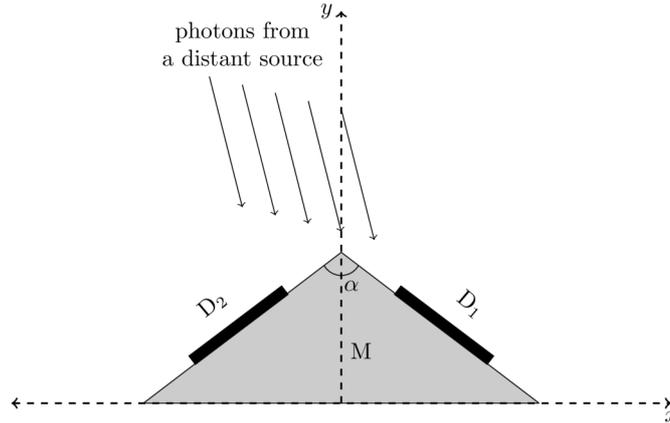


(T01) Misión Daksha

[10 puntos]

“Daksha” es una misión propuesta de la India que consiste en dos satélites S_1 y S_2 orbitando la Tierra en la misma órbita circular de radio $r = 7000$ km pero con una diferencia de fase de 180° . Estos satélites observan el universo en el dominio de alta energía (rayos X y γ -rayos). Cada uno de los satélites de Daksha utiliza varios detectores planos y rectangulares.

Para entender cómo localizar una fuente en el cielo, utilizaremos un modelo simplificado de la misión Daksha. Supongamos que S_1 tiene solo dos detectores idénticos D_1 y D_2 , cada uno con un área de $A = 0.50\text{m}^2$, adjuntos a un soporte opaco M como se muestra en la figura a continuación. Los detectores se encuentran simétricamente alrededor del eje y en planos perpendiculares al plano $x-y$ y forman un ángulo $\alpha = 120^\circ$ entre sí.



- (T01.1) Al observar una fuente distante ubicada en el plano $x-y$, el detector D_1 registra una potencia $P_1 = 2.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$ y el detector D_2 registra una potencia $P_2 = 4.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$.

Estime el ángulo η formado por el vector de posición de la fuente con el eje y positivo, [5] considerando positivo el ángulo en sentido antihorario desde el eje y positivo.

Considere un solo pulso de una fuente distante (no necesariamente en el plano $x-y$) registrado por ambos satélites (S_1 y S_2) de Daksha. Los tiempos de los picos de los pulsos registrados por S_1 y S_2 son t_1 y t_2 , respectivamente.

- (T01.2) Si $t_1 - t_2$ fue medido como 10.0 ± 0.1 ms, entonces determina la fracción, f , de la esfera celeste [5] donde podría encontrarse la fuente.

(T02) Makar-Sankranti

[10 marks]

El festival de “Makar-Sankranti” se celebra en India cuando el Sol parece entrar en la región zodiacal de Capricornio (Makar = Capricornio, Sankranti = Entrada) visto desde la Tierra. Actualmente se celebra alrededor del 14 de enero cada año. Hace muchos años, este festival también coincidía con el solsticio de invierno en el hemisferio norte, que asumimos que tiene lugar el 21 de diciembre.

- (T02.1) Basado en la información anterior, encuentra el año, y_c , cuando la celebración de este festival [3] coincidió por última vez con el Solsticio de Invierno en el hemisferio norte.
- (T02.2) Si el Sol parecía entrar en la región zodiacal de Capricornio a una hora local de 11:50:13 hrs el 14 [3] de enero de 2006 en Mumbai, calcula la fecha, D_{enter} , y la hora local, t_{enter} , de su entrada en Capricornio en el año 2013.
- (T02.3) El festival de Makar-Sankranti se celebra en un lugar determinado el día del primer atardecer en la [3] región zodiacal de Capricornio. Puedes asumir que la hora local del atardecer en Mumbai en enero es 18:30:00 hrs.

Indica la fecha de celebración del festival cada año entre 2006 y 2013 (marcando (✓) en la casilla [4] correspondiente en la tabla proporcionada en la Hoja de Respuestas Resumida).

(T03) Ondas Gravitacionales

[15 puntos]

Los agujeros negros binarios en órbita generan ondas gravitacionales. Considera dos agujeros negros, en nuestra galaxia con masas $M = 36 M_{\odot}$ y $m = 29 M_{\odot}$, girando en órbitas circulares con frecuencia angular orbital ω alrededor de su centro de masa.

(T03.1) Suponiendo gravedad newtoniana, derive una expresión para la frecuencia angular, ω_{ini} , de las órbitas del agujero negro en un momento, t_{ini} , cuando la separación entre los agujeros negros era 4.0 veces la suma de sus radios de Schwarzschild, en términos de solo M , m , y constantes físicas.

Calcule el valor de ω_{ini} (en rad s^{-1}).

[5]

(T03.2) En la relatividad general, los agujeros negros en órbita emiten ondas gravitacionales con frecuencia f_{GW} , tal que $2\pi f_{GW} = \omega_{GW} = 2\omega$. Esto reduce las órbitas de los agujeros negros, lo que a su vez incrementa f_{GW} . La tasa de cambio de f_{GW} es

$$\frac{df_{GW}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{GW}^{\delta/3},$$

donde $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ se llama la “masa chirp”.

Encuentra los valores de α , β y δ .

[4]

(T03.3) Suponga que las ondas gravitacionales asociadas con el evento fueron detectadas por primera vez [6] en el tiempo $t_{ini} = 0$.

Derive una expresión para el tiempo observado de la fusión de agujeros negros, t_{merge} , cuando f_{GW} se vuelve muy grande, en términos de ω_{ini} , M_{chirp} , y solo constantes físicas.

Calcule el valor de t_{merge} (en segundos).

(T04) Decremento de Balmer

[15 puntos]

Considere una estrella de la secuencia principal rodeada por una nebulosa. La magnitud observada en la banda V de la estrella es 11.315 mag. La región ionizada de la nebulosa cerca de la estrella emite líneas $H\alpha$ y $H\beta$; sus longitudes de onda son $0.6563 \mu\text{m}$ y $0.4861 \mu\text{m}$, respectivamente. La relación teóricamente predicha de los flujos en las líneas $H\alpha$ a $H\beta$ es $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2.86$. Sin embargo, cuando esta radiación pasa a través de la parte exterior de la nebulosa fría y polvorienta, los flujos de emisión observados de las líneas $H\alpha$ y $H\beta$ son $6.80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ y $1.06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$, respectivamente.

La extinción A_{λ} es una función de la longitud de onda y se expresa como

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Aquí, $\kappa(\lambda)$ es la curva de extinción y $E(B - V)$ denota el exceso de color en las bandas de filtro B y V. La curva de extinción (con λ en μm) se da de la siguiente manera.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

donde, $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ es la razón de extinción total a selectiva.

(T04.1) Encuentra los valores de $\kappa(H\alpha)$ y $\kappa(H\beta)$. [3]

(T04.2) Encuentra el valor de la razón de los excesos de color $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$. [4]

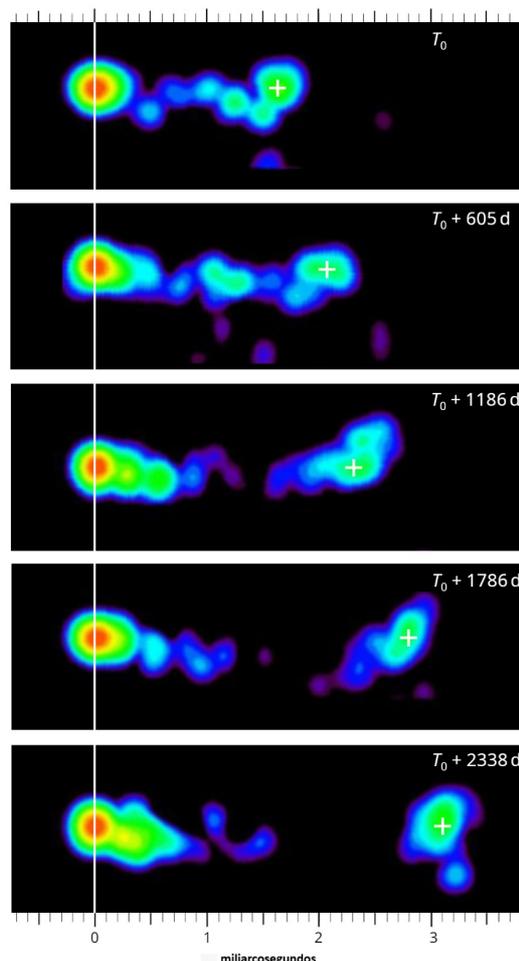
(T04.3) Encuentre la extinción debida a la nebulosa, $A_{H\alpha}$ y $A_{H\beta}$, en las longitudes de onda de $H\alpha$ y $H\beta$, respectivamente. [6]

(T04.4) Encuentre la extinción de la nebulosa, (A_V), y la magnitud aparente de la estrella en la banda V en ausencia de la nebulosa, m_{V0} . [2]

(T05) Quásares

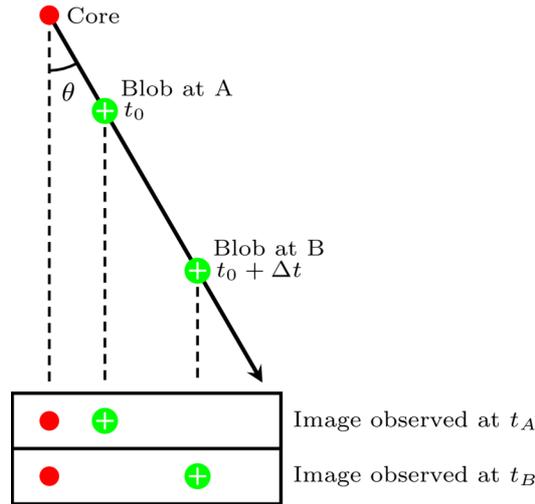
[20 marks]

Un quásar es una galaxia activa extremadamente luminosa alimentada por un agujero negro supermasivo que emite jets relativistas. La figura muestra una serie de paneles con imágenes de radio de un quásar (con corrimiento al rojo $z = 0.53$ y distancia de luminosidad $D_L = 1.00 \times 10^{10}$ ly en diferentes momentos. El “núcleo” está alineado con la línea vertical blanca, mientras que un jet, que consiste en un “mancha” (marcada en blanco +), se aleja de él con el tiempo. Cada panel muestra el tiempo de observación (comenzando con T_0 para la primera imagen), y la escala angular se indica en la parte superior e inferior de la figura.



- (T05.1) Determine la separación angular de la mancha, ϕ_{blob} (en miliarcosegundos), y su distancia transversal, l_{blob} (en años luz), desde el núcleo del quásar para cada observación. Luego, calcule la velocidad aparente de la mancha en la dirección transversal (v_{app}) como una fracción de la velocidad de la luz, $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ utilizando observaciones consecutivas. Por lo tanto, calcule la velocidad aparente promedio $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$. [5]

El chorro del cuásar en realidad se mueve a una velocidad relativista $v \equiv \beta c$, pero no necesariamente en el plano del cielo; por ejemplo, forma un ángulo θ (el “ángulo de visión”) con respecto a la línea de visión de un observador distante (indicado por las líneas discontinuas), como se muestra en el esquema a continuación. Para esta y todas las partes subsiguientes, ignore el corrimiento al rojo del cuásar y cualquier efecto relativista.



- (T05.2) La luz emitida por la mancha en dos momentos diferentes t_0 (correspondiente a la posición A) y $t_0 + \Delta t$ (correspondiente a la posición B) llega al observador en t_A y t_B , respectivamente. Así, la diferencia de tiempo observada es $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.
- (T05.2a) Encuentra una expresión para la razón $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ en términos de β y θ . [2]
- (T05.2b) Usando esta razón, expresa β_{app} en términos de β y θ . [2]
- (T05.3) El movimiento se llama superlumínico si la velocidad aparente excede la de la luz ($\beta_{\text{app}} > 1$), y sublumínico si no lo hace ($\beta_{\text{app}} < 1$).
- (T05.3a) Para $\beta_{\text{app}} = 1$, traza una curva suave de β como función de θ para marcar el límite entre movimientos sublumínicos y superlumínicos. Sombrea la región superlumínica en el gráfico con líneas inclinadas (///). [4]
- (T05.3b) Encuentra la velocidad más baja del chorro verdadero ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$) para que ocurra el movimiento superlumínico y también su ángulo de visión correspondiente θ_{low} . [2]
- (T05.4) Encuentra una expresión para el ángulo de visión máximo, θ_{max} , para el cual un valor dado de β_{app} será posible. [2]

El núcleo de un quásar, su objeto compacto central, presenta variabilidad en su emisión debido a procesos internos que ocurren dentro de una región causalmente conectada. El tamaño (=radio) de esta región se considera típicamente cinco veces el radio de Schwarzschild del núcleo.

- (T05.5) Se ha descubierto que el núcleo de un quásar varía en escalas de tiempo de aproximadamente 1 h. [3] Obtenga un límite superior, $M_{\text{c, max}}$, para la masa del objeto compacto central, en unidades de masa solar.

(T06) Rotación Galáctica

[20 puntos]

La curva de rotación de nuestra Galaxia se determina utilizando mediciones de velocidad a lo largo de la línea de visión de nubes de hidrógeno neutro (HI) a lo largo de varias longitudes galácticas, observadas a través de la línea de 21 cm de HI. Considere una nube de HI con longitud galáctica l , ubicada a una distancia R del Centro Galáctico (CG) y a una distancia D del Sol. Considere que el Sol está a una distancia $R_0 = 8.5$ kpc del CG. Suponga que tanto el Sol como la nube de HI están en órbitas circulares alrededor del CG en el plano galáctico, con velocidades angulares Ω_0 y Ω , y velocidades de rotación V_0 y V , respectivamente.

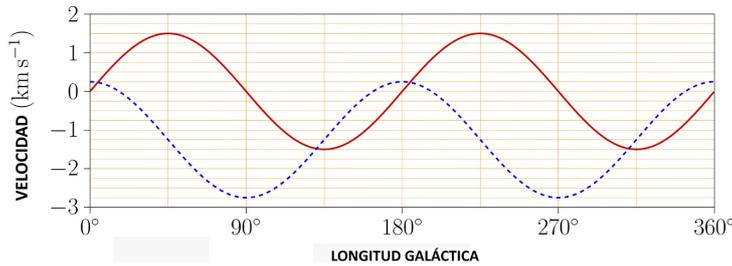
Los componentes de velocidad a lo largo de la línea de visión (V_r) y de velocidad tangencial (V_t) de la nube, observados desde el Sol, pueden expresarse como

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Visto desde el Polo Norte Galáctico, la rotación galáctica es en sentido de las agujas del reloj. A lo largo de este problema, tomaremos la velocidad a lo largo de la línea de visión como positiva cuando se aleja, y las nubes se tratarán como objetos puntuales.

- (T06.1) En el gráfico proporcionado en la Hoja de Respuestas, dibuja V_r como una función de D desde $D = 0$ hasta $D = 2R_0$ para dos líneas de visión definidas por (i) $l = 45^\circ$ y (ii) $l = 135^\circ$. Nombra cada una de tus líneas/curvas dibujadas con el valor de l . **[5]**
- (T06.2) El gráfico a continuación muestra los componentes de velocidad radial promedio (curva sólida, roja) y transversal (curva discontinua, azul) de las estrellas a una distancia de 100 pc del Sol, representados en función de la longitud galáctica.



Usando el gráfico, estima el período orbital del Sol (P) alrededor del GC en mega-años (Myr). **[3]**

- (T06.3) Jan Oort observó que en el vecindario solar ($D \ll R_0$), la diferencia en las velocidades angulares ($\Omega - \Omega_0$) será pequeña, y por lo tanto, encontró la siguiente aproximación de primer orden para los componentes de velocidad en la línea de visión y tangencial:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

donde A y B son conocidas como las constantes de Oort.

Consideremos dos casos:

- (I) la curva de rotación observada actual de la Galaxia, y
 (II) la curva de rotación es para un escenario hipotético donde la Galaxia carece de materia oscura y se asume que toda la masa de la Galaxia está concentrada en su centro.

- (T06.3a) Derivar expresiones para el gradiente radial de la velocidad de rotación en la ubicación del Sol, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$, para los dos casos. **[2]**

- (T06.3b) Expresar A y B en términos de V_0 , R_0 , y el gradiente radial de la velocidad de rotación en la ubicación del Sol, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$. **[8]**

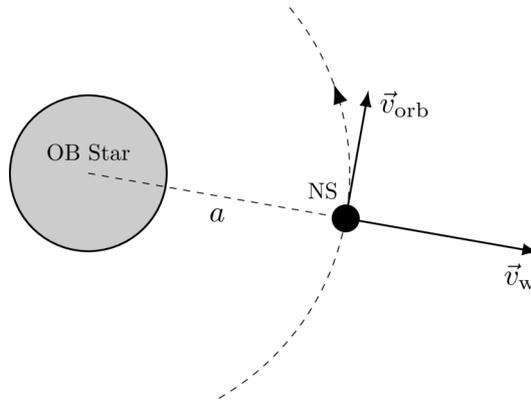
- (T06.3c) La razón (A/B) de las constantes de Oort para los dos casos dados, (I) y (II), se definen como F_I y F_{II} , respectivamente. Determinar F_I y F_{II} . [2]

(T07) Binaria de Estrella de Neutrones

[20 puntos]

En un sistema binario que involucra una estrella compacta, donde la estrella compañera no desborda su lóbulo de Roche, la fuente principal de acreción para la estrella compacta es el viento estelar de la estrella compañera. Esta acreción alimentada por el viento es especialmente significativa en sistemas que incluyen una estrella de tipo temprano (como una estrella O o B, indicada en adelante como estrella OB), junto a un objeto compacto como una estrella de neutrones (NS) en una órbita cercana.

Considere tal sistema binario de estrella NS-OB donde una estrella de neutrones de masa $M_{NS} = 2.0 M_{\odot}$ y radio $R_{NS} = 11 \text{ km}$ está orbitando en una órbita circular de radio a alrededor del centro de la estrella OB con velocidad $v_{orb} = 1.5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (ver figura abajo). A lo largo de este problema se asume que la pérdida de masa de la estrella OB es esféricamente simétrica y su tasa es $\dot{M}_{OB} = 1.0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.



- (T07.1) El radio de acreción, R_{acc} , se define como la distancia máxima desde la NS a la cual el viento estelar puede ser capturado por la NS. Si la velocidad del viento estelar cerca de la NS es $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, encuentra R_{acc} para el sistema anterior en km usando el cálculo estándar de la velocidad de escape. [3]
- (T07.2) Suponiendo que todo el material capturado es acrecentado por la NS, estima la tasa de acreción de masa, \dot{M}_{acc} , desde el viento estelar hacia la NS en unidades de $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ si $a = 0.5 \text{ au}$. Ignora los efectos de la presión de radiación y el tiempo de enfriamiento finito del gas que acrece. [3]
- (T07.3) Ahora considere la situación donde la velocidad del viento estelar a la distancia orbital a (cerca del NS) se vuelve comparable con la velocidad orbital del NS. La tasa de acreción de masa del viento estelar sobre el NS en este caso estaría dada por una expresión de la forma $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$, donde $q = M_{NS}/M_{OB}$ es la relación de masa del binario y β es el ángulo en el marco del NS entre la dirección de la velocidad del viento y la dirección radial alejándose de la estrella OB. Obtenga la expresión para $f(\tan \beta, q)$ asumiendo $M_{OB} \gg M_{NS}$. [6]
- (T07.4) Considere que el material completamente ionizado se acrecienta radialmente y es obstaculizado debido al fuerte campo magnético \vec{B} de la NS. Este efecto puede modelarse como una presión, dada por $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Supondremos que la NS tiene un campo magnético dipolar cuya magnitud en el plano ecuatorial varía con la distancia r desde la NS para $r \gg R_{NS}$ como

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{NS}}{r} \right)^3$$

donde B_0 es el campo magnético en el ecuador de la NS. Suponga que el eje del dipolo magnético se alinea con el eje de rotación de la NS.

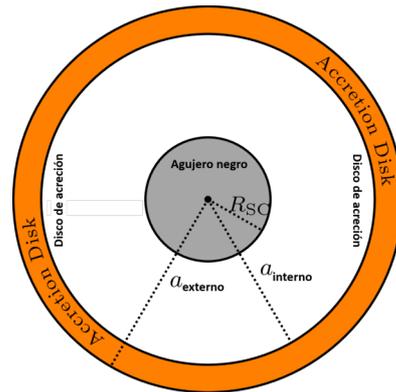
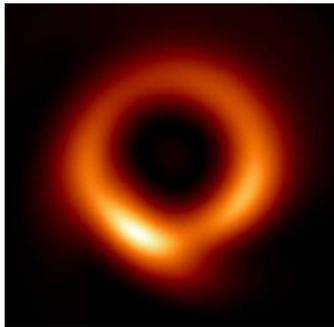
- (T07.4a) Obtenga la presión magnética, $P_{\text{eq, mag}}$, en el plano ecuatorial en términos de B_0 , R_{NS} , r , y otras constantes adecuadas. [1]
- (T07.4b) La distancia máxima donde el flujo de acreción es detenido por el campo magnético en el ecuador se llama el radio magnetosférico R_m . Este flujo de materia ejercerá una presión debido al movimiento relativo entre el viento estelar entrante y la NS. Obtenga una expresión aproximada para el campo magnético crítico $B_{0,c}$ para el cual R_m coincide con R_{acc} y calcule su valor en Tesla. Se descartan los efectos magnéticos para $r > R_m$ y considere $v_w \gg v_{\text{orb}}$. [7]

(T08) Sombra de un agujero negro

[20 puntos]

El Event Horizon Telescope (EHT) ha publicado una imagen del agujero negro supermasivo situado en el centro de la galaxia M87, como se muestra en el panel izquierdo de la siguiente figura.

Para comprender algunas características sencillas de esta imagen, consideraremos un modelo simplificado de un agujero negro no giratorio, estático y esféricamente simétrico de masa $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$, rodeado por un disco de acreción plano, delgado y sin masa, de radios interior y exterior $a_{\text{interno}} = 6R_{\text{SC}}$ y $a_{\text{externo}} = 10R_{\text{SC}}$, respectivamente, donde R_{SC} es el radio de Schwarzschild. En el panel derecho de la siguiente figura se muestra un esquema de la vista frontal (la figura no está a escala).



Suponemos que el disco de acreción es la única fuente de luz a considerar. Cada punto del disco emite luz en todas direcciones. Esta luz viaja bajo la influencia del campo gravitatorio del agujero negro. La trayectoria de los rayos de luz se rige por dos ecuaciones dadas a continuación (que son similares a las de un objeto alrededor del Sol):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

donde $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ es la coordenada radial, $\phi \in [0, 2\pi)$ es el ángulo acimutal, y E y L son constantes relacionadas con la energía conservada y el momento angular conservado, respectivamente.

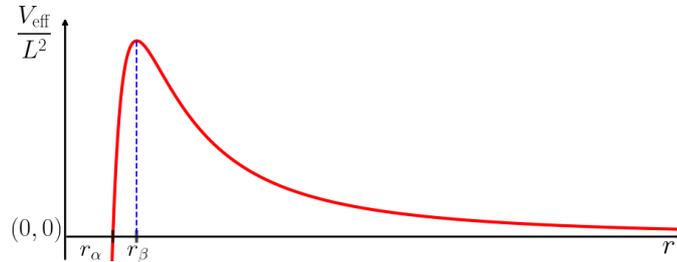
Aquí $v_r \equiv dr/dt$ es la magnitud de la velocidad radial, v_ϕ es la magnitud de la velocidad tangencial, y $\omega \equiv d\phi/dt$ es la velocidad angular. Definimos el parámetro de impacto b para una trayectoria como $b = L/\sqrt{2E}$. En este problema se desprecia la dilatación del tiempo.

Otra ecuación útil se obtiene derivando la primera ecuación:

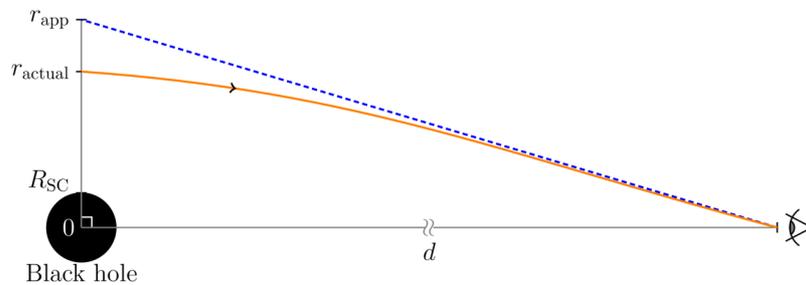
$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

- (T08.1) Trayectorias de luz circulares pueden existir alrededor del agujero negro. Encuentra el radio, r_{ph} , y el parámetro de impacto, b_{ph} , para tales trayectorias de fotones en términos de M y constantes relevantes. [4]

- (T08.2) Calcula el tiempo, T_{ph} , necesario para completar una órbita completa de la trayectoria circular de la luz, en segundos. [2]
- (T08.3) La ecuación de velocidad radial dada arriba (la primera ecuación en esta pregunta) se puede comparar con una ecuación de la forma $\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ para trayectorias de luz. A continuación se muestra un gráfico de V_{eff}/L^2 como función de r .



- (T08.3a) El gráfico indica dos radios especiales, r_α y r_β . Obtén expresiones para r_α y r_β en términos de M y constantes relevantes. [2]
- (T08.3b) Un fotón que viaja hacia adentro desde el disco de acreción hacia el agujero negro aún puede escapar hacia el infinito en algunos casos. Encuentra la expresión para el valor más pequeño del radio del punto de retorno, r_t , para dicho fotón, en términos de M y constantes relevantes. Encuentra la expresión para el valor mínimo del parámetro de impacto, b_{min} , para este fotón. [3]
- (T08.4) Un rayo de luz que proviene de un radio r_{actual} desde el centro del sistema en el plano del cielo sufrirá una fuerte desviación debido a la gravedad del agujero negro, y eventualmente llegará a un observador (denotado por un ojo) a una gran distancia d del sistema, como se muestra a continuación.



Para este observador, el rayo parecería haber originado de un punto diferente a una distancia $r_{\text{app}} \approx b$ desde el centro del agujero negro en el plano del cielo, donde b es el parámetro de impacto para esa trayectoria del fotón. Para puntos en el disco de acreción en $r = r_{\text{actual}}$, se puede asumir la siguiente relación:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

- Para el observador distante, como nosotros, con una vista frontal del disco de acreción, la imagen del sistema parecerá ser simétricamente circular en el plano del cielo. Determine el radio aparente más externo, r_{outer} , y el radio aparente más interno, r_{inner} , de la imagen en unidades de au . [5]
- (T08.5) Considere un agujero negro supermasivo aislado de masa $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$ sin ningún disco de acreción. Un breve y fuerte estallido de radiación electromagnética ocurre durante 5 s en un punto Z a una distancia, digamos, $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ del agujero negro como se muestra en la figura. El estallido en el punto Z emite luz en todas las direcciones. Un observador en un punto lejano del agujero negro (denotado por un ojo en la figura a continuación) toma una imagen de larga exposición de la región alrededor del agujero negro durante 60 s.



Elige la opción correcta para cada una de las afirmaciones a continuación:

- (T08.5a) El número de caminos posibles para que la luz viaje de Z al observador es **[2]**
 (A) A lo sumo uno (B) Exactamente uno (C) Exactamente dos (D) Más de dos.
- (T08.5b) El número de imágenes del estallido EM en Z que se verán en la imagen de larga **[2]**
 exposición es
 (A) A lo sumo una (B) Exactamente una (C) Exactamente dos (D) Más de dos.

(T09) Visibilidad Atmosférica

[35 puntos]

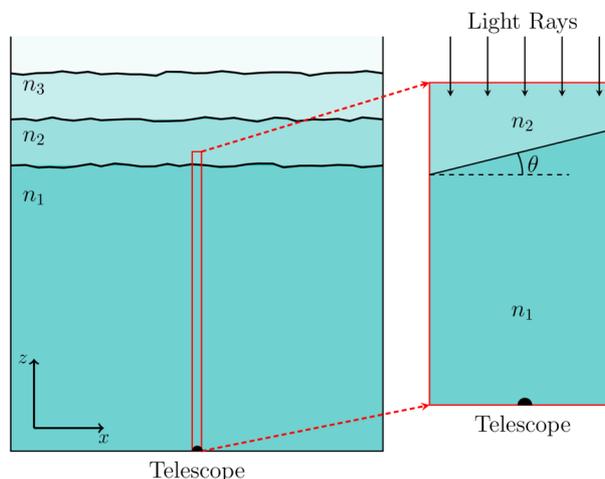
Un telescopio con una lente objetiva convexa acromática de diámetro $D = 15$ cm y longitud focal $f = 200$ cm está apuntado a una estrella en el cenit.

- (T09.1) Encuentra el diámetro (en m), d_{image} , de la imagen de una fuente puntual producida por la lente **[1]**
 objetiva en su plano focal para luz verde ($\lambda = 550$ nm), considerando solo los efectos de la difracción.

La imagen de una fuente astronómica también se ve afectada por el llamado “seeing atmosférico”.

Los límites entre las capas en la atmósfera, así como los índices de refracción de las capas, cambian continuamente debido a la turbulencia, la variación de temperatura y otros factores. Esto lleva a pequeños cambios en la posición de la imagen en el plano focal del telescopio, conocido como el “efecto de parpadeo”. Para el resto del problema, aparte de usar el tamaño finito limitado por difracción de la imagen de la estrella (como se usó anteriormente), no se considerarán efectos de interferencia.

El panel izquierdo de la figura a continuación muestra una sección transversal vertical de la atmósfera con múltiples capas de diferentes índices de refracción (n_1, n_2, n_3, \dots). El panel derecho muestra una vista ampliada de un segmento vertical delgado de la atmósfera y el límite entre las dos capas atmosféricas más bajas de índices de refracción n_1 y n_2 ($n_1 > n_2$). Consideramos solo estas dos capas y su límite para este problema. Los diagramas no están a escala.

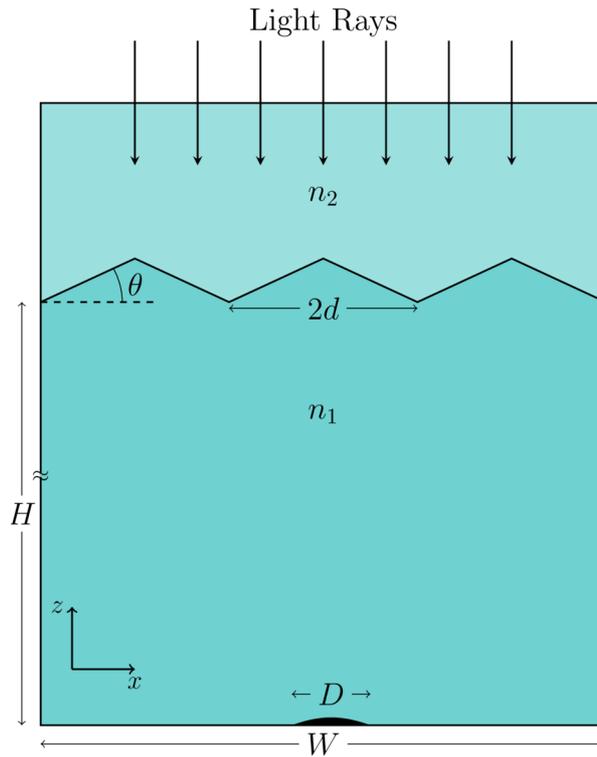


- (T09.2) Sea que el límite entre las dos capas esté a una altura $H = 1$ km directamente sobre el objetivo del telescopio, con una inclinación de $\theta = 30^\circ$ con respecto al plano horizontal. En todas las partes de este problema, θ se considera positivo en la dirección antihoraria. Para una fuente de luz monocromática, $n_1 = 1.00027$ y $n_2 = 1.00026$. Sea el desplazamiento angular de la imagen en el plano focal del telescopio para una estrella en el cenit α .
- (T09.2a) Dibuja un diagrama de rayos apropiadamente etiquetado en el límite mostrando n_1, n_2, θ y α . [2]
- (T09.2b) Encuentra la expresión para α en términos de θ, n_1 y n_2 . Usa las aproximaciones para ángulos pequeños: $\sin \alpha \approx \alpha$ y $\cos \alpha \approx 1$. [2]
- (T09.2c) Calcula el desplazamiento, Δx_θ (en m), en la posición de la imagen si θ aumenta en un 1% (manteniendo n_1 y n_2 fijos). [3]
- (T09.2d) Calcula el desplazamiento, Δx_n (en m), en la posición de la imagen si n_2 aumenta en un 0.0001% (manteniendo n_1 y θ fijos). [3]
- (T09.3) Para la luz blanca que proviene de una estrella en el cenit, elige cuál de las siguientes opciones describe más de cerca la forma y el color de la imagen marcando (\checkmark) la casilla correspondiente (solo una) en la Hoja de Respuestas. Nota x aumenta de izquierda a derecha en la figura. [2]

	Color de la imagen	Forma de la imagen	Borde izquierdo	Borde derecho
A	Blanco	Circular		
B	Blanco	Elíptica		
C	Coloreada	Circular	Azul	Rojo
D	Coloreada	Circular	Rojo	Azul
E	Coloreada	Elíptica	Azul	Rojo
F	Coloreada	Elíptica	Rojo	Azul

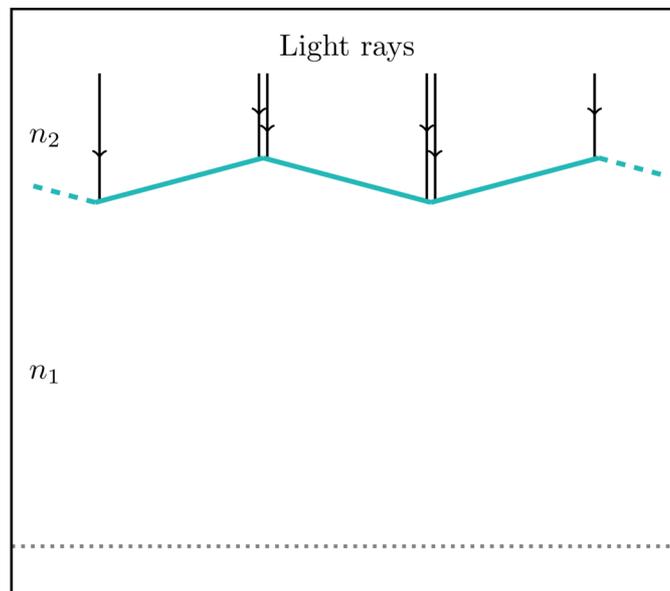
Para todas las partes restantes de esta pregunta, consideramos luz verde monocromática con $\lambda = 550$ nm. Modelamos el límite entre las capas como un conjunto de planos en zigzag infinitos (que corren perpendiculares al plano de la página) separados por $d = 10$ cm a lo largo del eje x , con $\theta = 10^\circ$ o $\theta = -10^\circ$.

La figura a continuación (no a escala) muestra una sección transversal de este modelo de la atmósfera de ancho W ($W \ll H$). Para telescopios con gran apertura, esta naturaleza en zigzag del límite resulta en la formación de mangas en el plano focal.



(T09.4) Considere una atmósfera modelada como se indicó anteriormente.

(T09.4a) Una sección de la atmósfera con planos en zigzag consecutivos, con los mismos parámetros mencionados anteriormente, se muestra en el diagrama a continuación (no a escala).



En este diagrama, reproducido en la Hoja de Respuestas, dibuja las trayectorias de los rayos de luz incidentes hasta el plano donde se coloca el objetivo del telescopio, mostrado por la línea gris punteada.

Marca la(s) región(es), si las hay, con una "X" en el diagrama donde no llegarán rayos de luz. [4]

(T09.4b) Calcula el ancho W_X de dicha(s) región(es).

[3]

(T09.4c) Encuentra el diámetro más grande, D_{\max} , del objetivo del telescopio con el cual será posible obtener una sola imagen de una estrella, eligiendo apropiadamente la ubicación del telescopio en relación con la estructura del límite. [4]

(T09.5) Considere el caso cuando se permite la forma de zigzag del límite en ambas direcciones x y y (como un campo de pirámides), y $D = 100$ cm (con $f = 200$ cm). [6]

Dibuje el patrón cualitativo de los patrones resultantes en la caja dada en la Hoja de Respuestas.

(T09.6) Para una atmósfera turbulenta, considere nuevamente la misma forma de zigzag que corre paralelamente de la capa límite solo a lo largo de la dirección x , pero ahora el ángulo entre dos planos cambia a un ritmo uniforme de 10° a -10° en 1.0 s. Suponga que esto lleva a una tasa uniforme de desplazamiento de la posición de la imagen. [5]

Considere un telescopio con $D = 8$ cm y $f = 1$ m. Estime el tiempo de exposición más largo t_{\max} permitido para su cámara CCD de modo que se obtenga solo una imagen, y cualquier posible desviación en su posición permanezca por debajo del 1% del diámetro limitado por difracción de la imagen.

(T10) Nucleosíntesis del Big Bang

[35 puntos]

Durante la era dominada por la radiación en el Universo temprano, el factor de escala del Universo $a \propto t^{1/2}$, donde t es el tiempo desde el Big Bang. Durante la mayor parte de esta era, los neutrones (n) y protones (p) permanecen en equilibrio térmico entre sí a través de interacciones débiles. La densidad numérica (N) de neutrones o protones libres está relacionada con la temperatura T y sus masas correspondientes m tal que

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

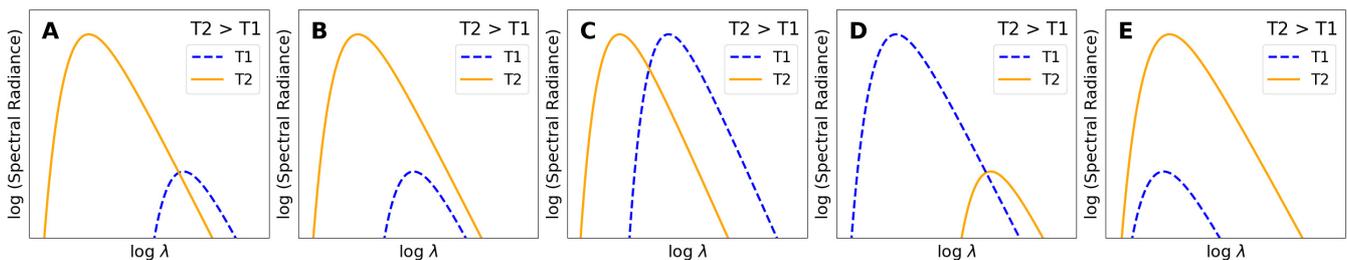
siempre que el tiempo $t \leq t_{\text{wk}} = 1.70$ s, cuando $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. Después de t_{wk} , las interacciones débiles ya no pueden mantener tal equilibrio, y los neutrones libres decaen a protones con una vida media de 610.4 s.

(T10.1) Sea la densidad numérica de protones N_p , y la de neutrones N_n . Calcule la abundancia relativa de neutrones dada por la razón $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ en el tiempo t_{wk} . [4]

(T10.2) Los fotones mantienen el equilibrio térmico y conservan un espectro de cuerpo negro en todas las épocas.

(T10.2a) Encuentra el índice β , tal que $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Identifica cuál de los siguientes gráficos muestra el comportamiento correcto de la densidad de energía espectral para dos temperaturas T_1 y T_2 . Marca (✓) la opción correcta en la Hoja de Respuestas Resumida. [2]



(T10.3) Después de t_{wk} , el proceso de formación de deuterio a partir de protones y neutrones está gobernado por la ecuación de Saha, dada por el físico indio Prof. Meghnad Saha, que puede simplificarse a

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

Aquí, la relación barión-fotón η es 6.1×10^{-10} , y N_D es la densidad numérica de deuterio.

(T10.3a) Grafica la relación N_D/N_n en la hoja de respuestas, para al menos 4 valores de temperatura razonablemente espaciados que se encuentren en el dominio $k_B T = [60, 70]$ keV, y dibuja una curva suave que pase por estos puntos. [5]

(T10.3b) A partir de la gráfica, encuentra $k_B T_{\text{nuc}}$ (en keV) cuando $N_D = N_n$. [1]

(T10.3c) En cambio, ahora asume que todos los neutrones libres se combinan instantáneamente con los protones en $k_B T_{\text{nuc}}$ para formar deuterio, y todo esto se convierte inmediatamente en helio (${}^4_2\text{He}$). Calcula la época o tiempo correspondiente de nucleosíntesis, t_{nuc} (en s), para la formación de helio. [4]

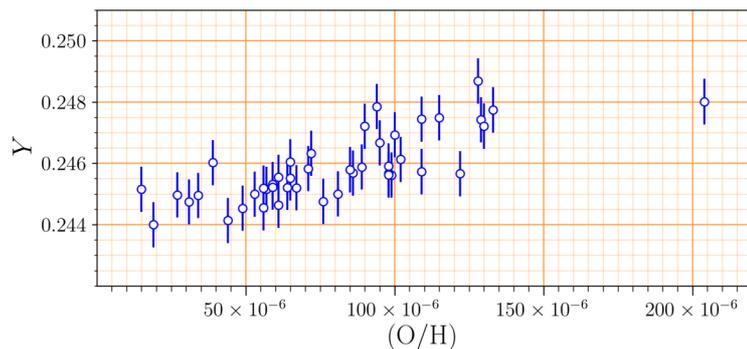
```html

(T10.4) Calcula el valor de  $X_{\text{n, nuc}}$  inmediatamente antes de  $t_{\text{nuc}}$ . [5]

```

(T10.5) La abundancia primordial de Helio, Y_{prim} , se define como la fracción de la masa bariónica total en el Universo que está unida en Helio justo después de t_{nuc} . Obtén una estimación teórica para el valor de Y_{prim} . Para el propósito de este cálculo solamente, asume $m_p \approx m_n$ y que la masa del Helio, $m_{\text{He}} \approx 4m_n$. [3]

(T10.6) La abundancia primordial de Helio es muy difícil de medir, ya que las estrellas convierten continuamente Hidrógeno en Helio en el Universo. La cantidad de procesamiento por las estrellas en una galaxia se caracteriza por la densidad numérica relativa de Oxígeno (que solo es producido por las estrellas) a hidrógeno, denotada como (O/H), en la galaxia. A continuación se muestra una compilación de las mediciones de (O/H) y la abundancia de Helio, Y , para diferentes galaxias.



Utiliza todos los puntos en este gráfico (que se reproduce en la Hoja de Respuestas Resumida) para responder lo siguiente.

(T10.6a) Estima Y para una galaxia enana compacta azul con un valor de $(\text{O}/\text{H})=1.75 \times 10^{-4}$. [2]

(T10.6b) Obtén la pendiente $dY/d(\text{O}/\text{H})$ del ajuste lineal a los datos anteriores. [2]

(T10.6c) Estima la abundancia primordial de Helio, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, basada en las observaciones anteriores. [2]

(T10.7) La desviación entre Y_{prim} y $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ se puede reconciliar cambiando la relación barión-fotón η . [3]
 Cuando η se disminuye, como se indica con \downarrow en la Hoja de Respuestas, indique el aumento (\uparrow) o disminución (\downarrow) en $N_{\text{D}}/N_{\text{n}}(T)$, T_{nuc} (cuando $N_{\text{D}} = N_{\text{n}}$), t_{nuc} , $X_{\text{n, nuc}}$, y Y_{prim} en los cuadros proporcionados en la Hoja de Respuestas.

(T11) Estrellas a través de gráficos

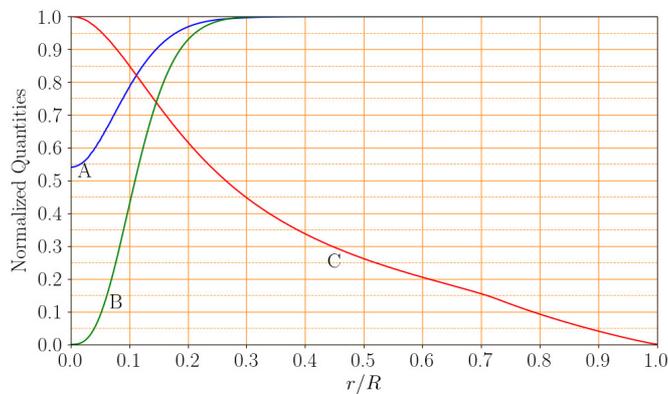
[50 puntos]

Las estrellas pueden ser bien aproximadas como objetos esféricamente simétricos, y por lo tanto, la distancia radial r desde el centro puede elegirse como la única variable independiente en el modelado de interiores estelares. La masa contenida dentro de una esfera de radio r se denota por $m(r)$. La luminosidad $l(r)$ se define como la energía neta que fluye hacia afuera a través de una superficie esférica de radio r por unidad de tiempo. Otras cantidades de interés, por ejemplo, la densidad $\rho(r)$, temperatura $T(r)$, fracción de masa de hidrógeno $X(r)$, fracción de masa de helio $Y(r)$, y la energía nuclear generada por unidad de masa por unidad de tiempo $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, se consideran funciones de r . A lo largo de este problema, descuidaremos los efectos de difusión y asentamiento gravitacional de elementos dentro de la estrella.

El símbolo "log" se refiere al logaritmo en base 10. El problema consta de tres partes independientes.

(T11.1) Parte 1: Dentro de una estrella

El gráfico a continuación muestra la variación de tres cantidades estructurales, A, B y C, como funciones del radio fraccional r/R en un modelo estelar de masa $1 M_{\odot}$ y edad 4 GYr, donde R es el radio fotosférico de la estrella. Los valores de la fracción de masa de helio en la superficie (fotosférica), Y_{s} , y la metalicidad (fracción de masa de todos los elementos más pesados que el helio) en la superficie (fotosférica), Z_{s} , de la estrella están dados por $(Y_{\text{s}}, Z_{\text{s}}) = (0.28, 0.02)$. Todas las cantidades mostradas en los gráficos están normalizadas por sus respectivos valores máximos.



(T11.1a) Identifica las tres cantidades A, B y C de manera única entre las cinco posibilidades: [6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Escribe A/B/C en las casillas junto a las cantidades apropiadas en la Hoja de Respuestas Resumida. No se necesita justificación para tu respuesta.)

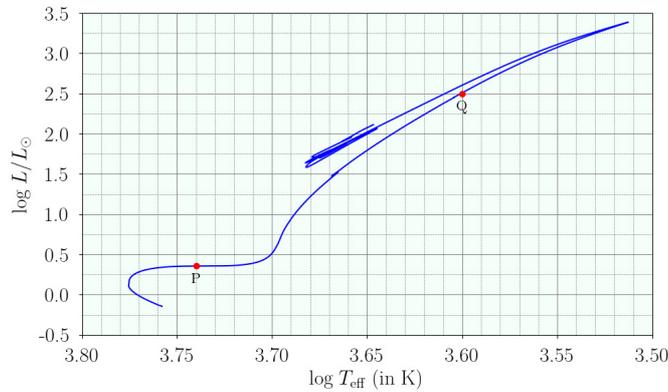
(T11.1b) ¿Cuál es la fracción de masa de helio en el centro, Y_{c} , de la estrella? [3]

(T11.1c) Dibuja las dos cantidades restantes de la lista de cinco (que no fueron identificadas como curvas A, B o C) dadas en (T11.1a), como funciones de r/R en el mismo gráfico en la Hoja de Respuestas Resumida, y etiquétalas con sus respectivas cantidades. [5]

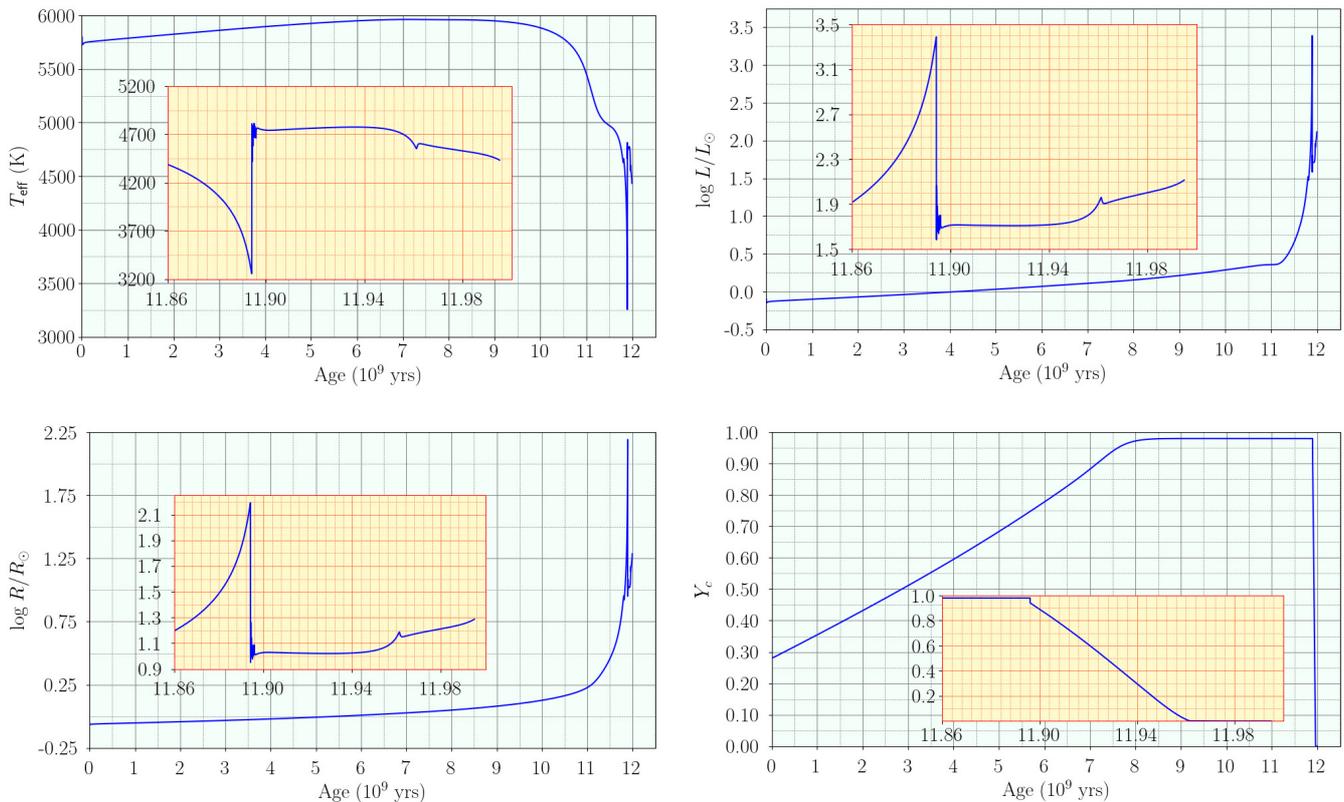
(T11.2) Parte 2: Estrellas en evolución

Considere la evolución de una estrella de $1M_{\odot}$ cuya composición inicial uniforme está dada por las fracciones de masa de helio, $Y_0 = 0.28$, y metales, $Z_0 = 0.02$. Las figuras a continuación muestran la variación de diferentes cantidades globales de esta estrella a medida que evoluciona desde ZAMS (Secuencia Principal de Edad Cero) hasta el final de la quema de helio en su núcleo.

El gráfico a continuación muestra la trayectoria evolutiva de la estrella en el diagrama HR (gráfico de $\log L/L_{\odot}$ vs $\log T_{\text{eff}}$, donde L es la luminosidad superficial y T_{eff} es la temperatura efectiva).



La figura a continuación tiene cuatro gráficos que muestran la variación de T_{eff} (en K), L (graficado como $\log L/L_{\odot}$), R (graficado como $\log R/R_{\odot}$), y Y_c con la edad (en 10^9) de la misma estrella. En cada uno de estos cuatro gráficos, los recuadros muestran las variaciones de las respectivas cantidades en detalle entre las edades de 11.86×10^9 años a 12.00×10^9 años, para mayor claridad.



Utilice estos gráficos para responder las preguntas a continuación.

- (T11.2a) ¿Cuál es la vida aproximada en la secuencia principal, t_{MS} (en años), de la estrella? [1]
- (T11.2b) ¿Cuál es la duración aproximada, Δt_{He} (en años), durante la cual la estrella quema helio en su núcleo? [1]

(T11.2c) ¿Qué fracción, f_H , de la cantidad inicial de hidrógeno en su centro ha sido quemada [3] cuando la luminosidad de la estrella es $1 L_\odot$?

(T11.2d) ¿Cuál es el radio de la estrella, R_1 (en unidades de R_\odot) cuando 60% de la cantidad [3] inicial de hidrógeno en su centro ha sido quemada?

(T11.2e) ¿Cuáles son los radios de la estrella, R_P y R_Q (en unidades de R_\odot), correspondientes a [4] sus posiciones P y Q, respectivamente, como se marca en el diagrama HR?

(T11.3) Parte 3: Distribución de masa dentro de una estrella

La ecuación que gobierna la distribución de masa dentro de una estrella está dada por

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Sería conveniente expresar esta ecuación en términos de tres variables adimensionales, a saber, la masa fraccional, q , el radio fraccional, x , y la densidad relativa, σ , que definimos como

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

donde M y R son la masa total y el radio de la estrella, respectivamente, y $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ es la densidad media de la estrella. Para la estrella particular que consideraremos en esta parte, se da la siguiente información:

- La densidad central $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$
- La mitad de la masa de la estrella está contenida dentro del 25% interior de su radio total, y el 70% de su masa está contenida dentro del 35% interior de su radio total.

En todas las partes subsiguientes de esta pregunta, será suficiente redondear todos los coeficientes numéricos derivados a 0.005.

(T11.3a) Expresar la ecuación anterior que describe la dependencia de la masa con el radio en [2] términos de x , $\frac{dq(x)}{dx}$ y $\sigma(x)$.

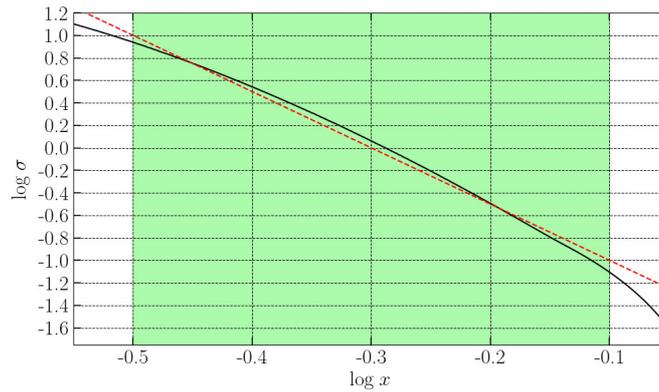
Para obtener la distribución de masa con el radio, necesitamos conocer el perfil de densidad dentro de la estrella. Para el propósito de este problema, describiremos la variación de la densidad con el radio mediante formas aproximadas en dos dominios de x :

- la parte interna de la estrella: $0 \leq x \leq 0.32$
- la parte media de la estrella: $0.32 < x < 0.80$

No hacemos ninguna aproximación para la parte más externa, es decir, $0.80 \leq x \leq 1.00$.

(T11.3b) Aproximación para la parte media:

La variación de $\log \sigma$, como función de $\log x$ en la parte media de la estrella se muestra (por la curva negra) en el gráfico a continuación. Haremos una aproximación lineal (mostrada como una línea roja discontinua en el gráfico) para $\log \sigma$ como función de $\log x$ en el dominio $-0.5 < \log x < -0.1$, es decir, $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (mostrado por el dominio sombreado en verde). Además, aproximaremos la pendiente de esta línea al entero más cercano.



Use esta aproximación para escribir una expresión para $\sigma(x)$ como función de x en el dominio $0.32 < x < 0.80$. [4]

(T11.3c) Use el resultado de (T11.3b) para derivar una expresión para $q(x)$ en el dominio $0.32 < x < 0.80$. [6]

(T11.3d) **Aproximación para la parte interna:**

En la parte interna de la estrella ($0 \leq x \leq 0.32$), la densidad puede aproximarse como una función lineal del radio, es decir, $\sigma(x) = Ax + B$, donde A, B son constantes. Determine A y B , y por lo tanto obtenga una expresión para $q(x)$ en el dominio $0 \leq x \leq 0.32$. Note que las aproximaciones adoptadas en la parte anterior y en esta parte pueden llevar a pequeñas discontinuidades en la densidad o masa en $x = 0.32$. [8]

(T11.3e) Las expresiones para $q(x)$ obtenidas en las partes (T11.3c) y (T11.3d) son aproximaciones que describen la variación de la masa con el radio bastante bien, pero solo en regiones específicas de la estrella. Para el dominio $0.80 \leq x \leq 1$ (para el cual no hemos derivado ninguna expresión), es posible usar una extrapolación apropiada de la región vecina. Use estas expresiones aproximadas y los datos dados para esbozar una curva suave (sin discontinuidades ni en $q(x)$ ni en su derivada) para $q(x)$ vs x para toda la estrella ($0 \leq x \leq 1$) que represente la variación de la masa con el radio. [4]

(T12) Radiación de Hawking de Agujeros Negros

[50 puntos]

(T12.1) Un agujero negro (BH) típicamente se forma por el colapso gravitacional de una estrella masiva al final de su ciclo de vida hasta un punto llamado singularidad. Debido a la gravedad extrema de tal objeto, nada que entre en el llamado horizonte de eventos (una superficie esférica con $r = R_{SC}$, donde r es la distancia desde la singularidad) puede escapar de él. Aquí, R_{SC} se refiere como el radio de Schwarzschild.

(T12.1a) **Modelando el origen de la radiación de Hawking:** Considere un par de partículas, cada una con masa m , producidas a ambos lados del horizonte del BH. Una partícula está ligeramente fuera del horizonte en $r \approx R_{SC}$, mientras que la otra partícula está dentro del horizonte en $r = \kappa R_{SC}$. Suponga que la energía total de una partícula es la suma de su energía de masa en reposo mc^2 y la energía potencial gravitacional debido al BH.

Determine el valor de κ para el cual el par de partículas tiene energía total cero. [4]

(T12.1b) **Temperatura de un agujero negro:** Si la partícula producida fuera del horizonte en el proceso anterior tiene suficiente energía cinética, puede escapar del BH en un proceso llamado radiación de Hawking. La que está dentro del horizonte, que tiene energía negativa, es absorbida y disminuye la masa del BH.

Suponga que toda la radiación de Hawking está compuesta de fotones con un espectro de cuerpo negro que alcanza su pico en la longitud de onda $\lambda_{\text{bh}} \approx 16R_{\text{SC}}$. Se sabe que para un BH de masa solar, $R_{\text{SC}, \odot} = 2.952 \text{ km}$.

Obtenga una expresión para la temperatura, T_{bh} , del BH correspondiente a esta radiación de cuerpo negro, en términos de su masa M_{bh} y constantes físicas. Calcule el radio de Schwarzschild, $R_{\text{SC}, 10\odot}$, y la temperatura, $T_{\text{bh}, 10\odot}$, para un AN con masa $10 M_{\odot}$. [4]

(T12.1c) **Pérdida de masa de un agujero negro:** Suponga que la radiación de Hawking es emitida desde el horizonte de eventos.

Usando la equivalencia masa-energía, obtenga una expresión para la tasa de pérdida de masa, $dM_{\text{bh}}(t)/dt$, en términos de la masa $M_{\text{bh}}(t)$ del BH y constantes físicas.

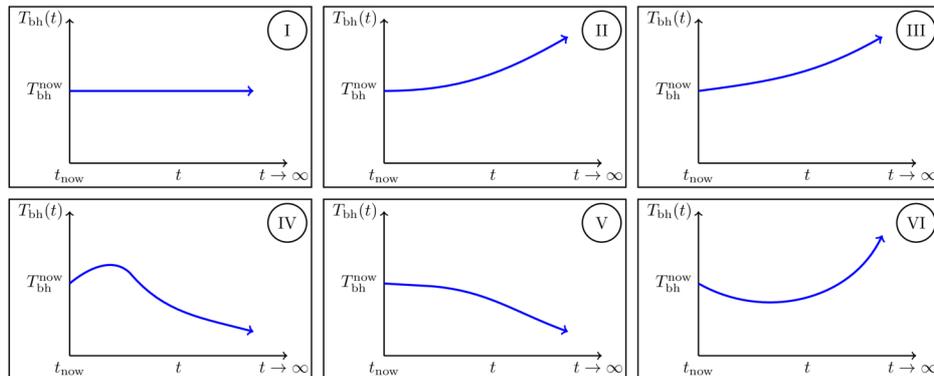
Por lo tanto, obtenga una expresión para $M_{\text{bh}}(t)$ para un BH con masa inicial M_0 . [8]
Dibuje $M_{\text{bh}}(t)$ como una función de t desde $M_{\text{bh}} = M_0$ hasta $M_{\text{bh}} = 0$.

(T12.1d) **Tiempo de vida de un agujero negro:** Obtén una expresión para la vida útil τ_{BH} en la que un agujero negro con masa inicial M_0 se evapora completamente debido a la radiación de Hawking, en términos de M_0 y constantes físicas. Calcula la vida útil $\tau_{\text{bh}, 10\odot}$ (en segundos) para un agujero negro con $M_0 = 10 M_{\odot}$. [3]

(T12.1e) **Agujero negro en un baño de radiación CMB:** Considere un agujero negro aislado en el espacio, lejos de otros cuerpos, con una temperatura actual $T_{\text{bh}}^{\text{now}}$, rodeado por el fondo cósmico de microondas (CMB) con una temperatura actual $T_{\text{cmb}}^{\text{now}} = 2.7 \text{ K}$. El agujero negro puede aumentar su masa absorbiendo radiación CMB y perder su masa por radiación de Hawking.

Teniendo en cuenta la expansión acelerada del Universo, identifique cuál de las siguientes figuras muestra la evolución temporal a largo plazo de T_{bh} en los siguientes tres casos:

(X) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} > T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$, (Y) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} = T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$, (Z) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} < T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$.



Indique su respuesta marcando la casilla correspondiente (solo una) para cada caso X, Y o Z en la Tabla dada en la Hoja de Respuestas Resumida correspondiente al número de figura apropiado. [6]

(T12.2) Los agujeros negros primordiales (PBHs) de masas mucho más pequeñas pueden formarse en el Universo muy temprano. Todas las siguientes preguntas están relacionadas con los PBHs. Aquí, se pueden ignorar cualquier proceso que aumente la masa del agujero negro.

(T12.2a) **PBH evaporando en la época actual:** Como habrás notado en las respuestas a las preguntas anteriores, los agujeros negros de masa solar tardarían mucho tiempo en evaporarse. Sin embargo, dado que los PBH pueden tener una masa mucho menor, podríamos verlos evaporarse en la actualidad.

Encuentra la masa inicial $M_{0, \text{PBH}}$ (en kg), el radio de Schwarzschild $R_{\text{SC, PBH}}$ (en m), [4] y la temperatura T_{PBH} (en K) de un agujero negro que podría estar evaporándose completamente en la época actual, es decir, aquellos con una vida útil de $\tau_{\text{PBH}} = 14$ mil millones de años.

(T12.2b) **Formación de un PBH:** En el Universo temprano dominado por la radiación, el factor de escala varía como $a(t) \sim t^{1/2}$. En esta era, los PBH se forman debido al colapso de toda la energía contenida en una región de tamaño físico ct , donde t es la edad del Universo en ese momento.

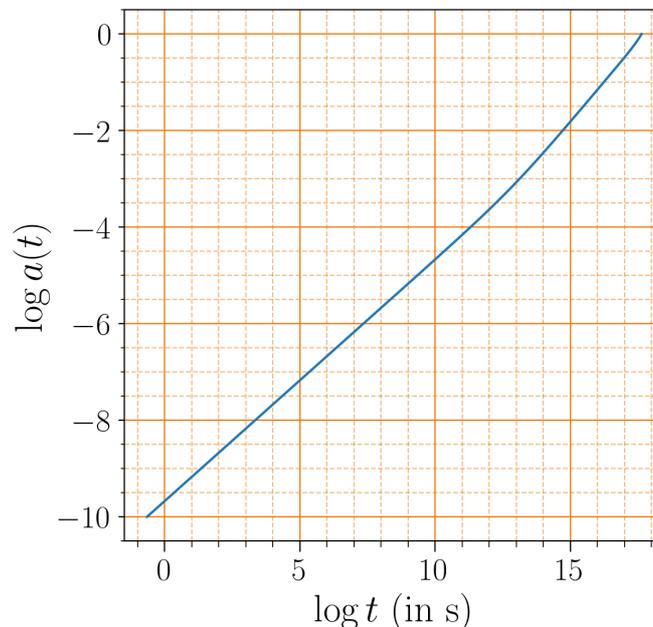
Un PBH con una masa de 1×10^{12} kg se forma cuando la edad del Universo es de [6] aproximadamente 1×10^{-23} s. Calcula la edad del Universo, t_{20} , cuando se forma un PBH de masa 1×10^{20} kg.

(T12.2c) **Espectro observado de la radiación de Hawking de PBH:** Considere un PBH de masa inicial 1×10^{10} kg que se evapora completamente al final de su vida útil τ_{PBH} . Para esta parte, asuma por simplicidad que la mayor parte de la radiación de Hawking se emite en este momento, con una temperatura correspondiente a su masa inicial. Además, considere que el factor de escala del Universo evoluciona como $a(t) \sim t^{2/3}$.

Calcule la longitud de onda pico de esta radiación de Hawking tal como se observa en [5] la Tierra, λ_{earth} , en la época actual (a $t = 14$ mil millones de años).

(T12.2d) **Radiación cósmica de alta energía de PBH:** Ahora suponga que la radiación de Hawking emitida en un momento dado t corresponde a fotones emitidos con una energía $k_B T_{\text{bh}}(t)$. Además, la temperatura más alta posible para un agujero negro es la temperatura de Planck T_{Planck} donde $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

La evolución del factor de escala a lo largo de escalas de tiempo relevantes se muestra en la siguiente figura. El factor de escala hoy se establece en la unidad. $t(s)$ en el eje del tiempo representa la edad del universo en segundos.



Si se observa un fotón con una energía de $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$ eV en la Tierra, determine [10] los valores más grandes y más pequeños posibles de la masa inicial del PBH (M_0^{max} y M_0^{min} , respectivamente) que podrían ser responsables de este fotón.

