ou de protons libres est liée à la température T et à leurs masses correspondantes m de telle sorte que

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

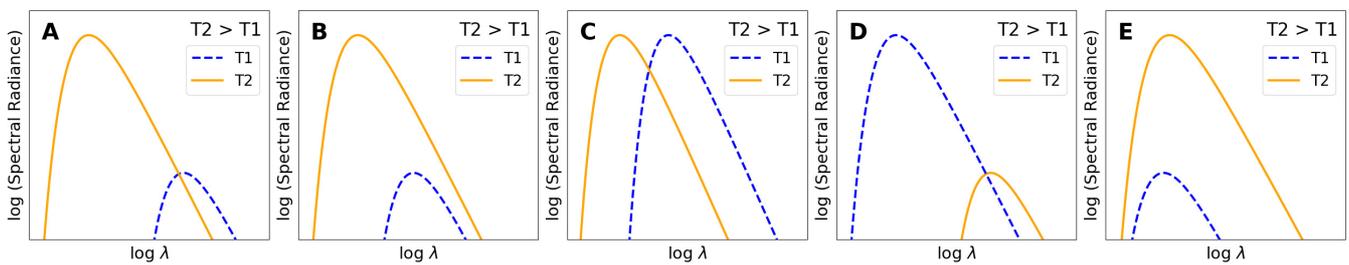
tant que le temps $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70$ s, lorsque $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. Après t_{wk} , les interactions faibles ne peuvent plus maintenir un tel équilibre et les neutrons libres se désintègrent en protons avec une demi-vie de 610,4 s.

(T10.1) Soit la densité numérique des protons N_p et celle des neutrons N_n . Calculer l'abondance relative des neutrons donnée par le rapport $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ à l'instant t_{wk} . [4]

(T10.2) Les photons maintiennent l'équilibre thermique et conservent un spectre de corps noir à toutes les époques.

(T10.2a) Trouver l'indice β , tel que $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Identifier lequel des graphiques suivants montre le comportement correct de la densité d'énergie spectrale pour deux températures T_1 et T_2 . Cocher (✓) l'option correcte dans la feuille de réponses récapitulative. [2]



(T10.3) Après t_{wk} , le processus de formation du deutérium à partir de protons et de neutrons est régi par l'équation de Saha, donnée par le physicien indien Pr Meghnad Saha, qui peut être simplifiée en

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n) c^2}{k_B T} \right).$$

Ici, le rapport baryon/photon η est 6.1×10^{-10} , et N_D est la densité numérique du deutérium.

(T10.3a) Tracer le rapport N_D / N_n sur la grille de la feuille de réponses récapitulative, pour au moins 4 valeurs de température raisonnablement espacées qui se situent dans le domaine $k_B T = [60 ; 70]$ keV, et tracer une courbe lissée passant par ces points. [5]

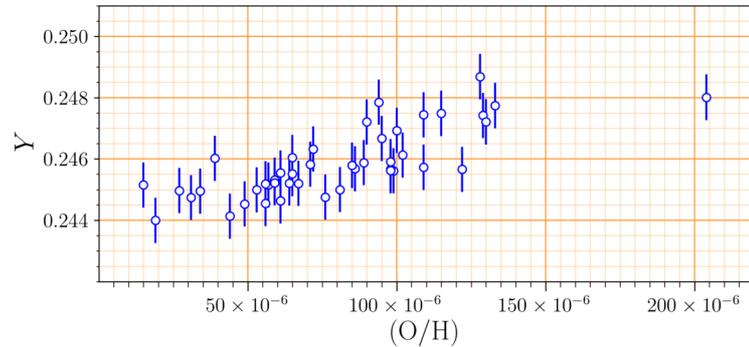
(T10.3b) A partir du tracé, trouver $k_B T_{\text{nuc}}$ (en keV) lorsque $N_D = N_n$. [1]

(T10.3c) On suppose maintenant que tous les neutrons libres se combinent instantanément avec les protons à $k_B T_{\text{nuc}}$ pour former du deutérium, et que tout cela soit immédiatement converti en hélium (${}^4_2\text{He}$). Calculer l'époque ou le temps de nucléosynthèse correspondant, t_{nuc} (en s), pour la formation de l'hélium. [4]

(T10.4) Calculer la valeur de $X_{n, \text{nuc}}$ immédiatement avant t_{nuc} . [5]

(T10.5) L'abondance primordiale de l'hélium, Y_{prim} , est définie comme la fraction de la masse baryonique totale de l'Univers qui est liée à l'hélium juste après t_{nuc} . Obtenir une estimation théorique de la valeur de Y_{prim} . Pour les besoins de ce seul calcul, on suppose $m_p \approx m_n$ et que la masse de l'hélium, $m_{\text{He}} \approx 4m_n$. [3]

(T10.6) L'abondance primordiale de l'hélium est très difficile à mesurer, car les étoiles convertissent continuellement l'hydrogène en hélium dans l'Univers. L'intensité de la transformation par les étoiles d'une galaxie est caractérisée par la densité relative de l'oxygène (produit uniquement par les étoiles) par rapport à l'hydrogène, notée (O/H) , dans la galaxie. Une compilation des mesures de (O/H) et de l'abondance de l'hélium, Y , pour différentes galaxies est représentée ci-dessous.



Utiliser tous les points de ce graphique (qui est reproduit dans la feuille de réponses récapitulative) pour répondre à la question suivante.

(T10.6a) Estimer Y pour une galaxie naine compacte bleue avec une valeur de $(O/H)=1,75 \times 10^{-4}$. [2]

(T10.6b) Obtenir la pente $dY/d(O/H)$ de la droite ajustée aux données ci-dessus. [2]

(T10.6c) Estimer l'abondance d'hélium primordial, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, sur la base des observations ci-dessus. [2]

(T10.7) L'écart entre Y_{prim} et $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ peut être diminué en modifiant le rapport baryon/photon η . Lorsque η est diminué, comme indiqué par \downarrow dans la feuille de réponses récapitulative, indiquer l'augmentation (\uparrow) ou la diminution (\downarrow) de $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (lorsque $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$, et Y_{prim} dans les cases prévues à cet effet dans la feuille de réponses récapitulative. [3]

(T11) Les étoiles à travers les graphiques

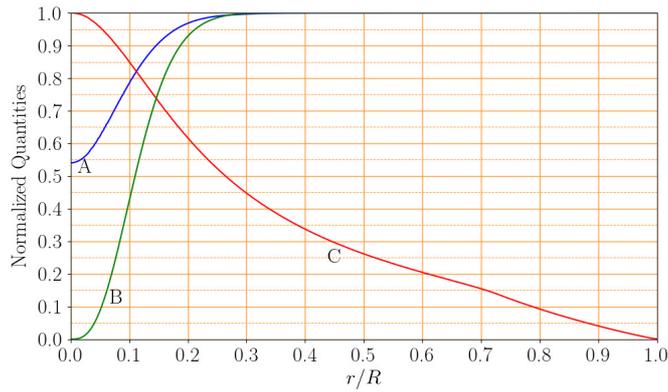
[50 points]

Les étoiles peuvent être bien approchées comme des objets à symétrie sphérique, et donc la distance radiale r au centre peut être choisie comme seule variable indépendante dans la modélisation de l'intérieur des étoiles. La masse contenue dans une sphère de rayon r est notée $m(r)$. La luminosité $l(r)$ est définie comme l'énergie nette s'écoulant vers l'extérieur à travers une surface sphérique de rayon r par unité de temps. D'autres quantités d'intérêt, par exemple la densité $\rho(r)$, la température $T(r)$, la fraction massique d'hydrogène $X(r)$, la fraction massique d'hélium $Y(r)$, et l'énergie nucléaire générée par unité de masse et par unité de temps $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, sont considérées comme des fonctions de r . Tout au long de ce problème, on négligera les effets de la diffusion et de la sédimentation gravitationnelle des éléments à l'intérieur de l'étoile.

Le symbole « log » fait référence au logarithme en base 10. Le problème se compose de trois parties indépendantes.

(T11.1) Partie 1 : A l'intérieur d'une étoile

Le graphique ci-dessous montre la variation de trois grandeurs structurales, A, B et C, en fonction du rayon fractionnaire r/R dans un modèle stellaire de masse $1 M_{\odot}$ et d'âge 4 Ga, où R est le rayon photosphérique de l'étoile. Les valeurs de la fraction massique d'hélium à la surface (photosphérique), Y_s , et de la métallicité (fraction massique de tous les éléments plus lourds que l'hélium) à la surface (photosphérique), Z_s , de l'étoile sont données par $(Y_s, Z_s) = (0,28 ; 0,02)$. Toutes les grandeurs représentées dans les graphiques sont normalisées par leurs valeurs maximales respectives.



(T11.1a) Identifier les trois grandeurs A, B et C de manière unique parmi les cinq possibilités : [6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Ecrire A/B/C dans les cases à côté des grandeurs appropriées dans la feuille de réponses récapitulatives. Aucune justification n'est nécessaire pour cette réponse.)

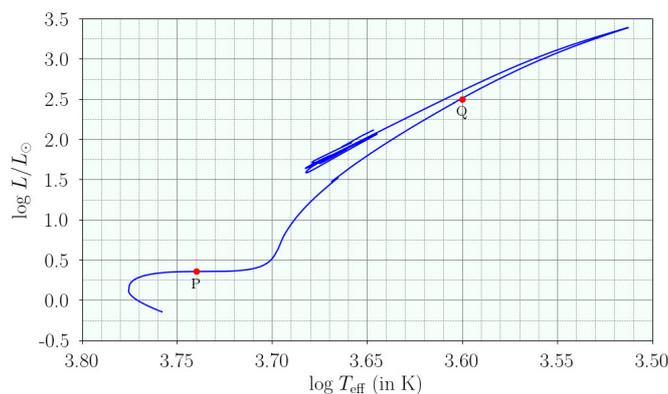
(T11.1b) Quelle est la fraction massique de l'hélium au centre, Y_c , de l'étoile ? [3]

(T11.1c) Esquisser les deux grandeurs restantes de la liste de cinq (qui n'ont pas été identifiées comme courbes A, B ou C) données dans (T11.1a), en tant que fonctions de r/R sur le même graphique dans la feuille de réponses récapitulatives, et légender par leurs grandeurs respectives. [5]

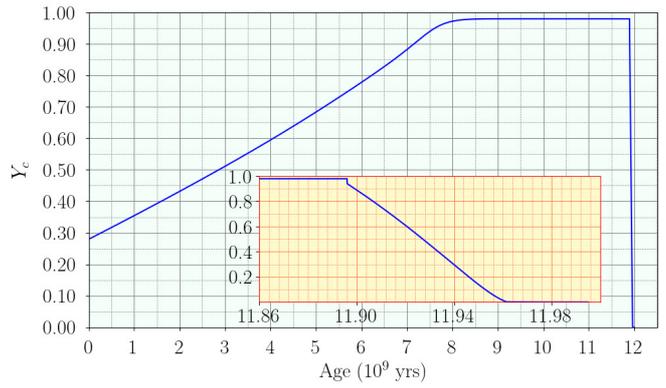
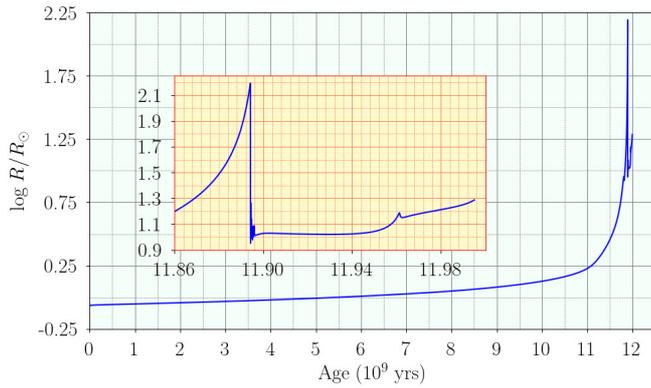
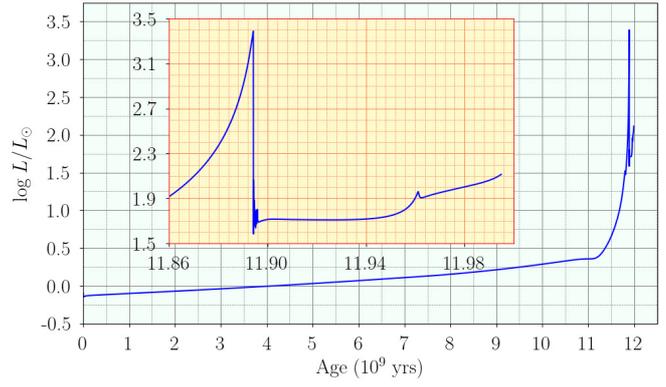
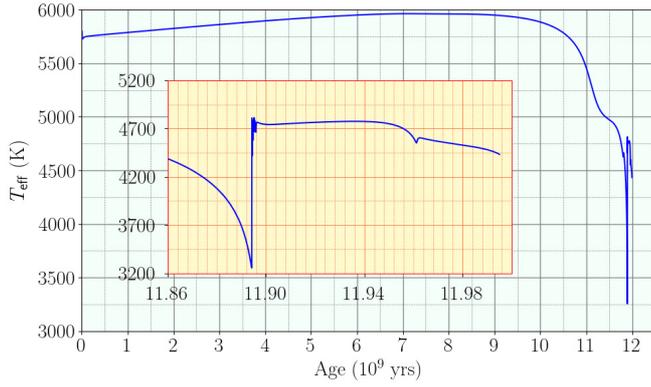
(T11.2) **Partie 2 : Les étoiles en évolution**

On considère l'évolution d'une étoile $1M_{\odot}$ dont la composition initiale uniforme est donnée par les fractions massiques de l'hélium, $Y_0 = 0,28$, et des métaux, $Z_0 = 0,02$. Les figures ci-dessous illustrent la variation des différentes quantités globales de cette étoile au cours de son évolution depuis la séquence principale de l'âge zéro (ZAMS) jusqu'à la fin de la combustion de l'hélium dans son noyau.

Le graphique ci-dessous montre la trajectoire évolutive de l'étoile sur le diagramme HR (tracé de $\log L/L_{\odot}$ vs $\log T_{\text{eff}}$, où L est la luminosité de surface et T_{eff} est la température effective).



La figure ci-dessous présente quatre graphiques montrant la variation de T_{eff} (en K), L (représenté par L/L_{\odot}), R (représenté par $\log R/R_{\odot}$), et Y_c en fonction de l'âge (en 10^9) de la même étoile. Dans chacun de ces quatre graphiques, les encarts montrent en détail les variations des quantités respectives entre les âges de $11,86 \times 10^9$ ans et $12,00 \times 10^9$ ans, pour plus de clarté.



Utiliser ces graphiques pour répondre aux questions ci-dessous.

- (T11.2a) Quelle est la durée de vie approximative de la séquence principale, t_{MS} (en années), de l'étoile ? [1]
- (T11.2b) Quelle est la durée approximative, Δt_{He} (en années), pendant laquelle l'étoile brûle de l'hélium dans son noyau ? [1]
- (T11.2c) Quelle fraction, f_H , de la quantité initiale d'hydrogène en son centre a été brûlée lorsque la luminosité de l'étoile est de $1 L_{\odot}$? [3]
- (T11.2d) Quel est le rayon de l'étoile, R_1 (en unités de R_{\odot}) lorsque 60% de la quantité initiale d'hydrogène en son centre a été brûlée ? [3]
- (T11.2e) Quels sont les rayons de l'étoile, R_P et R_Q (en unités de R_{\odot}), correspondant respectivement à ses positions P et Q, comme indiqué sur le diagramme HR ? [4]

(T11.3) **Partie 3 : Distribution de masse à l'intérieur d'une étoile**

L'équation qui régit la distribution de la masse à l'intérieur d'une étoile est donnée par

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r).$$

Il serait pratique d'exprimer cette équation en termes de trois variables adimensionnelles, à savoir la masse fractionnaire, q , le rayon fractionnaire, x , et la densité relative, σ , qu'on définit par

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

où M et R sont respectivement la masse totale et le rayon de l'étoile, et $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ est la densité moyenne de l'étoile. Pour l'étoile qu'on considère dans cette partie, les informations suivantes sont données :

- la densité centrale $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$;
- la moitié de la masse de l'étoile est contenue dans les 25 % intérieurs de son rayon total, et 70 % de sa masse est contenue dans les 35 % intérieurs de son rayon total.

Dans toutes les parties suivantes de ce problème, il suffira d'arrondir tous les coefficients numériques à 0,005 près.

(T11.3a) Exprimer l'équation ci-dessus décrivant la dépendance de la masse sur le rayon en [2] fonction de x , $\frac{dq(x)}{dx}$ et $\sigma(x)$.

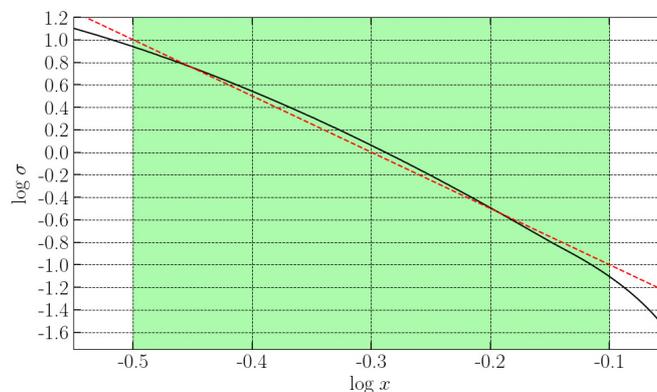
Pour obtenir la distribution de la masse en fonction du rayon, il est nécessaire de connaître le profil de densité à l'intérieur de l'étoile. Pour résoudre ce problème, on va décrire la variation de la densité en fonction du rayon par des formes approchées dans deux domaines de x :

- la partie intérieure de l'étoile : $0 \leq x \leq 0,32$
- la partie médiane de l'étoile : $0,32 < x < 0,80$.

On ne fait aucune approximation pour la partie la plus externe, c'est-à-dire $0,80 \leq x \leq 1,00$.

(T11.3b) **Approximation pour la partie médiane :**

La variation de $\log \sigma$ en fonction de $\log x$ au milieu de l'étoile est représentée (par la courbe noire) sur le graphique ci-dessous. On va faire une approximation linéaire (représentée par une ligne rouge en pointillés sur le graphique) pour $\log \sigma$ en fonction de $\log x$ dans le domaine $-0,5 < \log x < -0,1$, soit $0,32 \lesssim x \lesssim 0,80$ (représenté par le domaine ombré en vert). De plus, on approximera la pente de cette droite par l'entier le plus proche.



Utiliser cette approximation pour écrire une expression pour $\sigma(x)$ en fonction de x [4] dans le domaine $0,32 < x < 0,80$.

(T11.3c) Utiliser le résultat de (T11.3b) pour en déduire une expression pour $q(x)$ dans le [6] domaine $0,32 < x < 0,80$.

(T11.3d) **Approximation pour la partie intérieure :**

Dans la partie intérieure de l'étoile ($0 \leq x \leq 0,32$), la densité peut être approximée [8] comme une fonction linéaire du rayon, c'est-à-dire, $\sigma(x) = Ax + B$, où A, B sont des constantes. Déterminer A et B , et obtenir ainsi une expression pour $q(x)$ dans le domaine $0 \leq x \leq 0,32$. Noter que les approximations adoptées dans la partie précédente et cette partie peuvent conduire à de petites discontinuités de densité ou de masse à $x = 0,32$.

- (T11.3e) Les expressions pour $q(x)$ obtenues dans les parties (T11.3c) et (T11.3d) sont des approximations qui décrivent assez bien la variation de la masse avec le rayon, mais seulement dans des régions spécifiques de l'étoile. Pour le domaine $0,80 \leq x \leq 1$ (pour lequel on n'a déduit aucune expression), il est possible d'utiliser une extrapolation appropriée à partir de la région voisine. Utiliser ces expressions approximatives et les données fournies pour tracer une courbe lissée (sans discontinuité ni dans $q(x)$ ni dans sa dérivée) pour $q(x)$ en fonction de x pour l'étoile entière ($0 \leq x \leq 1$) qui représente la variation de la masse avec le rayon. [4]

(T12) Rayonnement de Hawking provenant des trous noirs

[50 points]

- (T12.1) Un trou noir (BH) se forme généralement par l'effondrement gravitationnel d'une étoile massive à la fin de son cycle de vie jusqu'à un point appelé singularité. En raison de l'extrême gravité d'un tel objet, rien de ce qui pénètre dans l'horizon des événements (une surface sphérique de $r = R_{SC}$, où r est la distance à la singularité) ne peut s'en échapper. Ici, R_{SC} est appelé rayon de Schwarzschild.

- (T12.1a) **Modélisation de l'origine du rayonnement de Hawking** : on considérons une paire de particules, chacune de masse m , produites de part et d'autre de l'horizon du trou noir. Une particule est légèrement à l'extérieur de l'horizon à $r \approx R_{SC}$, tandis que l'autre particule est à l'intérieur de l'horizon à $r = \kappa R_{SC}$. On suppose que l'énergie totale d'une particule soit la somme de son énergie de masse au repos mc^2 et de l'énergie potentielle gravitationnelle due au trou noir.

Déterminer la valeur de κ pour laquelle la paire de particules a une énergie totale nulle. [4]

- (T12.1b) **Température d'un trou noir** : si la particule produite à l'extérieur de l'horizon lors du processus ci-dessus possède suffisamment d'énergie cinétique, elle peut s'échapper du trou noir par un processus appelé rayonnement de Hawking. Celle à l'intérieur de l'horizon, d'énergie négative, est absorbée et diminue la masse du trou noir.

On suppose que tout le rayonnement de Hawking soit constitué de photons dont le spectre de corps noir culmine à la longueur d'onde $\lambda_{bb} \approx 16R_{SC}$. On sait que pour un trou noir d'une masse solaire, $R_{SC, \odot} = 2,952$ km.

Obtenir une expression de la température, T_{bh} , du trou noir correspondant à ce rayonnement de corps noir, en fonction de sa masse M_{bh} et de ses constantes physiques. Calculer le rayon de Schwarzschild, $R_{SC, 10\odot}$, et la température, $T_{bh, 10\odot}$, pour un trou noir de masse $10 M_{\odot}$. [4]

- (T12.1c) **Perte de masse d'un trou noir** : on suppose que le rayonnement Hawking soit émis depuis l'horizon des événements.

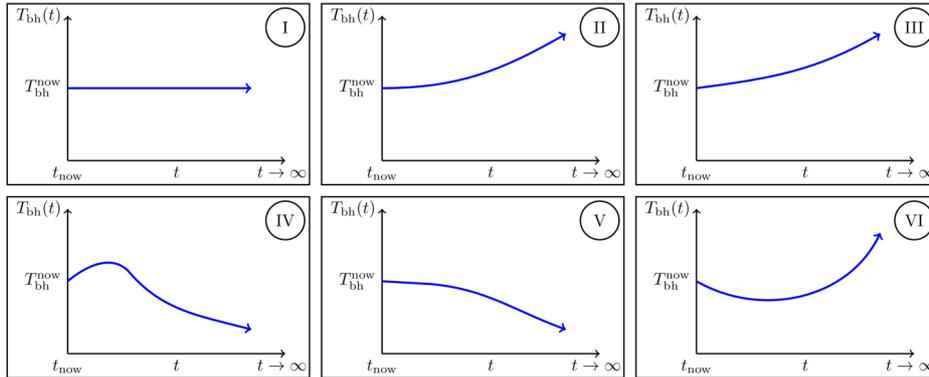
En utilisant l'équivalence masse-énergie, obtenir une expression pour le taux de perte de masse, $dM_{bh}(t)/dt$, en fonction de la masse $M_{bh}(t)$ du trou noir et de constantes physiques.

Par conséquent, obtenir une expression pour $M_{bh}(t)$ pour un trou noir de masse initiale M_0 . Esquisser $M_{bh}(t)$ en fonction de t de $M_{bh} = M_0$ à $M_{bh} = 0$. [8]

- (T12.1d) **Durée de vie d'un trou noir** : obtenir une expression pour la durée de vie τ_{BH} à laquelle un trou noir de masse initiale M_0 s'évapore complètement sous l'effet du rayonnement de Hawking, en fonction de M_0 et de constantes physiques. Calculer la durée de vie $\tau_{bh, 10\odot}$ (en secondes) pour un trou noir avec $M_0 = 10 M_{\odot}$. [3]

- (T12.1e) **Trou noir dans un bain de rayonnement CMB** : on considère un trou noir isolé dans l'espace, loin des autres corps, avec une température actuelle T_{bh}^{now} , entouré par le fond diffus cosmologique (CMB) avec une température actuelle $T_{cmb}^{now} = 2,7$ K. Le trou noir peut croître en masse en absorbant le rayonnement CMB et perdre sa masse par le rayonnement Hawking.

En tenant compte de l'expansion accélérée de l'Univers, identifier laquelle des figures suivantes montre l'évolution temporelle à long terme de T_{bh} dans les trois cas suivants : (X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Indiquer la réponse en cochant la case appropriée (une seule) pour chaque cas X, Y ou Z dans le tableau donné dans la feuille de réponses récapitulative correspondant au numéro de figure approprié. [6]

- (T12.2) Des trous noirs primordiaux (PBHs) de masses bien plus petites peuvent se former dans l'Univers primordial. Toutes les questions suivantes sont liées aux PBHs. Ici, tout processus augmentant la masse du trou noir peut être négligé.

- (T12.2a) **Évaporation des PBH à l'époque actuelle** : comme vous l'avez peut-être remarqué en répondant aux questions précédentes, les trous noirs de masse solaire mettraient beaucoup de temps à s'évaporer. Cependant, comme les PBH peuvent avoir une masse bien plus faible, on pourrait les observer s'évaporer à l'époque actuelle.

Trouver la masse initiale $M_{0, PBH}$ (en kg), le rayon de Schwarzschild $R_{SC, PBH}$ (en m) [4] et la température T_{PBH} (en K) d'un trou noir qui pourrait s'évaporer complètement à l'époque actuelle, c'est-à-dire ceux dont la durée de vie $\tau_{PBH} = 14$ milliards d'années.

- (T12.2b) **Formation d'un PBH** : dans l'Univers primordial, dominé par le rayonnement, le facteur d'échelle varie comme $a(t) \sim t^{1/2}$. A cette époque, les PBH se forment suite à l'effondrement de toute l'énergie contenue dans une région de taille physique ct , où t est l'âge de l'Univers à ce moment-là.

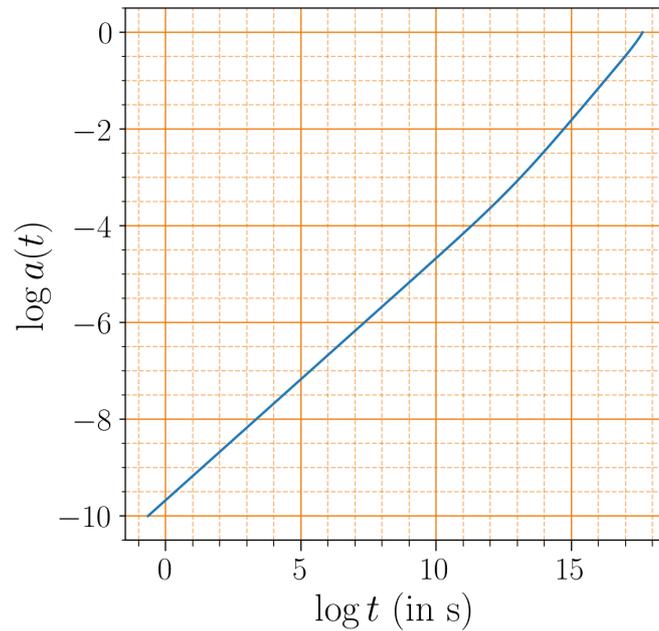
Un PBH de masse 1×10^{12} kg se forme lorsque l'âge de l'Univers est d'environ [6] 1×10^{-23} s. Calculer l'âge de l'Univers, t_{20} , lorsqu'un PBH de masse 1×10^{20} kg se forme.

- (T12.2c) **Spectre observé du rayonnement de Hawking du PBH** : on considère un PBH de masse initiale de 1×10^{10} kg qui s'évapore complètement à la fin de sa durée de vie τ_{PBH} . Pour cette partie, supposons par souci de simplicité que la majeure partie du rayonnement de Hawking est émise à cet instant, avec une température correspondant à sa masse initiale. De plus, on considère que le facteur d'échelle de l'Univers évolue comme $a(t) \sim t^{2/3}$.

Calculer la longueur d'onde maximale de ce rayonnement Hawking tel qu'observé sur [5] Terre, λ_{earth} , à l'époque actuelle (à $t = 14$ milliards d'années).

- (T12.2d) **Rayonnement cosmique de haute énergie du PBH** : on suppose maintenant que le rayonnement de Hawking émis à un instant donné t corresponde à des photons émis avec une énergie $k_B T_{bh}(t)$. De plus, la température la plus élevée possible pour un trou noir est la température de Planck T_{Planck} où $k_B T_{Planck} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

L'évolution du facteur d'échelle sur les échelles de temps pertinentes est présentée dans la figure suivante. Le facteur d'échelle actuel est fixé à l'unité. $t(s)$ sur l'axe des temps représente l'âge de l'Univers en secondes.



Si un photon d'énergie $E_{\text{det}} = 3,0 \times 10^{20}$ eV est observé sur Terre, déterminer les valeurs les plus grandes et les plus petites possibles de la masse initiale du PBH (M_0^{max} et M_0^{min} , respectivement) qui pourraient être responsables de ce photon. [10]