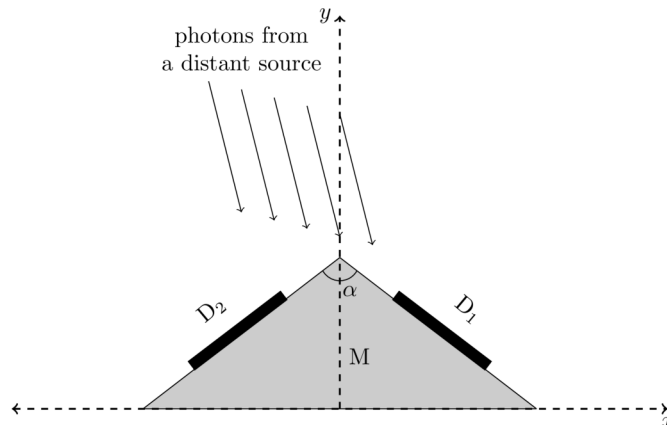


(T01) Daksha missioon
[10 punkti]

India kavandatud missioon „Daksha” koosneb kahest satelliidist S_1 ja S_2 , mis tiirlevad ümber Maa samal ringikujulisel orbiidil raadiusega $r = 7000$ km, kuid faasivahega 180° . Need satelliidid jälgivad universumit kõrge energiaga kiirgusvahemikus (röntgenikiirgus ja γ kiirgus). Mõlemad Daksha satelliidid kasutavad mitut tasapinnalist ristkülikukujulist detektorit.

Mõistmaks kuidas leida kiirgusallika asukohta, kasutame Daksha missiooni lihtsustatud mudelit. Eeldage, et S_1 omab ainult kahte identset detektorit D_1 ja D_2 , mõlemad pindalaga $A = 0,50 \text{ m}^2$, mis on kinnitatud läbipaistmatule alusele M, nagu on näidatud alloleval joonisel. Detektorid asuvad sümmeetriliselt ümber y -telje tasapinnadel, mis on risti $x - y$ tasapinnaga ja moodustavad üksteisega nurga $\alpha = 120^\circ$.



- (T01.1) Vaadeldes kauget allikat, mis asub $x-y$ tasandil, registreerib detektor D_1 võimsuse $P_1 = 2,70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$ ja detektor D_2 võimsuse $P_2 = 4,70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$.

Andge hinnang nurgale η , mis tekib allika asukohavektori ja positiivse y -telje vahel, kusjuures [5] positiivse y -telje suhtes vastupäeva suunatud nurka loetakse positiivseks.

Vaatleme üksikut kiirgusimpulssi kaugest allikast (mitte tingimata $x-y$ tasandil), mille tuvastasid mõlemad Daksha satelliidid (S_1 ja S_2). Impulsi tipp hetke ajad satelliitidel S_1 ja S_2 on vastavalt t_1 ja t_2 .

- (T01.2) Eeldusel, et mõõdetud ajavahe $t_1 - t_2$ on $10.0 \pm 0.1 \text{ ms}$, siis määrake taevastähti osakaal f , kus [5] allikas võib asuda.

(T02) Makar-Sankranti
[10 punkti]

Makar-Sankranti festivali tähistatakse Indias, kui Päike liigub Maalt vaadatuna Kaljukitse sodiaagipiirkonda (Makar = Kaljukits, Sankranti = sisenemine). Tänapäeval tähistatakse seda iga aasta 14. jaanuari paiku. Palju aastaid tagasi langes see püha kokku ka talvise pööripäeva tähistamisega põhjapoolkeral, mis toimub eeldatavasti 21. detsembril.

- (T02.1) Leidke ülaltoodud teabe põhjal aasta y_c , millal selle festivali tähistamine langes viimati kokku [3] talvise pööripäeva tähistamisega põhjapoolkeral.
- (T02.2) Eeldusel, et Päike liikus 14. jaanuaril 2006 Mumbais kohaliku aja järgi kell 11:50:13 Kaljukitse [3] tähtkujusse, leidke kuupäev D_{enter} ja kohalik aeg t_{enter} , millal Päike siseneb Kaljukitse tähtkujusse 2013. aastal.
- (T02.3) Makar-Sankranti festivali tähistatakse antud kohas esimesel päeval kus päikeseloojangu hetkel asub Päike Kaljukitse sodiaagipiirkonnas. Võite eeldada, et Mumbai kohalik päikeseloojangu aeg jaanuaris on 18:30:00.

Märkige festivali tähistamise kuupäev igal aastal ajavahemikus 2006-2013 (märkides (✓) [4] vastavasse kasti kokkuvõtliku vastustelehe tabelis).

(T03) Gravitatsioonilained

[15 punkti]

Gravitatsioonilained tekivad, kui kaks musta auku tiirlevad ümber üksteise. Vaatleme kahte musta auku meie galaktikas massidega $M = 36 M_{\odot}$ ja $m = 29 M_{\odot}$, mis tiirlevad ringikujulistel orbiitidel ümber ühise massikeskme.

(T03.1) Lähtudes Newtoni gravitatsiooniteooriast, tuletage mustade aukude orbiitide nurksageduse ω_{ini} avaldis hetkel t_{ini} , mil mustade aukude vaheline kaugus oli 4.0 korda suurem, kui nende Schwarzschildi raadiuste summa. Esitada vastus kasutades ainult M , m ja füüsikalisi konstante.

Arvutage ω_{ini} väärtus (ühikutes rad s^{-1}).

[5]

(T03.2) Üldrelatiivsusteooria kohaselt kiirgavad orbiidil olevad mustad augud gravitatsioonilaineid sagedusega f_{GW} , nii et $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. See kahandab mustade aukude orbiite, mis omakorda suurendab f_{GW} . Muutumiskiirus f_{GW} jaoks on esitatav kujul

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

kus $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ nimetatakse „chirp massiks“.

Leidke α , β ja δ väärtused.

[4]

(T03.3) Oletame, et ühinemisel vabanevad gravitatsioonilained avastati esimest korda ajal $t_{\text{ini}} = 0$.

[6]

Tuletage avaldis musta augu ühinemise täheldatud aja t_{merge} jaoks, kui f_{GW} muutub väga suureks. Esitage vastus ainult ω_{ini} , M_{chirp} ja füüsikaliste konstantide abil. Arvutage t_{merge} väärtus (sekundites).

(T04) Balmer Decrement

[15 punkti]

Vaatleme peajada tähte, mida ümbritseb udukogu, tähe vaadeltava spektri piirkonna (V-band) heledus on 11.315 mag. Tähe lähedal asuv ioniseeritud udukogu kiirgab $H\alpha$ ja $H\beta$ jooni, mille lainepikkused on vastavalt $0.6563 \mu\text{m}$ ja $0.4861 \mu\text{m}$. Teoreetiliselt ennustatud kiirgusvoogude suhe $H\alpha$ ja $H\beta$ joontes on $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2.86$. Kuid kui see kiirgus läbib külma tolmu udukogu välimise osa, on $H\alpha$ ja $H\beta$ joonte mõõdetud kiirgusvood vastavalt $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ ja $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

Neeldumine A_{λ} on funktsioon lainepikkusest ja väljendatakse järgmiselt:

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Siin on $\kappa(\lambda)$ neeldumisekõver ja $E(B - V)$ tähistab värvuse ülejääki filtrites B ja V. Neeldumisekõver (kus λ ühikuks on μm) on esitatud järgmiselt:

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

kus $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ on suhe summaarse ja selektiivse neeldumise vahel.

(T04.1) Leia $\kappa(H\alpha)$ ja $\kappa(H\beta)$ väärtused. [3]

(T04.2) Leia värviliisuse üleliigi suhte väärtus $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(BV)}$. [4]

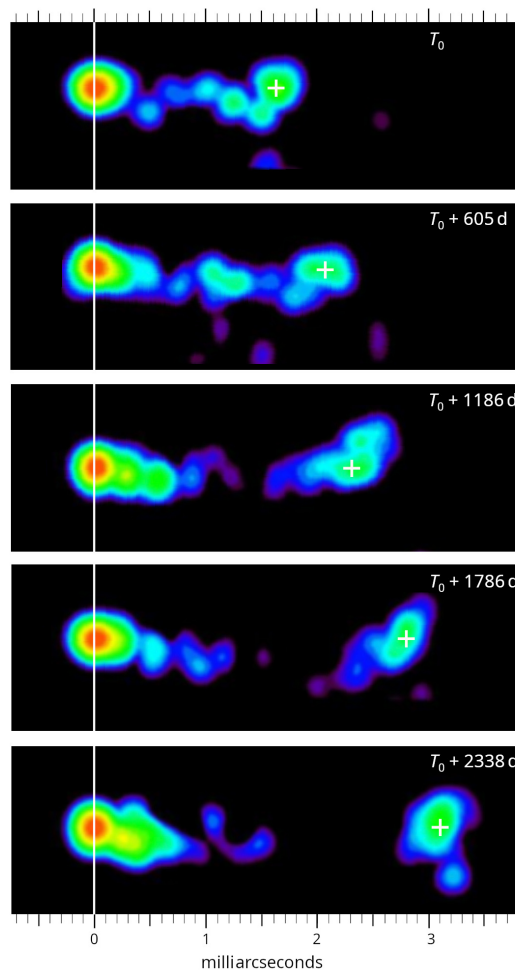
(T04.3) Hinnake udukogu poolt põhjustatud neeldumist $A_{H\alpha}$ ja $A_{H\beta}$, vastavalt $H\alpha$ ja $H\beta$ lainepikkustel. [6]

(T04.4) Hinnake udukogu neeldumist (A_V) ja tähe näivat magnituudi m_{V0} visuaalses spektriipiirkonnas udukogu puudumisel. [2]

(T05) Kvasarid

[20 punkti]

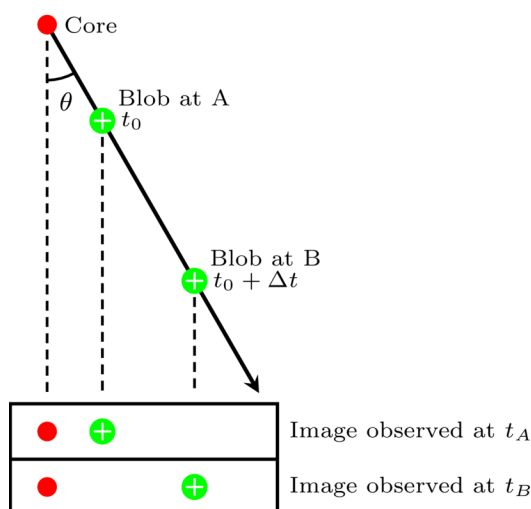
Kvasar on äärmiselt hele aktiivne galaktika, millele annab energiat supermassiivne must auk, mis kiirgab relativistlikke jugasid. Joonisel on kujutatud mitu paneeli kvasari (punanihkega $z = 0.53$ ja heleduskaugusega $D_L = 1.00 \times 10^{10}$ ly) raadiopilte erinevatel aegadel. Tuum on joondatud vertikaalse valge joonega, samal ajal kui kiirgusjuga, mis koosneb "plönnist" (tähistatud valge +), liigub sellest aja jooksul eemale. Igal paneelil on märgitud vaatlusaeg (alates T_0 esimese pildi puhul) ning pildi nurkkauguse skaala on märgitud joonise ülemisse ja alumisse serva.



- (T05.1) Määrake iga vaatluse puhul plõnni nurkkaugus kvasari tuumast ϕ_{blob} (millikaaresekundites) [5] ja selle ristisuunaline kaugus l_{blob} (valgusaastates). Seejärel arvutage plõnni näilised ristisuunalised kiirused (v_{app}) iga vaatluse puhul, esitades need murdosana valguse kiirusest β_{app} ($= v_{\text{app}}/c$) kasutades järjestikuseid mõõtmisi. Lisaks arvutage keskmine näiline ristisuunaline kiirus $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ kogu vaatlusperioodi jooksul.

Kvasar liigub tegelikult relativistliku kiirusega $v \equiv \beta c$, kuid mitte tingimata risti vaatlemissuunaga; näiteks moodustab kvasar kaugema vaatleja vaatlusjoone suhtes nurga θ ("vaatlusnurk"), nagu on näidatud alloleval joonisel katkendjoonega.

Selles ja kõigis järgnevates osades ignoreerige kvasari punanihet ja kõiki relativistlikke mõjusid.



- (T05.2) Plõnni poolt kiiratud valgus kahe erineva ajahetkel t_0 (vastab asendile A) ja $t_0 + \Delta t$ (vastab asendile B), jõuab vaatlejani vastavalt ajahetkel t_A ja t_B . Seega on vaadeldav ajavahe on $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

- (T05.2a) Leidke suhte $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ avaldis β ja θ kaudu. [2]

- (T05.2b) Kasutades seda suhet, leidke β_{app} avaldis β ja θ kaudu. [2]

- (T05.3) Liikumist nimetatakse ülevalguskiiruse liikumiseks, kui näiline kiirus ületab valguse kiiruse ($\beta_{\text{app}} > 1$), ja allavalguskiiruse liikumiseks, kui see seda ei ületa ($\beta_{\text{app}} < 1$).

- (T05.3a) Joonestage parameetri väärtuse $\beta_{\text{app}} = 1$ korral sile kõver β üle- ja allavalguskiiruse liikumise piiri tähistamiseks funktsioonina nurgast θ . Viirutage ülevalguskiiruse piirkond graafikul kaldjoonega (///). [4]

- (T05.3b) Leidke väikseim tegelik joa kiirus ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$), mille korral saab toimuda ülevalguskiiruse liikumine, ja lisaks ka selle vastav vaatenurk θ_{low} . [2]

- (T05.4) Leidke maksimaalse vaatenurga θ_{max} avaldis, mille puhul on antud väärtus β_{app} võimalik. [2]

Kvasari tuum, selle keskne kompaktne objekt, näitab oma emissioonis muutlikkust, mis tuleneb sisemistest protsessidest, mis toimuvad põhjuslikult seotud piirkonnas. Selle piirkonna suurus ($=$ raadius) on tavaliselt umbes viis korda suurem kui tuuma Schwarzschildi raadius.

- (T05.5) Antud kvasari tuum varieerub ajaskaalal, mis on umbes 1 h. Määrake keske kompaktse objekti massi ülempiir $M_{\text{c, max}}$ Päikese massiühikutes. [3]

(T06) Galaktiline pöörlemine
[20 punkti]

Meie galaktika pöörlemiskõver on määratud, mõõtes erinevatel galaktilistel pikkuskraadidel asuvate neutraalsete vesiniku (HI) pilvede vaatleja suunalist kiirust, kasutades selleks täpsemalt 21 cm HI joont. Vaatleme HI pilve galaktilisel pikkuskraadil l , mis asub Galaktilisest keskpunktist (GC) kaugusel R ja Päikesest kaugusel D . Olgu Päikese kaugus GC-st $R_0 = 8,5$ kpc. Eeldame, et nii Päike kui ka HI pilv tiirlevad galaktika tasapinnas GC ümber ringikujulistel orbiitidel nurkkiirustega Ω_0 ja Ω ning pöörlemiskiirustega V_0 ja V .

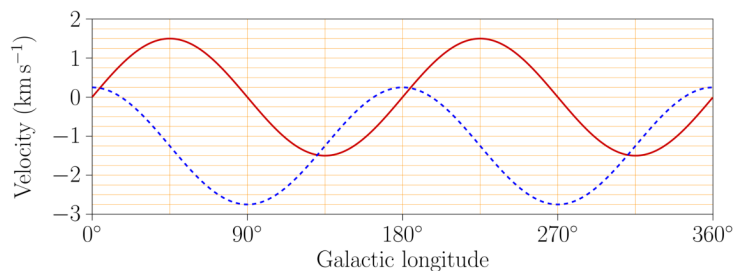
Päikeselt vaadeldes on pilve vaatlejasuunalise kiiruse (V_r) ja ristisuunalise kiiruse (V_t) komponendid väljendatavad kujul

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Galaktilise põhjapooluse poolt vaadatuna pöörleb Galaktika päripäeva. Selles ülesandes eeldame, et vaatlejasuunaline kiirus eemaldumisel on positiivne ja pilvi käsitleme punktobjektidena.

- (T06.1) Skitseerige kokkuvõtva vastustelehe graafikule V_r funktsioonina D -st piirkonnas $D = 0$ kuni $D = 2R_0$ kahe vaatesuuna korral korral, mis on määratud nurkade (i) $l = 45^\circ$ ja (ii) $l = 135^\circ$ kaudu. Märki iga oma joone/kõvera kõrval l väärtus. [5]
- (T06.2) Allolev graafik näitab Päikesest 100 pc kaugusel asuvate tähtede keskmisi radiaal- (pidev, punane kõver) ja risti- (katkendlik, sinine kõver) kiirusekomponente, mis on joonistatud funktsioonina galaktika pikkuskraadist.



Kasutades graafikut, leia Päikese tiirlemisperiood (P) GC ümber mega-aastates (Myr). [3]

- (T06.3) Jan Oort märkas, et Päikese naabruses ($D \ll R_0$) on nurkkiiruste erinevus ($\Omega - \Omega_0$) väike ja seetõttu tuletas ta järgmise esimese järgu lähenduse vaatlejasuunalise kiiruse ja ristikiiruse komponentide jaoks:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

kus A ja B on tuntud Oorti konstandidena.

Vaatleme kahte juhtumit, kus kasutame:

(I) Galaktika tegelikku vaadeldud pöörlemiskõverat ja

(II) pöörlemiskõverat hüpoteetilise stsenaariumi jaoks, kus galaktikas puudub tumeaine ja eeldatakse, et kogu galaktika mass on koondunud selle keskmisse.

- (T06.3a) Tuletage mõlema juhtumi jaoks Päikese asukohas radiaalgradient $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$. [2]

(T06.3b) Avalda A ja B avaldised V_0 , R_0 ja Päikese asukohas oleva pöörlemiskiiruse $\left[8\right]$
radiaalgradiendi $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ kaudu.

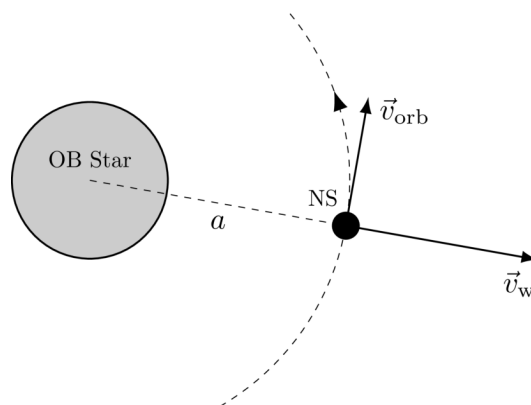
(T06.3c) Oorti konstantide suhe (A/B) kahe antud juhtumi (I) ja (II) korral on defineeritud $\left[2\right]$
vastavalt kui F_I ja F_{II} . Leidke F_I ja F_{II} .

(T07) Neutrontähe kaksiksüsteem

[20 punkti]

Tähe jäänukiga kaksiksüsteemis, kus tähe kaaslane ei asu Roche'i sfääris, on tähe jäänuki massi kasvamise peamiseks allikaks tähe kaaslasest tulev tähetuul. Tähetuulest saadav massi kasvamine on eriti oluline süsteemides, mis sisaldavad varajase tüüpi tähti (nagu O- või B-täht, edaspidi OB-täht) koos tähe jäänuki objektiga, nagu näiteks neutrontäht (NS), mis on lähestikku orbiidil.

Vaatleme sellist NS-OB-tähe kaksiksüsteemi, kus neutrontäht massiga $M_{NS} = 2.0 M_{\odot}$ ja raadiusega $R_{NS} = 11$ km tiirleb ringiratast raadiusega a ümber OB tähe keskmee kiirusega $v_{orb} = 1.5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (vt joonis allpool). Kogu selle ülesande puhul eeldage, et massikadu OB-tähest on sfääriliselt sümmeetriline ja selle kiirus on $\dot{M}_{OB} = 1.0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.



(T07.1) Massikasvamise raadius R_{acc} on defineeritud kui maksimaalne kaugus NS-st, kus NS saab $\left[3\right]$
tähetuule kinni püüda. Kui tähetuule kiirus NS-i orbitaalkaugusel on $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, leidke R_{acc} ülaltoodud süsteemi jaoks kilomeetrites, kasutades standardseid põgenemiskiiruse arvutusi.

(T07.2) Eeldades, et kogu kinnipeetud tähetuule materjal kasvatab NS massi, hinnake massi $\left[3\right]$
suurenemise kiirust $\dot{M}_{acc}$, mis saabub NS-i peale tähetuulest, ühikutes $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, kui $a = 0.5 \text{ au}$. Ärge arvestage kiirgussurve ja massi suurendava gaasi lõpliku jahutusaja mõju.

(T07.3) Nüüd vaatleme olukorda, kus tähetuule kiirus orbitaalkaugusel a (NS-i lähedal) muutub $\left[6\right]$
võrreldavaks NS-i orbitaalkiirusega. Sellisel juhul avaldub tähetuulest NS-i massi kasvamise kiirus $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$, kus $q = M_{NS}/M_{OB}$ on kaksiktähtede masside suhe ja β on tuule kiiruse suuna ja radiaalsuunaga vastasuuna vaheline nurk NS-i taustsüsteemis OB-tähe suhtes. Leidke funktsioon $f(\tan \beta, q)$ eeldades, et $M_{OB} \gg M_{NS}$.

- (T07.4) Võtame arvesse, et täielikult ioniseeritud materjal suurendab NSi massi radiaalselt ja seda takistab NSi tugev magnetväli $\vec{B}$. Seda efekti saab modelleerida rõhuna, mis on antud kui $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Eeldame, et NS-l on dipoolne magnetväli, mille suurus ekvaatoritasandil muutub sõltuvalt kaugusest r NS-st kus $r \gg R_{\text{NS}}$ kui

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

kus B_0 on magnetväli NS-i ekvaatoril. Eeldame, et magnetilise dipooli telg ühtib NS-i pöörlemisteljega.

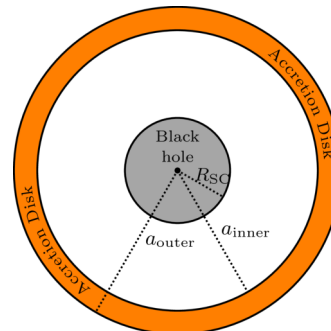
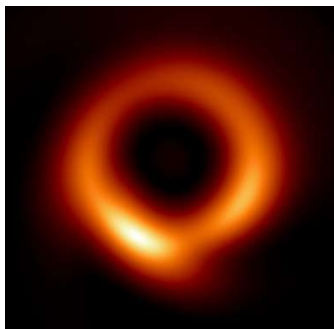
- (T07.4a) Leidke magnetilise rõhu $P_{\text{eq, mag}}$ avaldis ekvaatoritasapinnal B_0 , R_{NS} , r ja muude [1] sobivate konstantide kaudu.
- (T07.4b) Maksimaalset kaugust, kus massi suurendava materjali voolu peatab magnetväli [7] ekvaatori tasandil, nimetatakse magnetosfääri raadiuseks R_m . See ainevool avaldab survet, mis tuleneb sissetuleva tähetuule ja NS-i vahelisest suhtelisest liikumisest. Avaldage ligikaudselt kriitiline magnetväli $B_{0,c}$, mille puhul R_m langeb kokku R_{acc} väärtusega ja arvutage see väärtus Teslades. Ärge arvestage magnetiliste mõjudega, kui $r > R_m$ ja võtke arvesse, et $v_w \gg v_{\text{orb}}$.

(T08) Musta augu vari

[20 punkti]

Event Horizon Telescope (EHT) avaldas pildi M87 galaktika keskmes asuvast ülimassiivsest mustast august, nagu on näidatud alloleva joonise vasakul paneelil.

Selle pildi mõnede lihtsate omaduste mõistmiseks vaatleme lihtsustatud mudelit mittepöörlevast, staatilisest, sfääriliselt sümmeetrilisest mustast august massiga $M = 6,5 \times 10^9 M_{\odot}$. Musta augu ümbritseb massita, õhuke, tasapinnaline akretsiooniketas sisemise ja välimise raadiusega $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ ja $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, kus R_{SC} on Schwarzschildi raadius. Alloleva joonise paremal paneelil on näidatud pealtvaates visand (joonis ei ole mõõtkavas).



Eeldame, et akretsiooniketas on ainus valgusallikas, mida arvestada. Iga punkt kettal kiirgab valgust igas suunas. See valgus liigub musta augu gravitatsioonivälja mõjul. Valguskiirte teed määravad kaks allpool esitatud võrrandit (mis on sarnased Päikese ümber tiirleva objekti võrranditega):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

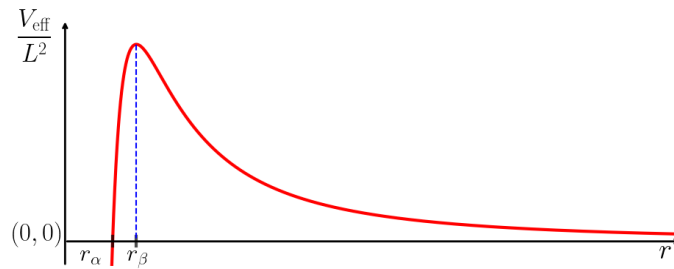
kus $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ on radiaalne koordinaat, $\phi \in [0, 2\pi)$ on asimuutnurk ning E ja L on vastavalt säilinud energia ja säilinud impulsimomendiga seotud konstandid.

Siin $v_r \equiv dr/dt$ on radiaalkiiruse magnituud, v_ϕ on tangentsiaalkiiruse magnituud ja $\omega \equiv d\phi/dt$ on nurkkiirus. Me defineerime trajektoori löökparameetri b järgmiselt: $b = L/\sqrt{2E}$. Aja laienemist selles ülesandes ei arvestata.

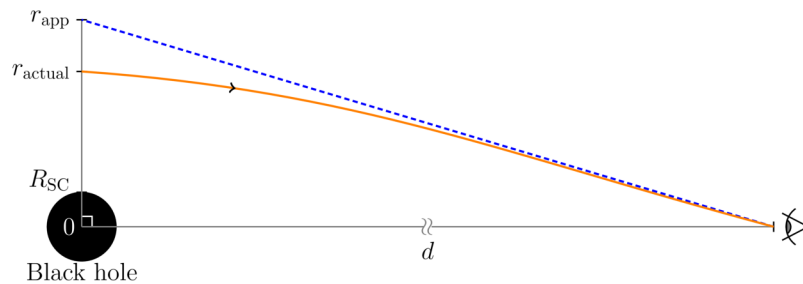
Teine kasulik võrrand saadakse esimese võrrandi diferentseerimise teel:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

- (T08.1) Musta augu ümber võivad eksisteerida ringikujulised valgustrajektooriid. Leia selliste footonite trajektooriide raadius r_{ph} ja löökparameeter b_{ph} sõltuvana M -st ja relevantsetest konstantidest.. [4]
- (T08.2) Arvuta aeg T_{ph} , mis kulub sekundites ühe täistiiru läbimiseks mööda valgustrajektoori. [2]
- (T08.3) Ülaltoodud radiaalkiiruse võrrandit (selle küsimuse esimene võrrand) on võrreldav valguse trajektooriide võrrandiga kujul $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$. Allpool on toodud skemaatiline graafik V_{eff}/L^2 väärtusest sõltuvana r -st.



- (T08.3a) Joonisel on märgitud kaks erist raadiust, r_α ja r_β . Leidke r_α ja r_β avaldised M ja asjakohaste konstantide kaudu. [2]
- (T08.3b) Akretsioonikettalt musta augu poole liikuv foton võib mõnel juhul ikkagi lõpmatu kaugele välja pääseda. Leidke sellise footoni pöördepunkti raadiuse väikseima väärtuse, r_t , avaldis, kasutades M ja relevantseid konstante. Leidke selle footoni löökparameetri minimaalse väärtuse, b_{min} , avaldis. [3]
- (T08.4) Taeva tasapinnal süsteemi keskpunktist radiaalkauguselt r_{actual} lähtuv valguskiir paindub musta augu raskusjõu tõttu tugevalt ning jõuab lõpuks süsteemist suurel d kaugusel asuva vaatlejani (tähistatud silmaga), nagu allpool näidatud.

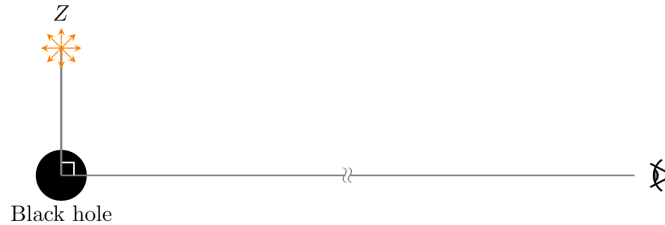


Sellele vaatlejale näib kiir pärinevat teisest punktist, mis asub taeva tasapinnal musta augu keskpunktist kaugusel $r_{app} \approx b$, kus b on antud footontrajektoori pörkeparameeter. Akkretsioonikettal kaugusel $r = r_{actual}$ asuvate punktide jaoks võib eeldada järgmist seost:

$$b(r_{actual}) \approx r_{actual}(1 + R_{SC}/r_{actual})^{1/2}$$

- Kauge vaatleja jaoks, kes nagu meiegi vaatab akkretsioonikettale otse peale, paistab süsteemi kujutis taeva tasandil ringikujuliselt sümmeetrilisena. Määrake kujutise välimine näiv raadius r_{outer} ja sisemine näiv raadius r_{inner} astronoomilistes ühikutes (au). [5]

- (T08.5) Vaatleme isoleeritud ülimalt massiivset musta auku massiga $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$, millel puudub akretsiooniketas. Joonisel pärgitud punktis Z, mis asub mustast august teatud kaugusel, näiteks $r_Z = 6R_{SC}$, toimub lühike (kestusega 5 sekundit) ja tugev elektromagnetkiirguse purse. Punktis Z toimuv purse kiirgab valgust igas suunas. Mustast august kaugel asuvas punktis (alloleval joonisel tähistatud silmaga) asuv vaatleja teeb musta auku ümbritsevast piirkonnast 60 sekundi jooksul pika säriajaga pildi.



Valige allolevate väitete kohta õige variant:

- (T08.5a) Valguse võimalike teede arv, mis võivad liikuda punktist Z vaatlejani, on [2]
(A) Maksimaalselt üks (B) Täpselt üks (C) Täpselt kaks (D) Suurem kui kaks.
- (T08.5b) Pika säriajaga pildil nähtavate Z-punktis toimunud EM-purske kujutiste arv on [2]
(A) Maksimaalselt üks (B) Täpselt üks (C) Täpselt kaks (D) Suurem kui kaks.

(T09) Atmosfääri nägemine

[35 punkti]

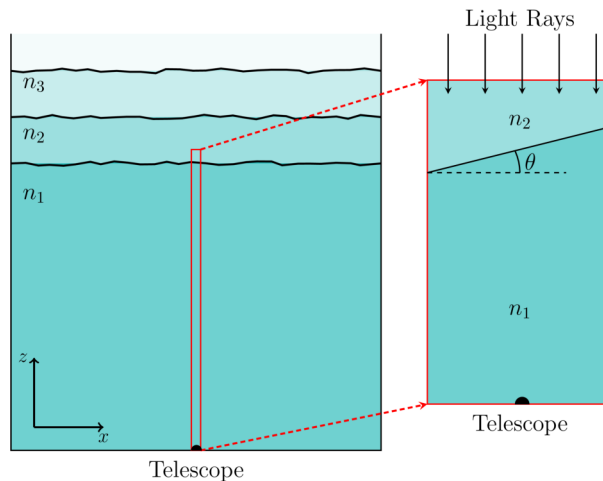
Teleskoop, millel on akromaatiline kumer lääts läbimõõduga $D = 15$ cm ja fookuskaugusega $f = 200$ cm, on suunatud zeniidis asuvale tähele.

- (T09.1) Leia punktallika kujutise läbimõõt d_{image} (meetrites) mis tekib läätse fokaaltasapinnal roheline [1]
valgusega ($\lambda = 550$ nm), võttes arvesse ainult difraktsiooni mõju.

Astronoomilise allika kujutist mõjutab ka nn "atmosfääriline nägemine".

Atmosfääri kihtide vahelised piirid ja kihtide murdumisnäitajad muutuvad pidevalt turbulentsuse, temperatuuri muutumise ja muude tegurite tõttu. See toob kaasa pisikesi muutusi kujutise asukohas teleskoobi fokaaltasapinnal, mida tuntakse kui "tuikumise efekti". Ülejäänud ülesande puhul, peale eespool käsitletud difraktsiooni tõttu kujutise piiratud lõpliku suuruse, ei võeta arvesse interferentsiefekte.

Alljärgneva joonise vasakul paneelil on kujutatud atmosfääri vertikaalne läbilõige mitme erineva murdumisnäitajaga kihiga ($n_1, n_2, n_3, \dots$). Paremal paneelil on kujutatud atmosfääri õhukese vertikaalse lõigu suurendatud vaade ja kahe madalaima murdumisnäitajatega atmosfäärikihi n_1 ja n_2 vaheline piir ($n_1 > n_2$). Käesolevas probleemis käsitleme ainult neid kahte kihti ja nende piire. Diagrammid ei ole mõõtkavas.

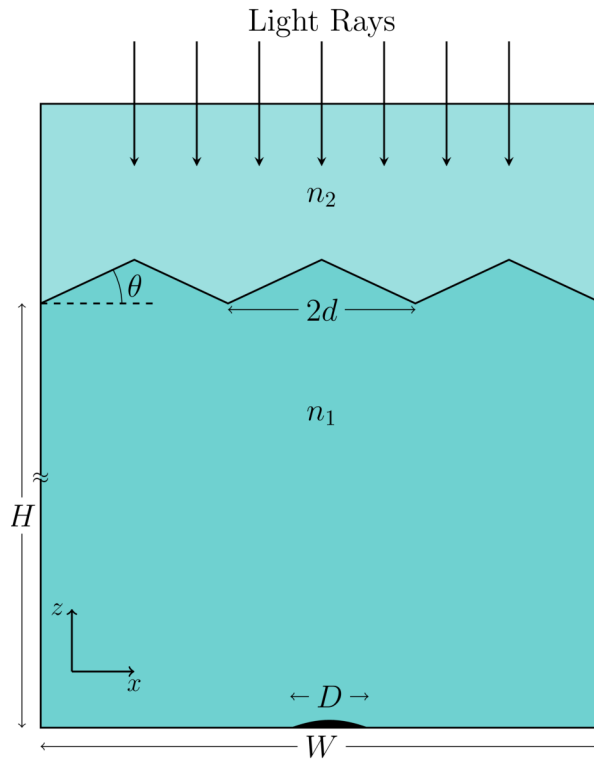


- (T09.2) Olgu kahe kihi vaheline piir kõrgusel $H = 1$ km otse teleskoobi kohal, kihtidevahelise piiri kalle horisontaaltasapinna suhtes on $\theta = 30^\circ$. Selle ülesande kõikides osades on θ positiivne suund defineeritud vastupäevases suunas. Monokromaatilise valgusallika puhul on $n_1 = 1.00027$ ja $n_2 = 1.00026$. Olgu kujutise nurknihe α mis tekib fokaaltasandile zeniidis olevast tähest.
- (T09.2a) Joonista tähistatud kiirte käik atmosfääri kihtide piiril, millele on märgitud n_1, n_2, θ ja α . [2]
- (T09.2b) Leidke α avaldis θ, n_1 ja n_2 kaudu. Kasutage väikese nurga lähendusi: $\sin \alpha \approx \alpha$ ja $\cos \alpha \approx 1$. [2]
- (T09.2c) Arvutatakse kujutise asukoha nihkumine Δx_θ (meetrites), kui θ suureneb 1% võrra [3] (hoides n_1 ja n_2 konstandina).
- (T09.2d) Arvutatakse kujutise asukoha nihkumine Δx_n (meetrites), kui n_2 suureneb 0,0001% [3] võrra (hoides n_1 ja θ konstandina).
- (T09.3) Vaadeldes valget valgust mis tuleb zeniidis asuvast tähest, milline järgmistest variantidest kirjeldab kõige paremini kujutise kuju ja värvi, märgistades (✓) see vastuste kokkuvõtte lehel vastava kasti (ainult üks). Märkus. x suureneb joonisel vasakult paremale. [2]

	Kujutise värvus	Kujutise kuju	Vasakpoolne serv	Parem serv
A	Valge	Ringikujuline		
B	Valge	Elliptiline		
C	Värviline	Ringikujuline	Sinine	Punane
D	Värviline	Ringikujuline	Punane	Sinine
E	Värviline	Elliptiline	Sinine	Punane
F	Värviline	Elliptiline	Punane	Sinine

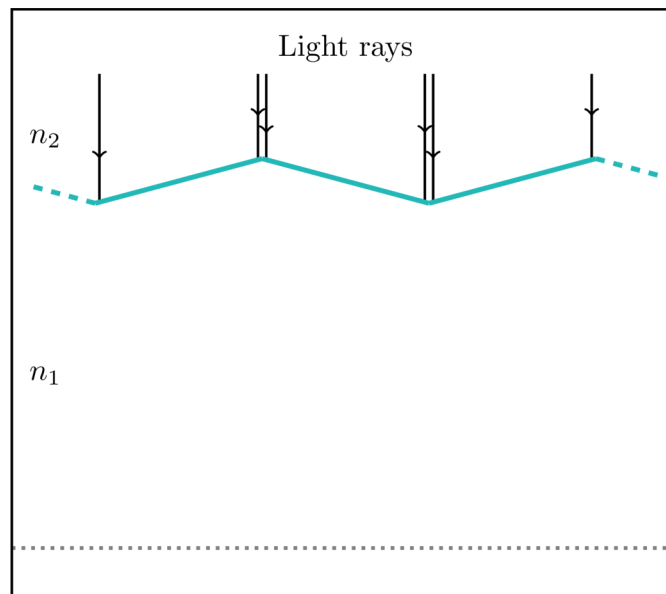
Kõigi ülejäänud küsimuste puhul käsitleme monokromaatilist rohelist valgust, mille $\lambda = 550$ nm. Modelleerime kihtide vahelist piiri kui lõpmatute siksakiliste tasapindade kogumit (mis kulgevad risti lehe tasandiga), mis on eraldatud $d = 10$ cm piki x -telge, kusjuures $\theta = 10^\circ$ või $\theta = -10^\circ$.

Allpool esitatud joonisel (ei ole mõõtkavas) on kujutatud selle atmosfääri mudeli ristlõige laiussega W ($W \ll H$). Suure avaga teleskoopide puhul põhjustab see siksiline piir siksiline iseloom fokaaltasapinnal täppide tekkimist.



(T09.4) Vaatleme eespool kirjeldatud atmosfääri mudelit.

(T09.4a) Joonisel on esitatud atmosfääri läbilõige järjestikuste siksakiliste tasapindadega, mille parameetrid on samad, mis eespool esitatud (ei ole mõõtkavas).



Joonistage kokkuvõttes vastuste lehel olevale joonisele, langevate valguskiirte edasine käik kuni tasandini, kuhu teleskoobi objektiiiv on asetatud, mida näitab hall katkendlik joon.

Märkige joonisele "X" abil piirkon(na)d, kuhu valguskiired ei jõua.

[4]

(T09.4b) Arvutage sellise(te) piirkonna/piirkondade laius W_X .

[3]

(T09.4c) Leida teleskoobi lääts suurim lähimõõt $D_{\max}$, millega on võimalik saada üksiku tähe kujutis, teleskoobi asukohta antud punktiirjoone tasandil saab vabalt valida.

[4]

- (T09.5) Vaatleme juhtu, kus piiride siksakiline kuju on lubatud nii x kui ka y suunas ja $D = 100$ cm [6]
(kusjuures $f = 200$ cm).

Joonistage saadud täpikeste kvalitatiivne muster kokkuvõtliku vastuse lehel esitatud kasti.

- (T09.6) Turbulentse atmosfääri puhul vaatleme taas sama paralleelselt kulgeva siksakilise piirikihi kuju [5]
ainult piki x -suunda, kuid nüüd muutub kahe tasandi vaheline nurk ühtlase kiirusega 10° -st –
 10° -ni 1,0 s jooksul. Eeldame, et see toob kaasa kujutise asukoha ühtlase nihkumise kiiruse.

Vaatleme teleskoopi, mille $D = 8$ cm ja $f = 1$ m. Hinnake, mis on selle CCD-kaamera pikim
lubatud säriaeg $t_{\max}$, nii et saadakse ainult üks pilt ja selle asukoha võimalik kõrvalekalle jääb alla
1% pildi difraktsiooni piiratud diameetrist.

(T10) Suure Paugu Nukleosüntees

[35 punkti]

Varase Universumi kiirguse domineeritud ajastul oli Universumi skaalategur $a \propto t^{1/2}$, kus t on aeg Suurest
Paugust. Suurema osa sellest ajastust püsisid neutronid (n) ja prootonid (p) nõrga interaktsiooni efektide kaudu
termilises tasakaalus. Vabade neutronite või prootonite arvutihedus (N) on seotud temperatuuriga T ja nende
vastavate massidega m nii, et

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right).$$

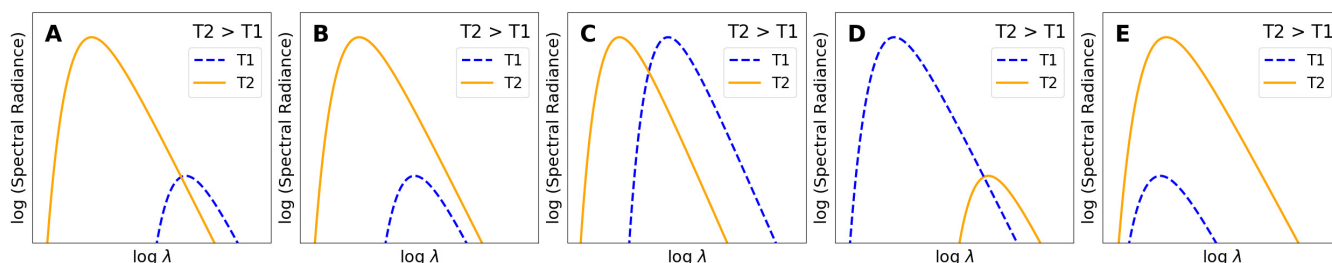
Suhe kehtib seni, kuni aeg $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70$ s, kui $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. Pärast t_{wk} ei suuda nõrgad
interaktsioonid enam sellist tasakaalu säilitada ja vabad neutronid lagunevad prootoniteks poolestusajaga 610,4
sekundit.

- (T10.1) Olgu prootonite arvutihedus N_p ja neutronite arvutihedus N_n . Arvutage neutronite suhteline [4]
küllus, mis on antud suhtega $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ ajahetkel t_{wk} .

- (T10.2) Footonid säilitavad termilise tasakaalu ja säilitavad oma musta keha spektri kõigil epohhidel.

- (T10.2a) Leidke indeks β , nii et $T(a) \propto a^\beta$. [2]

- (T10.2b) Tuvastage, milline järgmistest graafikutest näitab spektraalse energiatiheduse õiget [2]
käitumist kahe temperatuuri T_1 ja T_2 korral. Märki linnuke (✓) õige vastuse ette
kokkuvõtvas vastustelehes.

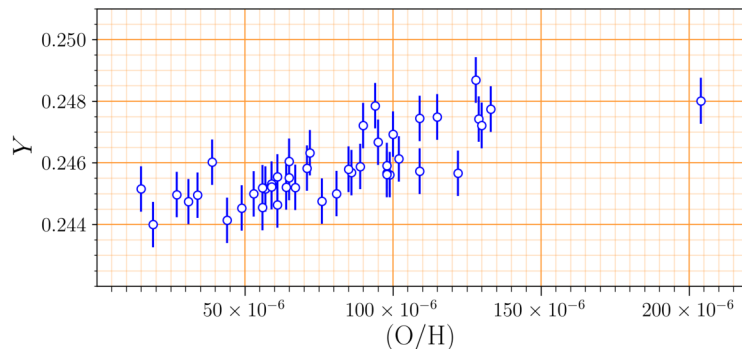


- (T10.3) Pärast t_{wk} , hakkab deuteeriumi moodustumise protsessi prootonitest ja neutronitest reguleerima
India füüsiku professor Meghnad Saha leitud Saha võrrand, mida saab lihtsustatult esitada kujul

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5 \eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T}\right).$$

Siin on bariionide ja footonite suhe $\eta 6.1 \times 10^{-10}$ ja N_D on deuteeriumi arvutihedus.

- (T10.3a) Joonesta N_D/N_n suhe kokkuvõtlike vastuste lehe ruudustikule vähemalt nelja mõistlikult eraldatud temperatuuriväärtuse jaoks, mis asuvad vahemikus $k_B T = [60, 70]$ keV, ja joonista läbi nende punktide sile kõver. [5]
- (T10.3b) Leia graafikult $k_B T_{\text{nuc}}$ (keV-des), mil $N_D = N_n$. [1]
- (T10.3c) Vahelduseks eeldame nüüd, et kõik vabad neutronid ühinevad hetkega prootonitega $k_B T_{\text{nuc}}$ juures, moodustades deuteeriumi, ja kõik see muundub kohe heeliumiks (${}^4_2\text{He}$). Arvutage vastav nukleosünteesi epohh või aeg t_{nuc} (s) heeliumi moodustumiseks. [4]
- (T10.4) Arvutage $X_{n, \text{nuc}}$ väärtus vahetult enne t_{nuc} . [5]
- (T10.5) Heeliumi algne küllus, Y_{prim} , on defineeritud kui osa kogu barüoonilisest massist universumis, mis on seotud heeliumis vahetult pärast t_{nuc} . Leidke Y_{prim} väärtuse teoreetiline hinnang. Ainult selle arvutuse jaoks eeldame, $m_p \approx m_n$ ja et heeliumi mass $m_{\text{He}} \approx 4m_n$. [3]
- (T10.6) Heeliumi ürgset küllust on väga raske mõõta, kuna tähed muundavad universumis pidevalt vesinikku heeliumiks. Galaktikas tähtede poolt töötlemise hulka iseloomustab hapniku (mida toodavad ainult tähed) ja vesiniku suhteline arvutihedus galaktikas, mida tähistatakse kui (O/H). Allpool on esitatud kokkuvõtte erinevate galaktikate (O/H) ja heeliumi külluse mõõtmistest Y .



Kasuta kõiki sellel graafikul olevaid punkte (mis on esitatud ka kokkuvõtvas vastustelehes), et vastata järgmisele küsimusele.

- (T10.6a) Hinnake sinise kompaktse käabusgalaktika Y väärtust, mille $(\text{O}/\text{H}) = 1,75 \times 10^{-4}$. [2]
- (T10.6b) Leidke ülaltoodud andmetele vastava sirge joone tõus $dY/d(\text{O}/\text{H})$. [2]
- (T10.6c) Hinnake ürgse heeliumi sisaldust $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, ülaltoodud vaatluste põhjal. [2]
- (T10.7) Hälvet Y_{prim} ja $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ vahel saab võrrelda barüoni ja footoni suhte η muutmisega. Kui η väheneb, nagu on näidatud $\downarrow$ -ga kokkuvõtval vastustelehel, märkige sellest tulenevalt suurenemise puhul $\uparrow$ ja kahanemise puhul $\downarrow$ suuruste $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (kui $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$ ja Y_{prim} kõrval kokkuvõtvas vastustelehes olevatesse lahtritesse. [3]

(T11) Tähed läbi graafikute

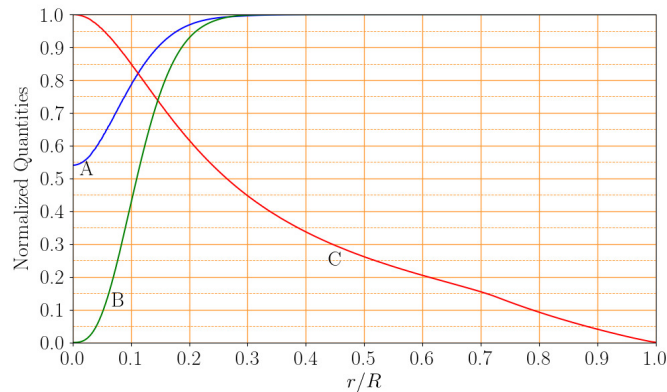
[50 punkti]

Tähti saab hästi lähendada sfäärilisteks sümmeetrilisteks objektideks ja seega võib tähtede sisemuse modelleerimisel valida ainsa sõltumatu muutujana radiaalkauguse r tähe keskpunkti. Raadiusega r sfääris sisalduvat massi tähistatakse $m(r)$. Heledus $l(r)$ on defineeritud kui koguenergia, mis voolab ajaühiku kohta läbi sfäärilise pinna raadiusega r väljapoole. Muud huvipakkuvad suurused, näiteks tihedus $\rho(r)$, temperatuur $T(r)$, vesiniku massiosa $X(r)$, heeliumi massiosa $Y(r)$ ja tekkiv tuumaenergia massi- ja ajaühiku kohta $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, on funktsioonid sisendist r . Kogu selle probleemi jooksul ära arvesta difusiooni ja gravitatsiooni mõju, mis on seotud elementide settimisega tähe sees.

Sümbol "log" tähistab logaritmi baasiga 10. Ülesanne koosneb kolmest iseseisvast osast.

(T11.1) **Osa 1: Tähe sisemus**

Allpool esitatud graafik näitab kolme struktuurilise suuruse A, B ja C muutumist fraktsionaalse raadiuse r/R funktsioonina tähe mudelis, mille mass on $1 M_{\odot}$ ja vanus 4 GYr, kus R on tähe fotosfääri raadius. Tähe (fotosfääri) pinnal oleva heeliumi massiosa Y_s ja (fotosfääri) pinnal oleva metallikuse (kõigi heeliumist raskemate elementide massiosa) Z_s väärtused on antud $(Y_s, Z_s) = (0.28, 0.02)$. Kõik graafikutel esitatud suurused on normaliseeritud nende suuruste vastavate maksimumväärtuste järgi.



(T11.1a) Tuvastage ja nimetege need kolm suurust A, B ja C unikaalselt viie võimaluse hulgast: [6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Kirjutage A/B/C vastuste kokkuvõtte lehel vastavate suuruste kõrval olevatesse lahtritesse. Vastus põhjendada ei pea).

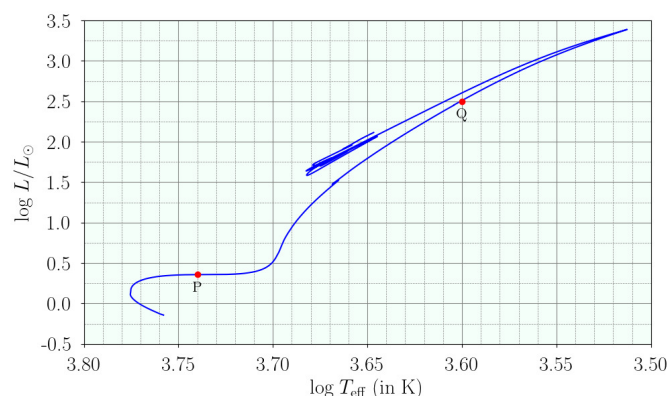
(T11.1b) Kui suur on heeliumi massiosa Y_c tähe keskmes? [3]

(T11.1c) Skitseerige ülejäänud kaks suurust viiest loetelust (mis ei ole määratletud kui kõverad A, B või C), mis on esitatud punktis (T11.1a), funktsioonidena r/R samal graafikul kokkuvõtliku vastuse lehel ja tähistage neid vastavate suuruste tähistega. [5]

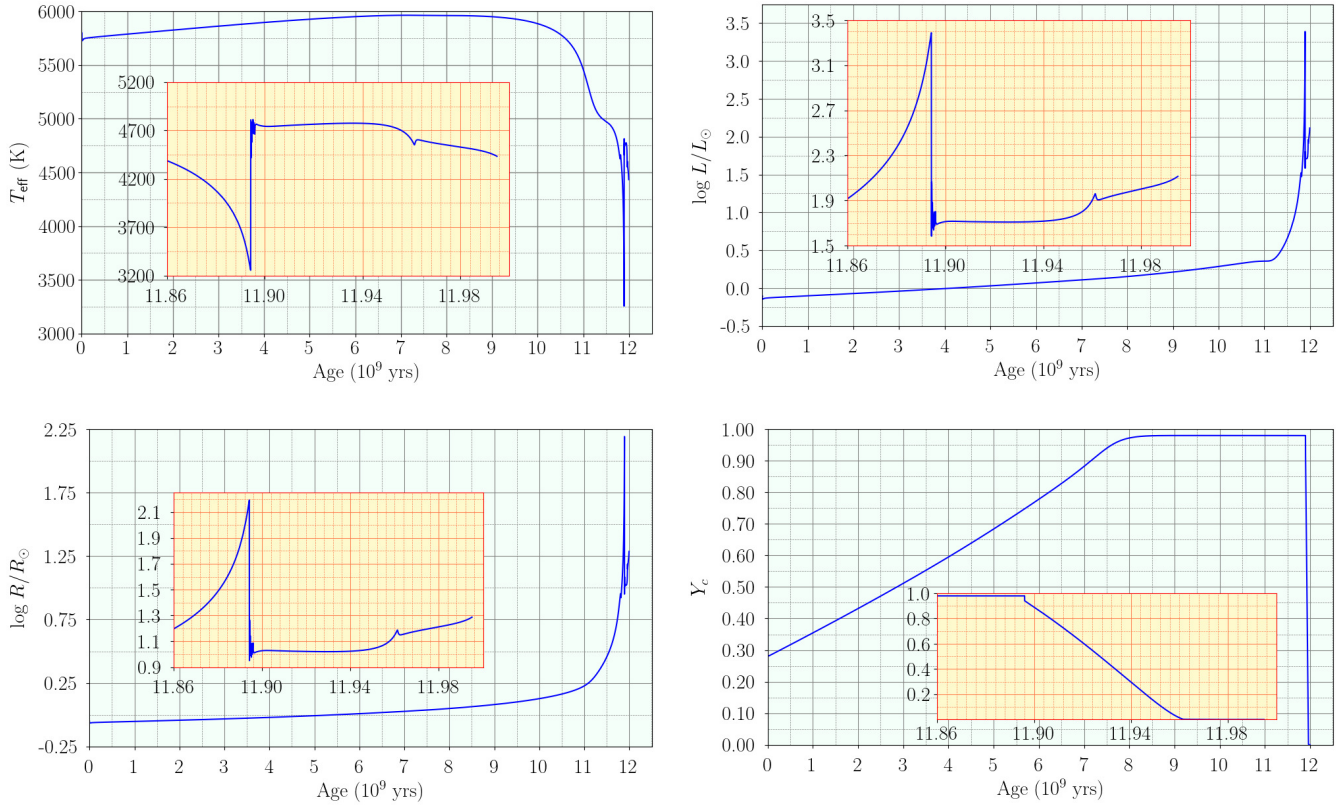
(T11.2) **2. osa: Arenevad tähed**

Vaatleme $1M_{\odot}$ tähe arengut, mille esialgne ühtlaselt jaotunud koostis on antud massiosadega $Y_0 = 0.28$ heeliumile ja $Z_0 = 0.02$ metallidele. Järgnevatel joonistel on näidatud selle tähe erinevate globaalsete suuruste muutumine, kui täht areneb alates ZAMS-ist (Zero Age Main Sequence) kuni heeliumi põletamise lõpuni selle tuumas.

Allpool olev graafik näitab tähe evolutsioonijoonist HR-diagrammil (graafikul on $\log L/L_{\odot}$ sõltuvus $\log T_{\text{eff}}$, kus L on pinna heledus ja T_{eff} on efektiivne temperatuur).



Allpool esitatud joonisel on neli graafikut, mis näitavad sama tähe suurusi T_{eff} (Kelvinis), L (graafikule kantud kui $\log L/L_{\odot}$), R (graafikule kantud kui $\log R/R_{\odot}$) ja Y_c muutumist tähe vanusega (10^9 aastate jooksul). Kõigis neis neljas graafikus on selguse huvides esitatud vastavate suuruste muutumine üksikasjalikult vanuse 11.86×10^9 aasta kuni 12.00×10^9 aasta vahel.



Kasutage neid graafikuid allpool esitatud küsimustele vastamiseks.

- (T11.2a) Milline on selle tähe ligikaudne peajada eluiga t_{MS} (aastates)? [1]
- (T11.2b) Milline on ligikaudne kestus, Δt_{He} (aastates), mille jooksul täht põletab oma tuumas heeliumi? [1]
- (T11.2c) Kui suur osa, f_{H} , algsest vesiniku kogusest on selle keskmis ära põlenud, kui tähe heledus on $1 L_{\odot}$? [3]
- (T11.2d) Kui suur on tähe raadius R_1 (ühikutes $R_{\odot}$), kui 60% algsest vesinikukogusest on selle keskmis ära põlenud? [3]
- (T11.2e) Millised on tähe raadiused R_P ja R_Q (ühikutes $R_{\odot}$), mis vastavad vastavalt tähe positsioonidele P ja Q, nagu on need märgitud HR - diagrammil? [4]

(T11.3) Osa 3: Massi jaotumine tähe sees

Võrrand, mis kirjeldab massi jaotumist tähe sees, on esitatud kujul

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Seda võrrandit oleks mugav väljendada kolme ühikuta muutuja kaudu, nimelt murdosa massi q , murdosa raadiuse x ja suhteline tihedus σ abil mille defineerime järgmiselt:

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

kus M ja R on vastavalt tähe kogumass ja raadius, ja $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ on tähe keskmine tihedus.

Konkreetses tähe kohta, mida me selles osas käsitleme, on esitatud järgmine teave:

- Keskne tihedus $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$
- Pool tähe massist asub tähe kogu raadiuse sisemise 25% piires ja 70% tähe massist asub tähe kogu raadiuse sisemise 35% piires.

Kõigis järgnevates osades piisab sellest, kui kõik tuletatud arvulised koefitsiendid ümardatakse 0,005 piires.

(T11.3a) Avalda ülaltoodud võrrand, mis kirjeldab massi sõltuvust raadiusest suuruste x , $\frac{dq(x)}{dx}$ ja $\sigma(x)$ kaudu [2]

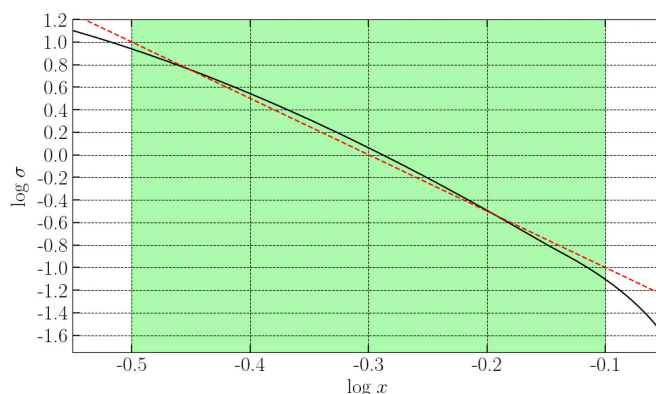
Selleks, et saada massi jaotus koos raadiusega, peame teadma tihedusprofili tähe sees. Selle probleemi lahendamiseks kirjeldame tiheduse ligikaudset muutumist raadiusest kahel vahemikul x :

- Tähe sisemine osa: $0 \leq x \leq 0.32$
- tähe keskosa: $0.32 < x < 0.80$

Me ei tee mingit lähendust kõige välimistele osadele, st $0.80 \leq x \leq 1.00$.

(T11.3b) **Lähendus keskmise osa jaoks:**

Suuruse $\log \sigma$ muutumine sõltuvalt suurusest $\log x$ tähe keskmises osas on näidatud (musta kõveraga) alljärgneval graafikul. Teeme lineaarse lähenduse (näidatud graafikul katkendliku punase joonena) $\log \sigma$ funktsioonile sõltuvuses suurusest $\log x$ vahemikus $-0.5 < \log x < -0.1$, st $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (näidatud rohelise varjundiga alal). Lisaks edasi ümardame selle sirge tõusu veel lähima täisarvuni.



Kasutage seda lähendust, et kirjutada avaldus $\sigma(x)$ funktsioonina sõltuvaks suurusest x vahemikus $0.32 < x < 0.80$. [4]

(T11.3c) Kasutage punkti (T11.3b) tulemust, et tuletada avaldis $q(x)$ jaoks vahemikus $0.32 < x < 0.80$. [6]

(T11.3d) **Sisemise osa lähendamine:**

Tähe siseosas ($0 \leq x \leq 0.32$) võib tihedust lähendada kui lineaarset funktsiooni raadiusest, st $\sigma(x) = Ax + B$, kus A, B on konstandid. Leidke A ja B väärtused ning seeläbi leidke avaldis $q(x)$ vahemikus $0 \leq x \leq 0.32$. Pange tähele, et eelmises ja käesolevas osas kasutatud lähendused võivad põhjustada väikeseid tiheduse või massi avaldise katkestusi $x = 0.32$ juures. [8]

(T11.3e) Osades (T11.3c) ja (T11.3d) saadud avaldised $q(x)$ on lähendused, mis kirjeldavad massi muutumist raadiusega üsna hästi, kuid ainult tähe teatud piirkondades. Piirkonna $0.80 \leq x \leq 1$ puhul (mille kohta me ei ole tuletanud ühtegi avaldist) on võimalik kasutada asjakohast ekstrapoleerimist naaberpiirkondadest. Kasutage neid ligikaudseid avaldise ja antud andmeid, et visandada kogu tähe ($0 \leq x \leq 1$) massi $q(x)$ muutumist sõltuvana raadiusest x kirjeldav sile kõver (ilma igasuguste katkestusteta nii $q(x)$ kui ka selle tuletises). [4]

(T12) Mustade aukude Hawkingi kiirgus

[50 punkti]

(T12.1) Must auk (BH) tekib tavaliselt massiivse tähe gravitatsioonilise kokkuvarisemise tagajärjel selle elutsükli lõpus punkti, mida nimetatakse singulaarsuseks. Sellise objekti äärmise gravitatsiooni tõttu ei pääse miski, mis siseneb nn sündmuste horisonti (sfääriline pind raadiusega $r = R_{\text{SC}}$, kus r on kaugus singulaarsusest). Antud ülesandes on R_{SC} Schwarzschildi raadius.

(T12.1a) **Hawkingi kiirguse päritolu modelleerimine:** Vaatleme osakeste paari, mille kummagi mass on m ja mis on tekkinud üks ühel, teine teisel pool BH horisonti. Üks osake asub horisondist veidi väljaspool $r \approx R_{\text{SC}}$, samas kui teine osake asub horisondi sees $r = \kappa R_{\text{SC}}$. Eeldame, et osakese koguenergia on tema seisumassi energia mc^2 ja BH-st tuleneva gravitatsioonilise potentsiaalse energia summa.

Määrake κ väärtus, mille korral osakeste paari koguenergia on null.

[4]

(T12.1b) **Musta augu temperatuur:** Kui ülaltoodud protsessi käigus väljaspool horisonti tekkinud osakesel on piisavalt kineetilist energiat, võib see mustast august (BH) väljuda protsessis, mida nimetatakse Hawkingi kiirguseks. Horisondi sees olev osake, millel on negatiivne energia, neeldub ja vähendab BH massi.

Eeldame, et kogu Hawkingi kiirgus koosneb footonitest, mille musta keha spekter saavutab haripunkti lainepikkusel $\lambda_{\text{bb}} \approx 16R_{\text{SC}}$. On teada, et Päikese massiga BH korral $R_{\text{SC}, \odot} = 2.952 \text{ km}$.

Leia avaldis BH temperatuuri T_{bh} jaoks, kui seda iseloomustab ülal kirjeldatud musta keha kiirgus. Esita vastus selle massi M_{bh} ja füüsikaliste konstantide kaudu. Arvuta ka Schwarzschildi raadius $R_{\text{SC}, 10\odot}$ ja temperatuur $T_{\text{bh}, 10\odot}$ musta augu jaoks, mille mass on $10 M_{\odot}$. [4]

(T12.1c) **Musta augu massikaotus:** Eeldame, et Hawkingi kiirgus kiirgab sündmuste horisondist.

Kasutades massi-energia ekvivalentsus, leidke massikao kiiruse $dM_{\text{bh}}(t)/dt$ avaldis BH massi $M_{\text{bh}}(t)$ ja füüsikaliste konstantide kaudu.

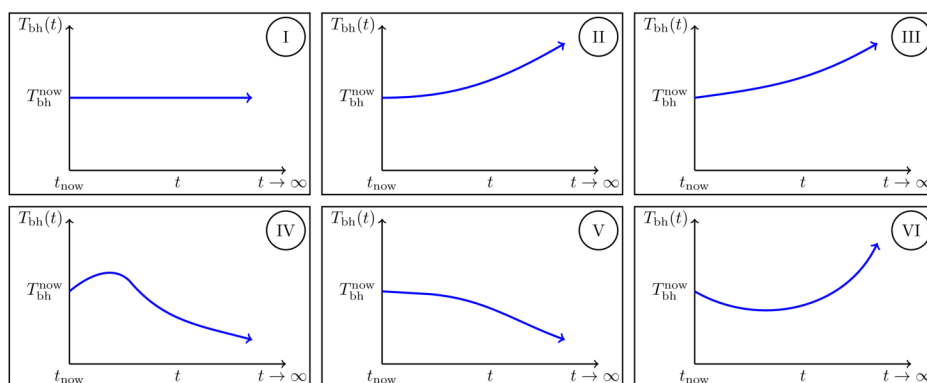
Seega leidke avaldis $M_{bh}(t)$ jaoks BH jaoks algmassiga M_0 . Joonistage $M_{bh}(t)$ funktsioonina t -st vahemikus $M_{bh} = M_0$ kuni $M_{bh} = 0$. [8]

(T12.1d) **Musta augu eluiga:** Leidke avaldis eluea τ_{BH} jaoks, mille jooksul must auk algmassiga M_0 Hawkingi kiirguse tõttu täielikult aurustub, kasutades M_0 ja füüsikalisi konstante. Arvutage musta augu eluiga $\tau_{bh,10\odot}$ (sekundites), kui $M_0 = 10 M_\odot$. [3]

(T12.1e) **Must auk CMB kiirgusvannis:** Vaatleme isoleeritud musta auku kosmoses, kaugel teistest kehadest, mille praegune temperatuur on T_{bh}^{now} ja mida ümbritseb kosmiline mikrolaine taustkiirgus (CMB), mille praegune temperatuur on $T_{cmb}^{now} = 2,7$ K. Musta augu mass võib kasvada CMB kiirguse neeldumise tõttu ja kaotada oma massi Hawkingi kiirguse tõttu.

Võttes arvesse Universumi kiirenevat paisumist, tehke kindlaks, milline järgmistest joonistest näitab T_{bh} pikaajalist ajalist evolutsiooni järgmisel kolmel juhul:

X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Vastus märkige kokkuvõtliku vastustelehe tabelis iga juhtumi X, Y või Z puhul vastava [6]
joonise numbriga vastavasse lahtrisse (ainult ühte) linnuke.

(T12.2) Väga varajases universumis võisid tekkida palju väiksema massiga ürgsed mustad augud (PBH-d). Kõik järgnevad küsimused on seotud PBH-dega. Siin võib kõik protsessid, mis suurendavad musta augu massi, unarusse jätta.

(T12.2a) **PBH-de aurustumine praegusel epohhil:** Nagu te ehk eelmiste küsimuste vastustest märkasite, kuluks Päikese massiga mustadel aukudel aurustumiseks kaua aega. Kuna PBH-del võib aga olla palju väiksem mass, võime neid tänapäeval aurustumas näha.

Leia algmass $M_{0, PBH}$ (kg), Schwarzschildi raadius $R_{SC, PBH}$ (m) ja temperatuur T_{PBH} (K) musta augu jaoks, mis võib praegusel epohhil täielikult aurustuda, st mille eluiga $\tau_{PBH} = 14$ miljardit aastat. [4]

(T12.2b) **PBH teke:** Kiirguse poolt domineeritud varajases universumis varieerub skaalategur järgmisel viisil: $a(t) \sim t^{1/2}$. Selles ajastus tekivad PBH-d kogu energia kokkuvarisemise tõttu piirkonnas, mille füüsiline suurus on ct , kus t on universumi vanus sel ajal.

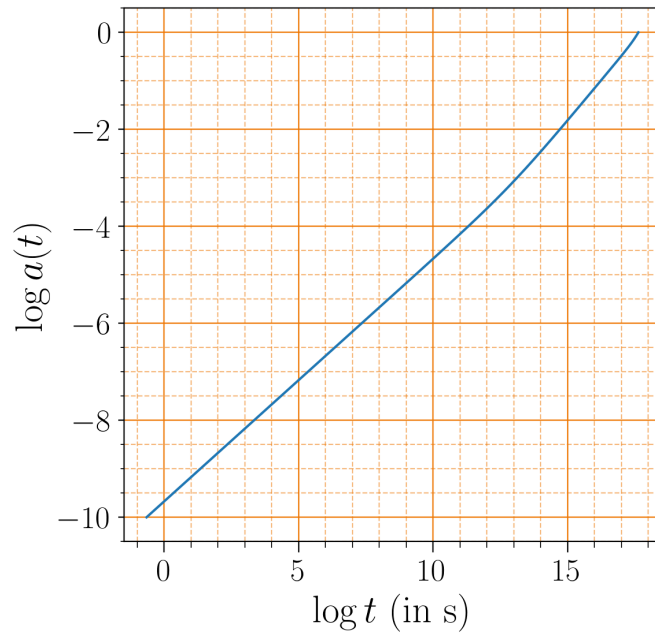
Universumi vanuseks on umbes 1×10^{-23} s, kui moodustub 1×10^{12} kg massiga PBH. [6]
Arvutage universumi vanus, t_{20} , kui moodustub 1×10^{20} kg massiga PBH.

(T12.2c) **PBH-st pärineva Hawkingi kiirguse spekter:** Vaatleme PBH-d algmassiga 1×10^{10} kg, mis oma eluea τ_{PBH} lõpus täielikult aurustub. Selle ülesande jaoks eeldame lihtsuse mõttes, et suurem osa Hawkingi kiirgusest kiirgub sel ajal temperatuuriga, mis vastab selle algmassile. Samuti võtame kasutusele Universumi skaalateguri kujul ajast sõltuvana kujul $a(t) \sim t^{2/3}$.

Arvutage selle Hawkingi kiirguse tipplaine pikkus, mida Maal täheldati, λ_{earth} , [5]
praegusel epohhil ($t = 14$ miljardil aastal).

(T12.2d) **PBH-st tulev kõrge energiaga kosmiline kiirgus:** eeldame nüüd, et antud ajahetkel t kiirgav Hawkingi kiirgus vastab footonitele, mille energia on $k_B T_{\text{bh}}(t)$. Samuti on musta augu jaoks kõrgeim võimalik temperatuur Plancki temperatuur T_{Planck} , kus $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Skaalateguri areng asjakohaste ajaskaalade lõikes on esitatud järgmisel joonisel. Tänapäeval on skaalategur seatud ühele. Ajateljel olev $t(s)$ tähistab universumi vanust sekundites.



Kui Maal on vaadeldakse footonit energiaga $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$ eV, määrake selle [10]
footoni eest vastutava PBH algmassi suurim ja väikseim võimalik väärtus (vastavalt M_0^{max} ja M_0^{min}).