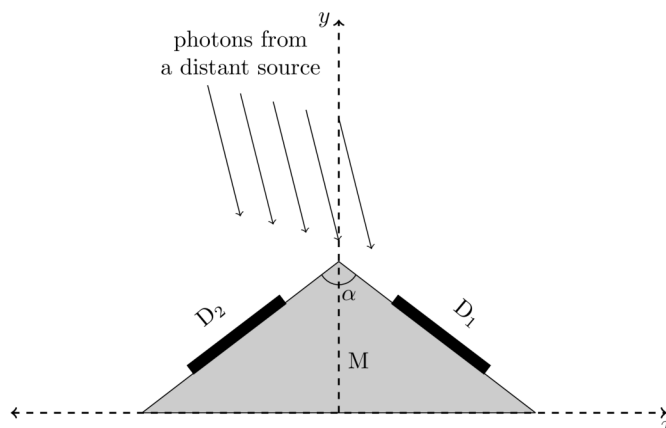


(T01) Mise Daksha
[10 bodů]

"Daksha" je navrhovaná indická mise sestávající ze dvou družic S_1 a S_2 obíhajících kolem Země po stejné kruhové dráze o poloměru $r = 7000$ km, ale s fázovým rozdílem 180° . Tyto družice pozorují vesmír v oblasti vysokých energií (rentgenové záření a γ -záření). Každá z družic Daksha používá několik plochých obdélníkových detektorů.

Abychom pochopili, jak lokalizovat zdroj na obloze, použijeme zjednodušený model mise Daksha. Předpokládejme, že S_1 má pouze dva identické detektory D_1 and D_2 , každý o ploše $A = 0,50$ m², připevněné k neprůhlednému držáku M, jak je znázorněno na obrázku níže. Detektory leží symetricky podle osy y v rovinách kolmých k rovině x - y a svírají spolu úhel $\alpha = 120^\circ$.



- (T01.1) Při pozorování vzdáleného zdroje umístěného v rovině x - y detektor D_1 zaznamená výkon $P_1 = 2,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ a detektor D_2 zaznamená výkon $P_2 = 4,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹.

Odhadněte úhel η , který svírá polohový vektor zdroje s kladnou osou y , přičemž úhel proti směru hodinových ručiček se považuje za kladný. **[5]**

Uvažujme jediný impuls ze vzdáleného zdroje (ne nutně v rovině x - y) zaznamenaný oběma satelity (S_1 a S_2) Dakshy. Časy maxim impulsů zaznamenaných satelity S_1 a S_2 jsou t_1 a t_2 .

- (T01.2) Pokud byla naměřena hodnota $t_1 - t_2 = 10,0 \pm 0,1$ ms, určete část (podíl) oblohy f , na které se může nacházet zdroj. **[5]**

(T02) Makar-Sankranti
[10 bodů]

Festival "Makar-Sankranti" se v Indii slaví, když se Slunce zdánlivě přesouvá do zvířetníkové části Kozoroha (Makar = Kozoroh, Sankranti = Vstup) při pohledu ze Země. V současnosti se každý rok slaví kolem 14. ledna. Před mnoha lety tento festival na severní polokouli také připadal na zimní slunovrat, který předpokládáme, že nastává 21. prosince.

- (T02.1) Na základě výše uvedených informací určete rok y_c , kdy se oslava tohoto svátku naposledy konala spolu se zimním slunovratem na severní polokouli. **[3]**
- (T02.2) Jestliže Slunce vstoupilo do zvířetníkové části souhvězdí Kozoroha v místním čase 11:50:13 hodin dne 14. ledna 2006 v Bombaji, vypočítejte datum D_{enter} a místní čas t_{enter} jeho vstupu do Kozoroha v roce 2013. **[3]**
- (T02.3) Svátek Makar-Sankranti se slaví na daném místě v den prvního západu Slunce ve zvířetníkové části souhvězdí Kozoroha. Můžete předpokládat, že místní čas západu slunce v Bombaji v lednu je 18:30:00 hodin. **[5]**

Uveďte datum oslavy svátku v každém roce mezi lety 2006 a 2013 (zaškrtnutím (✓) příslušného políčka v tabulce uvedené v souhrnném odpovědním archu). **[4]**

(T03) Gravitační vlny
[15 bodů]

Binární systém obíhající černých děr generuje gravitační vlny. Uvažujte dvě černé díry v naší Galaxii s hmotnostmi $M = 36 M_\odot$ a $m = 29 M_\odot$, které se pohybují po kruhových drahách s úhlovou rychlostí ω kolem společného těžiště.

- (T03.1) Za předpokladu newtonovské gravitace odvoďte výraz pro úhlovou frekvenci ω_{ini} oběhu černých děr v čase t_{ini} , kdy vzdálenost mezi černými dírami byla 4,0 krát větší než součet jejich Schwarzschildových poloměrů pouze pomocí M, m a fyzikálních konstant.

Vypočítejte hodnotu ω_{ini} (v rad s^{-1}).

[5]

- (T03.2) V obecné teorii relativity vyzařují obíhající černé díry gravitační vlny s frekvencí f_{GW} , takže $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. To zmenšuje oběžné dráhy černých děr, což zase zvyšuje f_{GW} . Rychlost změny f_{GW} je

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^\beta M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

kde $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ se nazývá "chirpová hmotnost".

Určete hodnoty α, β a δ .

[4]

- (T03.3) Předpokládejte, že gravitační vlny spojené s touto událostí byly poprvé detekovány v čase $t_{\text{ini}} = 0$. **[6]**

Vyjádřete výraz pro pozorovaný čas splynutí černých děr t_{merge} , kdy se f_{GW} stává velmi velikou. Výraz vyjádřete pouze pomocí $\omega_{\text{ini}}, M_{\text{chirp}}$ a fyzikálních konstant. Vypočítejte hodnotu t_{merge} (v sekundách).

(T04) Balmer Decrement
[15 bodů]

Uvažujme hvězdu hlavní posloupnosti obklopenou mlhovinou. Pozorovaná hvězdná velikost hvězdy ve filtru V je 11,315 mag. Ionizovaná oblast mlhoviny v blízkosti hvězdy vyzařuje čáry $\text{H}\alpha$ a $\text{H}\beta$; jejich vlnové délky jsou 0,6563 μm a 0,4861 μm . Teoreticky předpovězený poměr toků v čarách $\text{H}\alpha$ a $\text{H}\beta$ je $f_{\text{H}\alpha}/f_{\text{H}\beta} = 2.86$. Když však toto záření prochází vnější částí chladné prachové mlhoviny, pozorované emisní toky čar $\text{H}\alpha$ a $\text{H}\beta$ jsou $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ a $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

Extinkce A_λ je funkcí vlnové délky a je vyjádřena jako

$$A_\lambda = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Zde $\kappa(\lambda)$ je extinkční křivka a $E(B - V)$ označuje barevný exces ve filtrech B a V. Extinkční křivka (s λ v μm) je dána jako.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

kde $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ je poměr celkové a selektivní extinkce.

- (T04.1) Určete hodnoty $\kappa(\text{H}\alpha)$ a $\kappa(\text{H}\beta)$.

[3]

(T04.2) Určete hodnotu poměru barevných excesů $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$. [4]

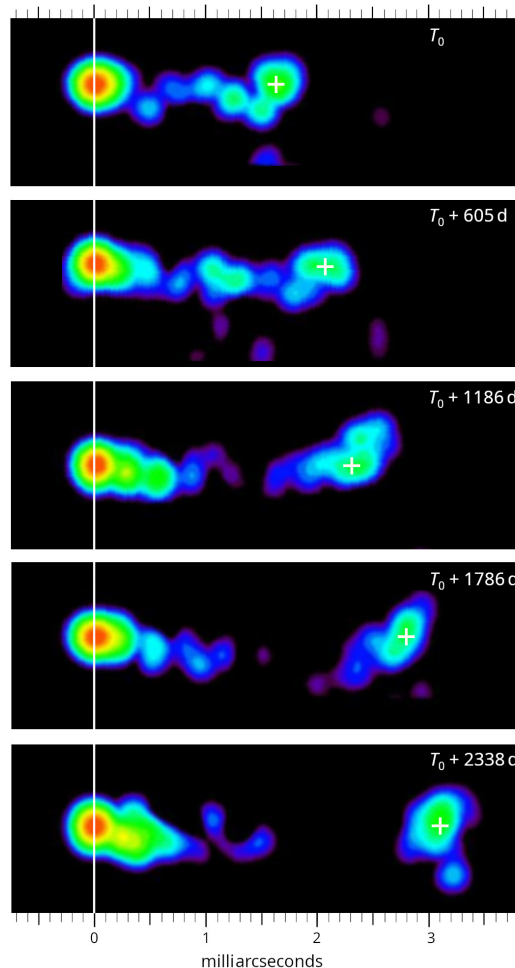
(T04.3) Odhadněte extinkci způsobenou mlhovinou, $A_{H\alpha}$ a $A_{H\beta}$, na vlnových délkách $H\alpha$ a $H\beta$. [6]

(T04.4) Odhadněte extinkci mlhoviny (A_V) a vizuální hvězdnou velikost m_{V0} bez přítomnosti mlhoviny v pásnu V. [2]

(T05) Kvasary

[20 bodů]

Kvasar je extrémně svítivá aktivní galaxie poháněná supermasivní černou dírou, která vysílá relativistické výtrysky. Obrázek ukazuje sérii rádiových snímků kvasaru (s rudým posuvem $z = 0.53$ a luminozitní vzdáleností $D_L = 1,00 \times 10^{10}$ ly) v různých časech. "Jádro" je zarovnáno se svislou bílou čarou, zatímco výtrysk, tvořený "skvrnou" (označená bílým +), se od něj v čase vzdaluje. Na každém panelu je uveden čas pozorování (počínaje T_0 pro první snímek) a úhlová stupnice, která je vyznačena v horní a dolní části obrázku.

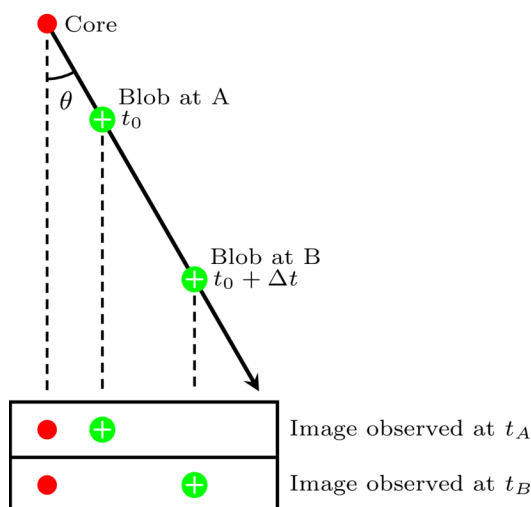


(T05.1) Určete úhlovou vzdálenost skvrny ϕ_{blob} (v úhlových milivteřinách), a jeho příčnou vzdálenost, l_{blob} (ve světelných letech) od jádra kvasaru pro každé pozorování. Poté vypočítejte zdánlivou rychlost skvrny v příčném směru (v_{app}) jako zlomek rychlosti světla $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ pomocí po sobě jdoucích pozorování. Vypočítejte také průměrnou zdánlivou rychlost $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ za celou dobu pozorování. [5]

Jet kvasaru se ve skutečnosti pohybuje relativistickou rychlostí $v \equiv \beta c$, ale ne nutně v rovině oblohy; např. svírá úhel θ (tzv. „pozorovací úhel“) vzhledem ke směru od vzdáleného pozorovatele (vyznačeno čárkovanými čarami),

jak je znázorněno na náčrtu níže.

Pro tuto a všechny následující části ignorujte rudý posuv kvasaru a jakékoliv relativistické jevy.



(T05.2) Světlo emitované skvrnou ve dvou různých časech t_0 (odpovídající pozici A) a $t_0 + \Delta t$ (odpovídající pozici B) dosáhne pozorovatele v časech t_A a t_B . Takže pozorovaný časový rozdíl je $\Delta t_{app} = t_B - t_A$.

(T05.2a) Napište výraz pro poměr $\frac{\Delta t_{app}}{\Delta t}$ v závislosti na β a θ . [2]

(T05.2b) Pomocí tohoto poměru vyjádřete β_{app} v závislosti na β a θ . [2]

(T05.3) Pohyb se nazývá superluminální, pokud zdánlivá rychlost překročí rychlost světla ($\beta_{app} > 1$), a subluminální, pokud ne ($\beta_{app} < 1$).

(T05.3a) Pro $\beta_{app} = 1$ nakreslete závislost (spojitou křivkou) β jako funkci θ za účelem nalezení hranice mezi subluminálními a superluminálními pohyby. V grafu vyšrafujte superluminální oblast šikmými čarami (///). [4]

(T05.3b) Určete nejnižší skutečnou rychlost výtrisku ($\beta_{low} = v_{low}/c$) pro výskyt superluminálního pohybu a také jeho odpovídající pozorovací úhel θ_{low} . [2]

(T05.4) Odvoďte výraz pro maximální pozorovací úhel θ_{max} , který je možný pro danou hodnotu β_{app} . [2]

Jádro kvasaru (jeho centrální kompaktní objekt) vykazuje variabilitu ve své emisi kvůli vnitřním procesům probíhajícím v kauzálně propojené oblasti. Velikost (= poloměr) této oblasti se obvykle považuje za přibližně pětinašobek Schwarzschildova poloměru jádra.

(T05.5) Jádro určitého kvasaru se mění na časových škálách přibližně 1 h. Odvoďte horní limit, $M_{c, max}$, hmotnosti centrálního kompaktního objektu, ve hmotnostech Slunce. [3]

(T06) Galaktická rotace

[20 bodů]

Rotační křivka naší Galaxie je určena pomocí měření radiální rychlosti neutrálních vodíkových (HI) oblaků podél různých galaktických délek, pozorovaných prostřednictvím 21 cm HI čáry. Uvažujte HI oblak s galaktickou délkou l , nacházející se ve vzdálenosti R od galaktického centra (GC) a ve vzdálenosti D od Slunce. Předpokládejte, že Slunce je ve vzdálenosti $R_0 = 8,5$ kpc od GC. Předpokládejte, že jak Slunce, tak HI oblak jsou na kruhových drahách kolem GC v galaktické rovině s úhlovými rychlostmi Ω_0 a Ω a rotačními rychlostmi V_0 a V .

Rychlost podél spojnice pozorovatele a objektu (V_r) a příčnou rychlost (V_t) oblaku, jak jsou pozorovány ze Slunce, lze vyjádřit jako

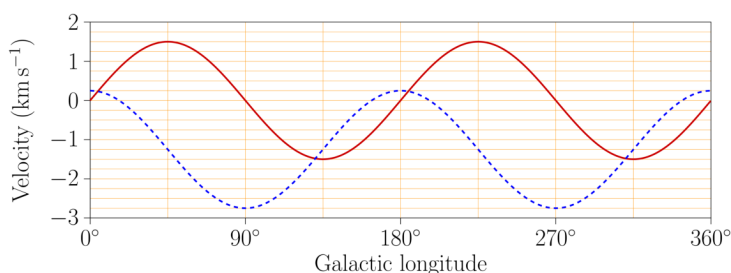
$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Při pohledu ze severního galaktického pólu je galaktická rotace ve směru hodinových ručiček. V celé této úloze budeme považovat rychlost podél spojnice pozorovatele a objektu za kladnou při vzdalování a oblaky budou považovány za bodové objekty.

- (T06.1) Do grafu uvedeném v souhrnném odpovědním archu nakreslete V_r jako funkci D od $D = 0$ do $D = 2R_0$ pro dva směry od pozorovatele o hodnotách (i) $l = 45^\circ$ a (ii) $l = 135^\circ$. Označte každou z vašich linií/křivek hodnotou l . [5]

- (T06.2) Graf níže ukazuje průměrné radiální (plná, červená křivka) a příčné (čárkovaná, modrá křivka) složky rychlosti hvězd ve vzdálenosti 100 pc od Slunce jako funkce Galaktické délky. [3]



Pomocí grafu odhadněte oběžnou periodu Slunce (P) kolem GC v mega-letech (Myr). [3]

- (T06.3) Jan Oort zjistil, že v okolí Slunce ($D \ll R_0$) bude rozdíl v úhlových rychlostech ($\Omega - \Omega_0$) malý, a proto odvodil následující aproximaci prvního řádu pro radiální a příčné složky rychlosti:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

kde A a B jsou známé jako Oortovy konstanty.

Zvažme dva případy:

(I) rotační křivka Galaxie je taková, jak je ve skutečnosti pozorována, a

(II) rotační křivka je pro hypotetický scénář, kde Galaxie postrádá temnou hmotu a celá hmotnost Galaxie je soustředěná v jejím středu.

- (T06.3a) Odvoďte vztahy pro radiální gradient rotační rychlosti v místě Slunce $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ pro oba případy. [2]

- (T06.3b) Vyjádřete A a B pomocí V_0 , R_0 a radiálního gradientu rotační rychlosti v místě Slunce $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$. [8]

- (T06.3c) Poměry (A/B) Oortových konstant pro oba dané případy, (I) a (II), jsou definovány jako F_I a F_{II} . Určete F_I a F_{II} . [2]

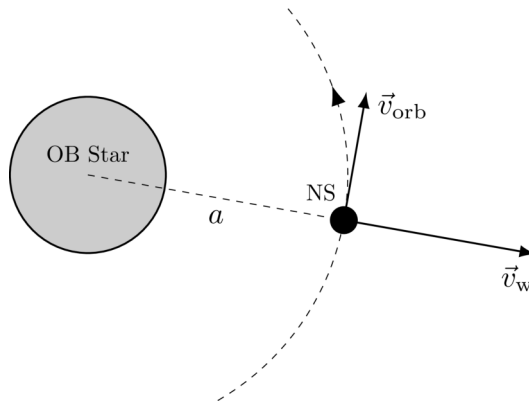
(T07) Dvojhvězda s neutronovou hvězdou

[20 bodů]

V binárním systému zahrnujícím kompaktní hvězdu, kde sekundární hvězda nepřetéká svůj Rocheův lalok, je hlavním zdrojem akrece pro kompaktní hvězdu hvězdný vítr ze sekundární hvězdy. Tato větrem poháněná akrece

je obzvláště významná v systémech, které zahrnují hvězdu raného typu (jako je hvězda typu O nebo B, dále označovaná jako OB hvězda) spolu s kompaktním objektem, jako je neutronová hvězda (NS) na blízké oběžné dráze.

Zvažte takový binární systém NS-OB hvězda, kde neutronová hvězda o hmotnosti $M_{\text{NS}} = 2,0 M_{\odot}$ a poloměru $R_{\text{NS}} = 11 \text{ km}$ obíhá po kruhové dráze o poloměru a kolem středu OB hvězdy s rychlostí $v_{\text{orb}} = 1,5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (viz obrázek níže). Po celou dobu této úlohy předpokládejte, že ztráta hmoty z OB hvězdy je sféricky symetrická a její rychlost je $\dot{M}_{\text{OB}} = 1,0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.



- (T07.1) Akreční poloměr, R_{acc} , je definován jako maximální vzdálenost od NS, na které může být hvězdný vítr zachycen neutronovou hvězdou. Pokud je rychlost hvězdného větru ve vzdálenosti orbity NS $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, určete R_{acc} v km pro výše uvedený systém pomocí standardního výpočtu únikové rychlosti. [3]
- (T07.2) Předpokládejme, že NS akreuje veškerý zachycený materiál. Odhadněte rychlost akrece hmoty na NS $\dot{M}_{\text{acc}}$ z hvězdného větru v jednotkách $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, pokud $a = 0.5 \text{ au}$. Zanedbejte účinky radičního tlaku a konečné doby ochlazování akreovaného plynu. [3]
- (T07.3) Nyní zvažte situaci, kdy rychlost hvězdného větru ve vzdálenosti oběžné dráhy a (blízko NS) se stává srovnatelnou s oběžnou rychlostí NS. Míra akrece hmoty z hvězdného větru na NS by v tomto případě byla dána výrazem ve tvaru $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} f(\tan \beta, q)$, kde $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$ je poměr hmotností složek binárního systému a β je úhel v soustavě NS mezi směrem rychlosti větru a radiálním směrem od OB hvězdy. Odvoďte výraz pro $f(\tan \beta, q)$ za předpokladu, že $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$. [6]
- (T07.4) Uvažujme, že úplně ionizovaný materiál je akreován radiálně a je brzděn silným magnetickým polem $\vec{B}$ neutronové hvězdy. Tento efekt lze modelovat jako tlak, daný vztahem $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Předpokládejme, že NS má dipólové magnetické pole, jehož velikost v rovníkové rovině se mění se vzdáleností r od NS pro $r \gg R_{\text{NS}}$ jako

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

, kde B_0 je magnetické pole na rovníku NS. Předpokládejme, že osa magnetického dipólu je srovnána s rotační osou NS.

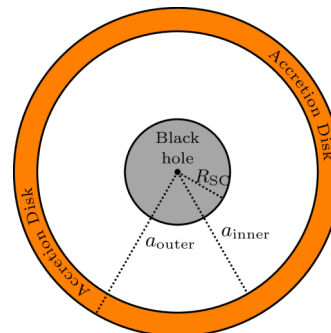
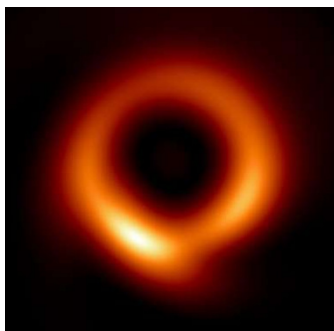
- (T07.4a) Vyjádřete magnetický tlak $P_{\text{eq, mag}}$ v rovníkové rovině pomocí B_0 , R_{NS} , r a dalších vhodných konstant. [1]
- (T07.4b) Maximální vzdálenost, kde je akreční tok zastaven magnetickým polem v rovníkové rovině, se nazývá magnetosférický poloměr R_m . Tento tok hmoty bude vyvíjet tlak kvůli relativnímu pohybu mezi přicházejícím hvězdným větrem a NS. Získejte přibližný výraz pro kritické magnetické pole $B_{0, c}$, pro které R_m splývá s R_{acc} a vypočítejte jeho hodnotu v jednotkách tesla. Magnetické efekty jsou zanedbatelné pro $r > R_m$ a uvažujte $v_w \gg v_{\text{orb}}$. [7]

(T08) Stín černé díry

[20 bodů]

Event Horizon Telescope (EHT) pořídil snímek supermasivní černé díry ve středu galaxie M87, jak je znázorněno na levém panelu obrázku níže.

Abychom pochopili některé jednoduché vlastnosti tohoto snímku, budeme uvažovat zjednodušený model nerotující, statické, sféricky symetrické černé díry o hmotnosti $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$, obklopené nehmotným, tenkým, rovinným akrečním diskem s vnitřním a vnějším poloměrem, $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ a $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, kde R_{SC} je Schwarzschildův poloměr. Náčrt pohledu zepředu je zobrazen na pravém panelu obrázku níže (obrázek není v měřítku).



Předpokládáme, že akreční disk je jediným zdrojem světla, který je třeba zvážit. Každý bod na disku vyzařuje světlo do všech směrů. Toto světlo se šíří pod vlivem gravitačního pole černé díry. Dráha světelných paprsků je řízena dvěma rovnicemi uvedenými níže (které jsou podobné těm pro objekt u Slunce):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

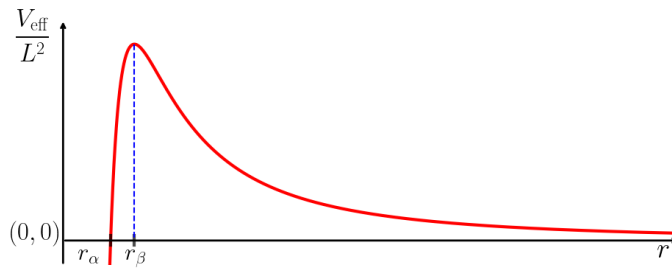
kde $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ je radiální souřadnice, $\phi \in [0, 2\pi)$ je azimutální úhel a E a L jsou konstanty související se zachováním energie a zachováním momentu hybnosti.

Zde $v_r \equiv dr/dt$ je velikost radiální rychlosti, v_ϕ je velikost tečné rychlosti a $\omega \equiv d\phi/dt$ je úhlová rychlost. Definujeme impaktní parametr b pro trajektorii jako $b = L/\sqrt{2E}$. Dilatace času je v tomto problému zanedbána.

Další užitečná rovnice je získána derivováním první rovnice:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

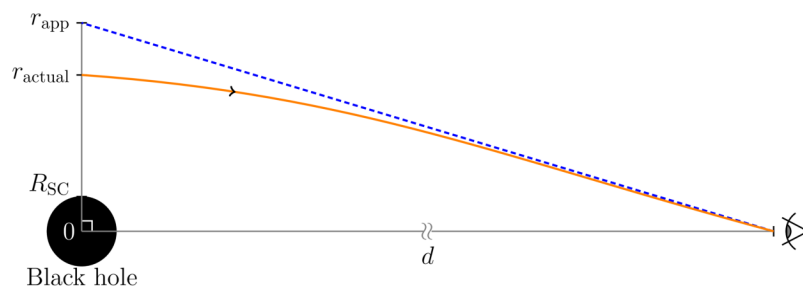
- (T08.1) Kruhové světelné dráhy mohou existovat kolem černé díry. Určete poloměr r_{ph} a impaktní parametr b_{ph} , pro takové dráhy fotonů v závislosti na M a relevantních konstantách. [4]
- (T08.2) Vypočítejte čas T_{ph} , potřebný k dokončení jednoho úplného oběhu kruhové dráhy světla v sekundách. [2]
- (T08.3) Rovnice radiální rychlosti uvedená výše (první rovnice v této otázce) může být porovnána s rovnicí ve tvaru $\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ pro trajektorie světla. Schématický graf V_{eff}/L^2 jako funkce r je uveden níže.



(T08.3a) Graf zobrazuje dva významné poloměry, r_α a r_β . Odvoďte výrazy pro r_α a r_β v závislosti na M a relevantních konstantách. [2]

(T08.3b) Fotony cestující směrem dovnitř z akrečního disku k černé díře mohou v některých případech stále uniknout do nekonečna. Pro takový foton odvoďte výraz pro nejmenší hodnotu poloměru bodu obratu, r_t v závislosti na M a relevantních konstantách. Odvoďte výraz pro minimální hodnotu impaktního parametru $b_{\min}$ pro tento foton. [3]

(T08.4) Paprsek světla přicházející z poloměru r_{actual} od středu systému v rovině kolmé na směr k pozorovateli bude silně ohýbán gravitací černé díry a nakonec dosáhne pozorovatele (označeného okem) ve velké vzdálenosti d od systému, jak je znázorněno níže.

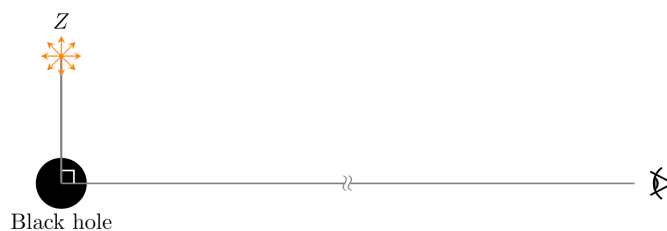


Pro tohoto pozorovatele by se zdálo, že paprsek pochází z jiného bodu ve vzdálenosti $r_{\text{app}} \approx b$ od středu černé díry v rovině kolmé na směr k pozorovateli, kde b je impaktní parametr pro tuto trajektorii fotonu. Pro body na akrečním disku s $r = r_{\text{actual}}$ lze předpokládat následující vztah:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

Pro vzdáleného pozorovatele, jako jsme my, který se nachází ve směru kolmém na disk, se obraz systému bude jevit jako kruhově symetrický v rovině kolmé na směr k pozorovateli. Určete nejvzdálenější zdánlivý poloměr r_{outer} a nejbližší zdánlivý poloměr r_{inner} obrazu v jednotkách a_u . [5]

(T08.5) Uvažujte izolovanou supermasivní černou díru o hmotnosti $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$ bez akrečního disku. Po dobu 5 s nastane krátký silný výbuch elektromagnetického záření v bodě Z ve vzdálenosti, řekněme, $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ od černé díry, jak je znázorněno na obrázku. Výbuch v bodě Z vyzařuje světlo všemi směry. Pozorovatel v bodě daleko od černé díry (označený okem na obrázku níže) pořídí dlouhou expozici obrazu oblasti kolem černé díry po dobu 60 s.



Vyberte správnou možnost pro každé z následujících tvrzení:

(T08.5a) Počet možných cest, kterými může světlo cestovat z bodu Z k pozorovateli, je (A) Nejvýše jedna (B) Přesně jedna (C) Přesně dvě (D) Více než dvě. [2]

- (T08.5b) Počet obrazů EM výbuchu v Z, které budou vidět na dlouhé expozici, je (A) Nejvýše jeden (B) Přesně jeden (C) Přesně dva (D) Více než dva.

[2]

(T09) Atmosférické vidění

[35 bodů]

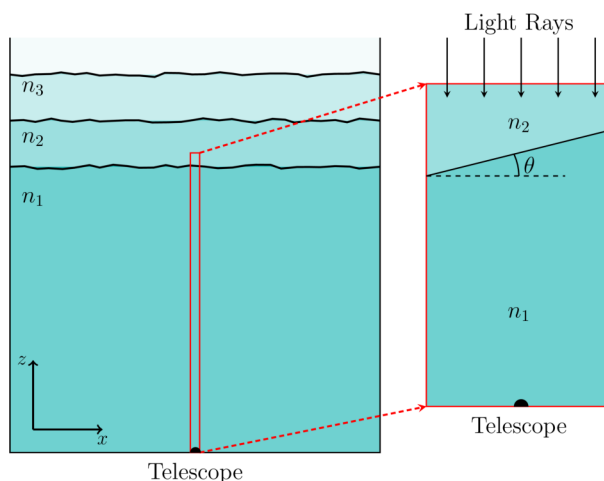
Dalekohled s achromatickým konvexním objektivem o průměru $D = 15$ cm s ohniskovou vzdáleností $f = 200$ cm je namířen na hvězdu v zenitu.

- (T09.1) Určete průměr (v m) d_{image} obrazu bodového zdroje, jak je vytvořen objektivem v jeho ohniskové rovině pro zelené světlo ($\lambda = 550$ nm). Uvažujte pouze vliv difrakce. [1]

Obraz astronomického zdroje je také ovlivněn tzv. „atmosférickým seeingem“.

Hranice mezi vrstvami v atmosféře, stejně jako indexy lomu těchto vrstev, se neustále mění kvůli turbulencím, změnám teploty a dalším faktorům. To vede k drobným změnám v poloze obrazu v ohniskové rovině dalekohledu, známým jako „efekt mihotání“. Pro zbytek úlohy, kromě uvážení konečné velikosti obrazu hvězdy vlivem difrakce (jak bylo použito výše), nebudou zvažovány žádné interferenční jevy.

Levý panel obrázku níže ukazuje vertikální průřez atmosférou s několika vrstvami o různých indexech lomu ($n_1, n_2, n_3, \dots$). Pravý panel ukazuje přiblížený pohled na tenký vertikální segment atmosféry a hranici mezi dvěma nejnižšími atmosférickými vrstvami o indexech lomu n_1 a n_2 ($n_1 > n_2$). V této úloze uvažujeme pouze tyto dvě vrstvy a jejich hranici. Diagramy nejsou v měřítku.



- (T09.2)

Nechť má hranice mezi dvěma vrstvami ve výšce $H = 1$ km přímo nad objektivem dalekohledu náklon $\theta = 30^\circ$ vzhledem k vodorovné rovině. Ve všech částech této úlohy je θ považováno za kladné proti směru hodinových ručiček. Pro monochromatický zdroj světla $n_1 = 1.00027$ a $n_2 = 1.00026$. Označme úhlový posun obrazu v ohniskové rovině dalekohledu pro hvězdu v zenitu α .

- (T09.2a) Nakreslete vhodně popsany paprskový diagram na hranici zobrazující n_1, n_2, θ a α . [2]

- (T09.2b) Určete vztah pro α v závislosti na θ, n_1 a n_2 . Použijte aproximace pro malé úhly: $\sin \alpha \approx \alpha$ a $\cos \alpha \approx 1$. [2]

- (T09.2c) Vypočítejte posunutí Δx_θ (v m) v poloze obrazu, pokud se θ zvýší o 1 % (při zachování konstantních n_1 a n_2). [3]

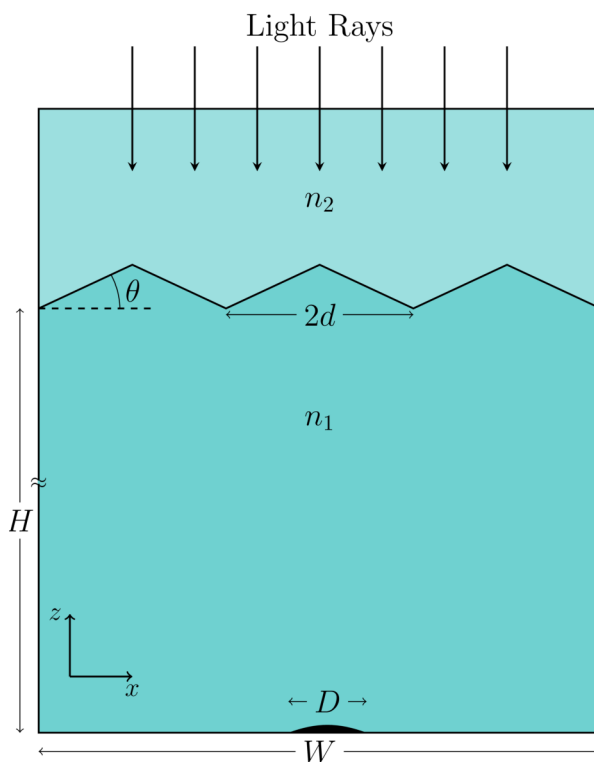
- (T09.2d) Vypočítejte posunutí Δx_n (v m) v poloze obrazu, pokud se n_2 zvýší o 0,0001 % (při zachování konstantních n_1 a θ). [3]

- (T09.3) Pro bílé světlo přicházející z hvězdy v zenitu vyberte, která z následujících možností nejlépe [2]
popisuje tvar a barvu obrazu zaškrtnutím (✓) do příslušného políčka (pouze jednoho) v
souhrnném odpovědním archu. Poznámka: x ve schématu roste zleva doprava.

	Barva obrazu	Tvar obrazu	Levá hrana	Pravá hrana
A	Bílá	Kruhový		
B	Bílá	Elipsoidický		
C	Barevná	Kruhový	Modrá	Červená
D	Barevná	Kruhový	Červená	Modrá
E	Barevná	Elipsoidický	Modrá	Červená
F	Barevná	Elipsoidický	Červená	Modrá

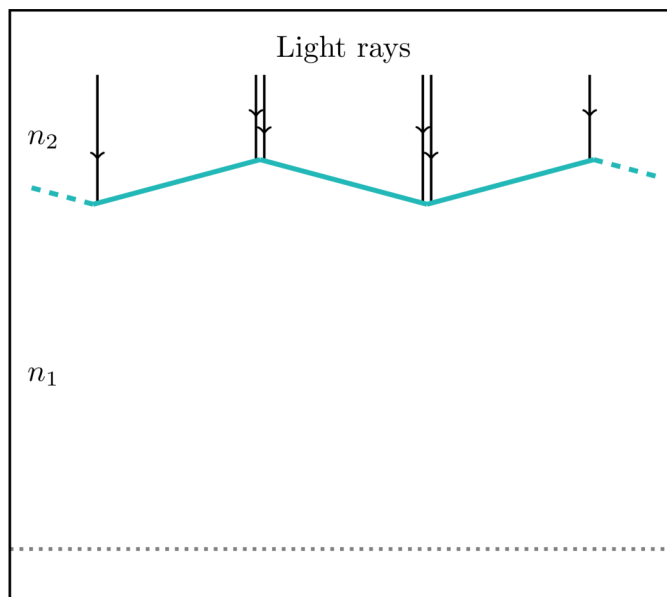
Ve všech zbývajících částech této otázky uvažujeme monochromatické zelené světlo s $\lambda = 550$ nm. Modelujme hranici mezi vrstvami jako soustavu nekonečných cikcakových rovin (vedoucích kolmo k rovině stránky) oddělených $d = 10$ cm podél osy x , s buď $\theta = 10^\circ$ nebo $\theta = -10^\circ$.

Obrázek níže (není v měřítku) ukazuje průřez tohoto modelu atmosféry o šířce W ($W \ll H$). Pro dalekohledy s velkou aperturou tato cikcaková povaha hranice vede k tvorbě skvrn (teček) na ohniskové rovině.



- (T09.4) Uvažujte atmosféru modelovanou jako výše.

- (T09.4a) Část atmosféry skládající se z cikcak rovin se stejnými parametry, jak je uvedeno výše, je zobrazena na diagramu níže (není v měřítku).



Do tohoto diagramu, uvedeného také v Souhrnném odpovědním archu, nakreslete dráhy dopadajících světelných paprsků až po rovinu, kde je umístěn objektiv dalekohledu, znázorněnou šedou tečkovanou čarou.

Označte oblast(i), pokud nějaké existují, na diagramu písmenem „X“, kam [4]
nedosáhnou žádné světelné paprsky.

(T09.4b) Vypočítejte šířku W_X takovéto oblasti (oblastí). [3]

(T09.4c) Určete největší průměr $D_{\max}$ objektivu dalekohledu, se kterým bude možné získat [4]
jediný obraz hvězdy, vhodnou volbou umístění dalekohledu vzhledem ke struktuře
hranice.

(T09.5) Zvažte případ, kdy má hranice cikcak tvar v obou směrech x a y (jako pole pyramid), a $D =$ [6]
100 cm (s $f = 200$ cm).

Nakreslete kvalitativně tvar výsledných skvrn do pole uvedeného v Souhrnném odpovědním archu.

(T09.6) Pro turbulentní atmosféru opět uvažujte stejný kolmý cikcakový tvar hraniční vrstvy pouze podél [5]
směru x , ale nyní se úhel mezi dvěma rovinami mění rovnoměrně z 10° na -10° během 1,0 s.
Předpokládejte, že to vede k rovnoměrné rychlosti posunu polohy obrazu.

Zvažte dalekohled s $D = 8$ cm a $f = 1$ m. Odhadněte nejdelší expoziční čas $t_{\max}$ povolený pro jeho
CCD kameru tak, aby vznikl pouze jeden obraz a jakákoli možná odchylka v jeho poloze zůstala
menší než 1 % průměru obrazu omezeného difrakcí.

(T10) Nukleosyntéza velkého třesku

[35 bodů]

Během éry dominované zářením v raném vesmíru je škálový faktor vesmíru $a \propto t^{1/2}$, kde t je čas od velkého
třesku. Během většiny této éry zůstávají neutrony (n) a protony (p) v termodynamické rovnováze mezi sebou
prostřednictvím slabých interakcí. Početní hustota (koncentrace) (N) volných neutronů nebo protonů je vztažena k
teplotě T a jejich odpovídajícím hmotnostem m tak, že

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

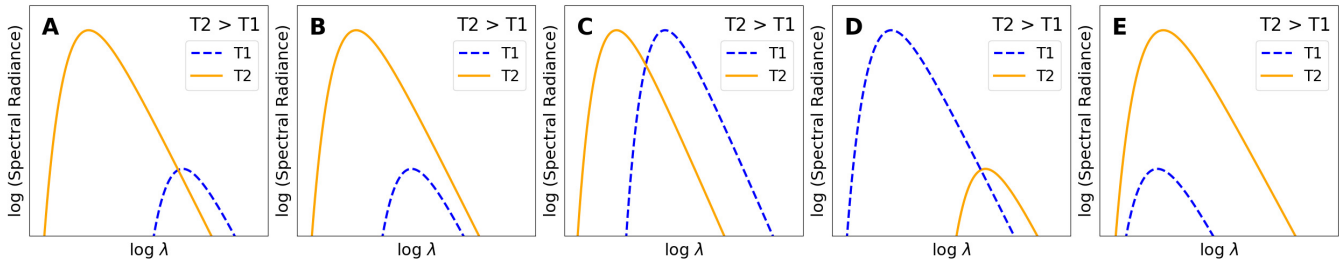
dokud je čas $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70$ s, kdy $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. Po t_{wk} již slabé interakce nemohou udržovat takovou
rovnováhu a volné neutrony se rozpadají na protony s poločasem rozpadu 610,4 s.

(T10.1) Necht' je početní hustota protonů N_p a početní hustota neutronů N_n . Vypočítejte relativní zastoupení neutronů dané poměrem $X_{n, wk} = N_n / (N_n + N_p)$ v čase t_{wk} . [4]

(T10.2) Fotony udržují tepelnou rovnováhu a zachovávají spektrum černého tělesa ve všech epochách.

(T10.2a) Vyjádřete index β definovaný vztahem $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Určete, který z následujících grafů ukazuje správné chování spektrální hustoty energie pro dvě teploty T_1 a T_2 . Zaškrtněte (✓) správnou možnost v souhrnném odpovědním archu. [2]



(T10.3) Po t_{wk} je proces tvorby deuteria z protonů a neutronů řízen Sahaovou rovnicí, se kterou přišel indický fyzik Prof. Meghnad Saha, a kterou lze zjednodušit na

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

Kde poměr baryonů k fotonům η je 6.1×10^{-10} , a N_D je početní hustota (koncentrace) deuteria.

(T10.3a) Vyznačte poměr N_D/N_n do grafu v Souhrnném odpovědním archu, pro alespoň 4 rozumně rozložené hodnoty teploty, které leží v rozmezí $k_B T = [60, 70]$ keV a nakreslete hladkou křivku procházející těmito body. [5]

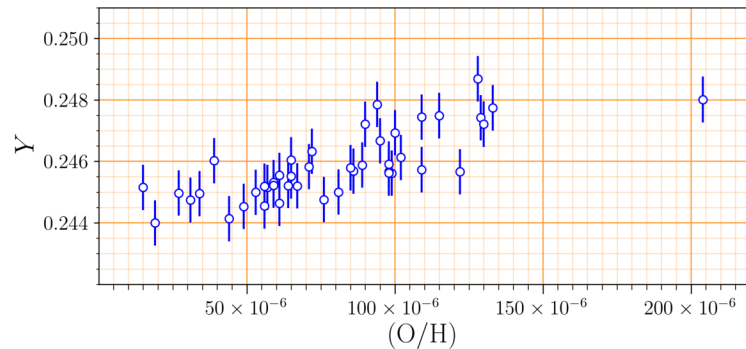
(T10.3b) Z grafu zjistěte $k_B T_{nuc}$ (v keV), když $N_D = N_n$. [1]

(T10.3c) Nyní předpokládejte, že všechny volné neutrony se okamžitě spojí s protony při $k_B T_{nuc}$ a vytvoří deuterium, které se všechny okamžitě přemění na helium (${}^4_2\text{He}$). Vypočítejte odpovídající epochu nebo čas nukleosyntézy t_{nuc} (v s) vzniku helia. [4]

(T10.4) Vypočítejte hodnotu $X_{n, nuc}$ těsně před t_{nuc} . [5]

(T10.5) Primordiální abundance helia Y_{prim} je definována jako podíl celkové baryonové hmoty ve vesmíru, která je vázána v heliu těsně po t_{nuc} . Proved'te teoretický odhad hodnoty Y_{prim} . Pro účely tohoto výpočtu předpokládejte, že $m_p \approx m_n$ a že hmotnost helia $m_{He} \approx 4m_n$. [3]

- (T10.6) Primordiální množství helia je velmi obtížné měřit, protože ve vesmíru hvězdy neustále přeměňují vodík na helium. Množství vytváření helia hvězdami v galaxii je charakterizováno relativní hustotou kyslíku (který je produkován pouze hvězdami) vzhledem k vodíku, označenou jako (O/H) . Kompilace měření (O/H) a množství helia Y pro různé galaxie je zobrazena níže.



Použijte všechny body v tomto grafu (který je reprodukován v Souhrnném odpovědním archu) k zodpovězení následujících otázek.

- (T10.6a) Odhadněte Y pro modrou kompaktní trpasličí galaxii s hodnotou $(O/H)=1.75 \times 10^{-4}$. [2]
- (T10.6b) Určete sklon $dY/d(O/H)$ přímky fitující výše uvedená data. [2]
- (T10.6c) Odhadněte primordiální množství helia, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, na základě výše uvedených pozorování. [2]
- (T10.7) Nesouhlas mezi Y_{prim} a $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ lze vyřešit změnou poměru baryonů k fotonům η . Když se η sníží, [3]
jak je uvedeno šipkou $\downarrow$ v Souhrnném odpovědním archu, zaznačte zvýšení ($\uparrow$) nebo snížení ($\downarrow$) v $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (když $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$ a Y_{prim} v čtverečích uvedených v Souhrnném odpovědním archu.

(T11) Hvězdy skrze grafy

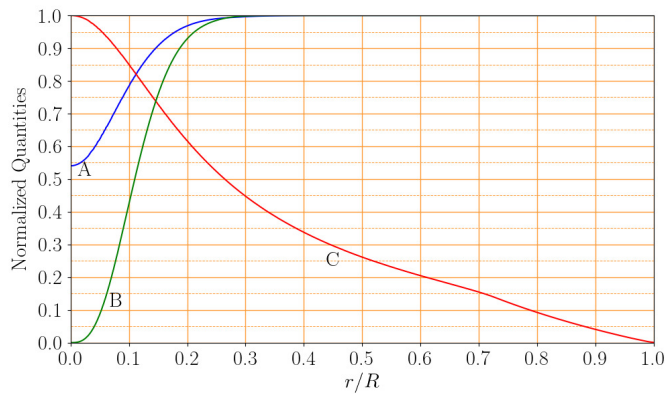
[50 bodů]

Hvězdy mohou být dobře aproximovány jako sféricky symetrické objekty, a proto lze radiální vzdálenost r od středu zvolit jako jedinou nezávislou proměnnou při modelování vnitřku hvězd. Hmotnost obsažená v kouli o poloměru r je označena jako $m(r)$. Zářivý výkon $l(r)$ je definován jako celková energie proudící ven skrze povrch koule o poloměru r za jednotku času. Další zajímavé veličiny, například hustota $\rho(r)$, teplota $T(r)$, hmotnostní zlomek vodíku $X(r)$, hmotnostní zlomek helia $Y(r)$ a jaderná energie generovaná na jednotku hmotnosti za jednotku času $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, jsou považovány za funkce r . V průběhu tohoto problému budeme zanedbávat účinky difúze a gravitačního usazování prvků uvnitř hvězdy.

Symbol "log" označuje logaritmus o základu 10. Úloha se skládá ze tří nezávislých částí.

(T11.1) Část 1: Uvnitř hvězdy

Graf níže ukazuje průběh tří veličin stavby, A, B a C, jako funkcí normalizovaného poloměru r/R v modelu hvězdy o hmotnosti $1 M_{\odot}$ a stáří 4 GYr, kde R je fotosférický poloměr hvězdy. Hodnoty hmotnostního zlomku helia na (fotosférickém) povrchu Y_s a metalicity (hmotnostní zlomek všech prvků těžších než helium) na (fotosférickém) povrchu Z_s hvězdy jsou dány jako $(Y_s, Z_s) = (0.28, 0.02)$. Všechny veličiny zobrazené v grafech jsou normalizovány svými příslušnými maximálními hodnotami.



(T11.1a) Identifikujte tři veličiny A, B a C jednoznačně z pěti možností:

[6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Napište A/B/C do políček vedle příslušných veličin v Souhrnném odpovědním archu. Vaši odpověď není třeba zdůvodňovat.)

(T11.1b) Jaký je hmotnostní zlomek helia ve středu hvězdy Y_c ?

[3]

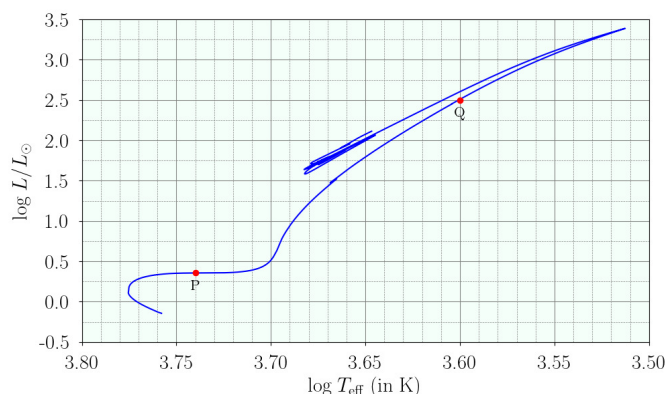
(T11.1c) Nakreslete zbývající dvě veličiny ze seznamu pěti (které nebyly identifikovány jako křivky A, B nebo C) uvedeného v (T11.1a) jako funkce r/R do stejného grafu v Souhrnném odpovědním archu a označte je pomocí jejich příslušných veličin.

[5]

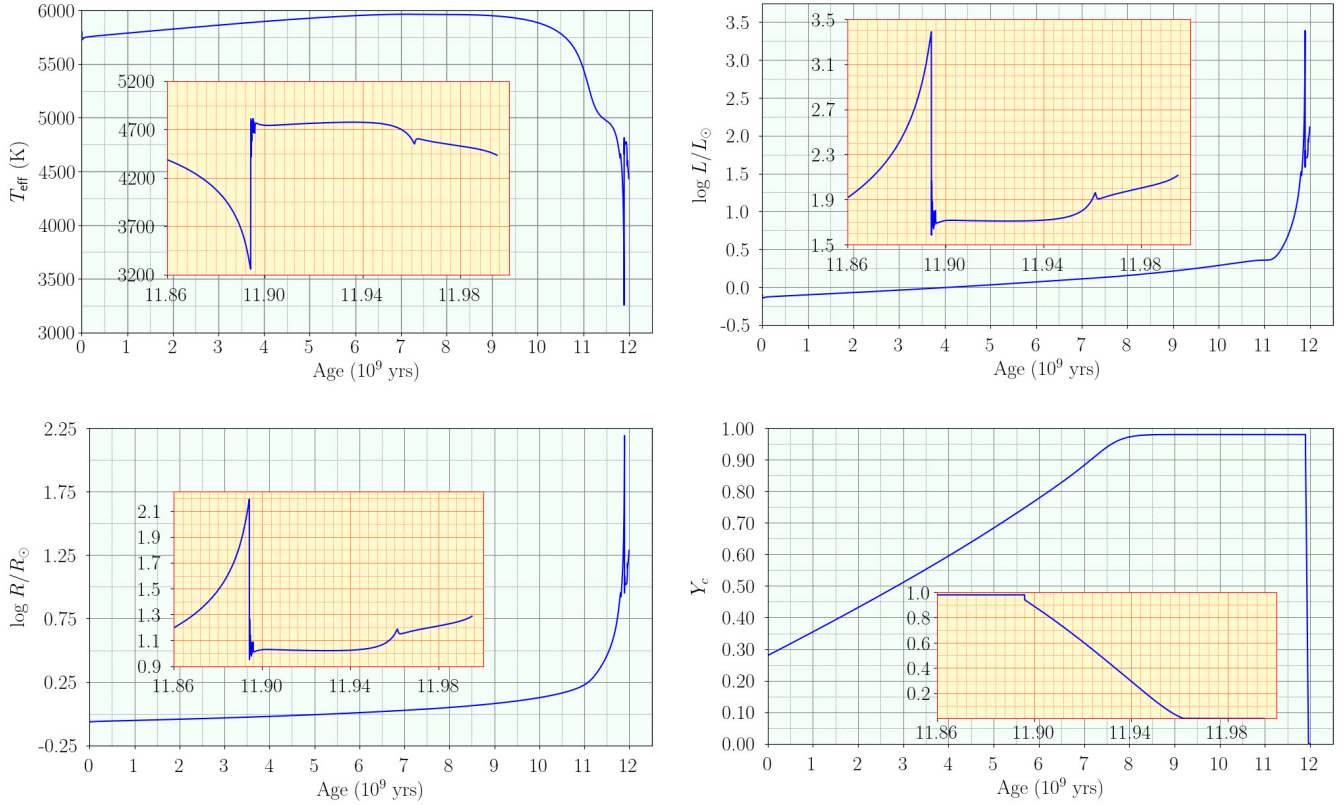
(T11.2) Část 2: Vývoj hvězd

Zvažte vývoj hvězdy o hmotnosti $1M_{\odot}$, jejíž počáteční rovnoměrné složení je dáno hmotnostními podíly helia $Y_0 = 0.28$ a kovů $Z_0 = 0.02$. Obrázky níže ukazují změnu různých globálních veličin této hvězdy, jak se vyvíjí od ZAMS (Zero Age Main Sequence) až do konce spalování helia v jejím jádru.

Graf níže ukazuje evoluční dráhu hvězdy na HR diagramu (graf $\log L/L_{\odot}$ vs $\log T_{\text{eff}}$, kde L je povrchová svítivost a T_{eff} je efektivní teplota).



Obrázek níže obsahuje čtyři grafy, které ukazují vývoj T_{eff} (v K), L (zobrazeno jako $\log L/L_{\odot}$), R (zobrazeno jako $\log R/R_{\odot}$) a Y_c jako funkci věku (v 10^9) téže hvězdy. V každém z těchto čtyř grafů vložené části ukazují pro větší přehlednost podrobné změny příslušných veličin mezi věky 11.86×10^9 let až 12.00×10^9 let.



Použijte tyto grafy k zodpovězení níže uvedených otázek.

- (T11.2a) Jaká je přibližná doba života hvězdy na hlavní posloupnosti t_{MS} (v letech)? [1]
- (T11.2b) Jaká je přibližná doba po kterou hvězda spaluje helium ve svém jádru Δt_{He} (v letech)? [1]
- (T11.2c) Jaká část počátečního množství vodíku v jejím středu f_{H} byla spálena, když je svítivost hvězdy $1 L_{\odot}$? [3]
- (T11.2d) Jaký je poloměr hvězdy, R_1 (v jednotkách $R_{\odot}$), když bylo spáleno 60% počátečního množství vodíku v jejím středu? [3]
- (T11.2e) Jaké jsou poloměry hvězdy R_{P} a R_{Q} (v jednotkách $R_{\odot}$), odpovídající jejím pozicím P a Q které jsou označeny na HR diagramu? [4]

(T11.3) Část 3: Rozložení hmoty uvnitř hvězdy

Rovnice, která řídí rozložení hmoty uvnitř hvězdy, lze napsat jako

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Bylo by vhodné vyjádřit tuto rovnici pomocí tří bezrozměrných proměnných, konkrétně normalizované hmoty q , normalizovaného poloměru x a relativní hustoty σ , které definujeme jako

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

kde M a R jsou celková hmotnost a poloměr hvězdy a $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ je průměrná hustota hvězdy. Pro konkrétní hvězdu, kterou budeme v této části zvažovat, jsou uvedeny následující informace:

- Centrální hustota $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$

- Polovina hmoty hvězdy je obsažena uvnitř 25 % jejího celkového poloměru a 70 % její hmoty je obsaženo vnitřními 35 % jejího celkového poloměru.

Ve všech následujících částech této otázky bude stačit zaokrouhlit všechny odvozené číselné koeficienty na 0,005.

- (T11.3a) Vyjádřete výše uvedenou rovnici popisující závislost hmotnosti na poloměru pomocí x , $\frac{dq(x)}{dx}$ a $\sigma(x)$. [2]

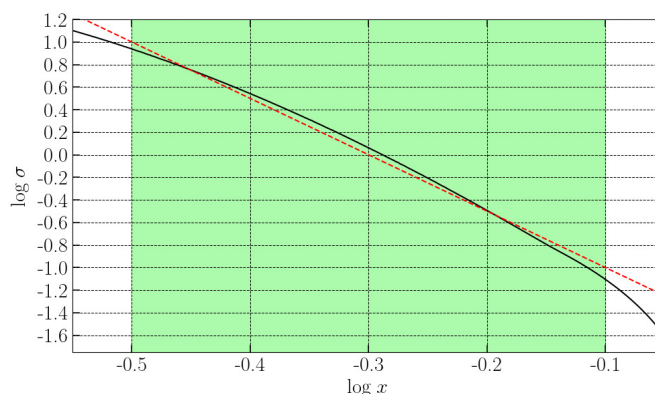
Pro získání rozložení hmotnosti v závislosti na poloměru potřebujeme znát profil hustoty uvnitř hvězdy. Pro účely této úlohy popíšeme změnu hustoty s poloměrem pomocí přibližných tvarů ve dvou oblastech x :

- vnitřní část hvězdy: $0 \leq x \leq 0.32$
- střední část hvězdy: $0.32 < x < 0.80$

Pro nejvzdálenější část, tj. $0.80 \leq x \leq 1.00$, neděláme žádnou aproximaci.

- (T11.3b) **Aproximace pro střední část:**

Průběh $\log \sigma$ jako funkce $\log x$ ve střední části hvězdy je zobrazen (černou křivkou) na grafu níže. Pro $\log \sigma$ jako funkci $\log x$ v oblasti $-0.5 < \log x < -0.1$, tj. $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (zobrazeno zeleně stínovanou oblastí), provedeme lineární aproximaci (zobrazeno jako červená přerušovaná čára na grafu). Dále přibližně určíme sklon této čáry na nejbližší celé číslo.



Použijte tuto aproximaci k napsání výrazu pro $\sigma(x)$ jako funkci x v oblasti $0.32 < x < 0.80$. [4]

- (T11.3c) Použijte výsledek z (T11.3b) k odvození výrazu pro $q(x)$ v oblasti $0.32 < x < 0.80$. [6]

- (T11.3d) **Aproximace pro vnitřní část:**

Ve vnitřní části hvězdy ($0 \leq x \leq 0.32$) může být hustota aproximována jako lineární funkce poloměru, tj. $\sigma(x) = Ax + B$, kde A, B jsou konstanty. Určete A a B , a tím získáte výraz pro $q(x)$ v oblasti $0 \leq x \leq 0.32$. Všimněte si, že aproximace zavedené v předchozí části a této části mohou vést k malým diskontinuitám v hustotě nebo hmotnosti při $x = 0.32$. [8]

- (T11.3e) Výrazy pro $q(x)$ získané v částech (T11.3c) a (T11.3d) jsou aproximace, které dobře popisují průběh hmotnosti v závislosti na poloměru, ale pouze v konkrétních oblastech hvězdy. Pro oblast $0.80 \leq x \leq 1$ (pro kterou jsme neodvodili žádný výraz) je možné použít vhodnou extrapolaci z přilehlé oblasti. Použijte tyto přibližné výrazy a daná data k načrtnutí hladké křivky (bez jakýchkoli diskontinuit v $q(x)$ nebo jeho derivaci) pro $q(x)$ vs x pro celou hvězdu ($0 \leq x \leq 1$), která představuje závislost hmotnosti na poloměru. [4]

(T12) Hawkingovo záření z černých děr

[50 bodů]

(T12.1) Černá díra (BH) typicky vzniká gravitačním kolapsem masivní hvězdy na konci jejího životního cyklu do bodu nazývaného singularita. Kvůli extrémní gravitaci takového objektu nic, co vstoupí do takzvaného horizontu událostí (sférický povrch s $r = R_{SC}$, kde r je vzdálenost od singularity), není schopno z něj uniknout. R_{SC} označujeme jako Schwarzschildův poloměr.

(T12.1a) **Modelování vzniku Hawkingova záření:** Uvažujte dvojici částic, každou s hmotností m , produkovaných na obou stranách horizontu černé díry. Jedna z částic se nachází mírně mimo horizont na $r \approx R_{SC}$, zatímco druhá částice je uvnitř horizontu na $r = \kappa R_{SC}$. Předpokládejte, že celková energie částice je součtem energie její klidové hmotnosti mc^2 a gravitační potenciální energie způsobené černou dírou.

Určete hodnotu κ , pro kterou má dvojice částic nulovou celkovou energii.

[4]

(T12.1b) **Teplota černé díry:** Pokud má částice vytvořená mimo horizont ve výše uvedeném procesu dostatečnou kinetickou energii, může uniknout z černé díry v procesu zvaném Hawkingovo záření. Částice uvnitř horizontu, která má zápornou energii, je pohlcena a snižuje hmotnost černé díry.

Předpokládejme, že veškeré Hawkingovo záření je tvořeno fotony se spektrem černého tělesa s maximem na vlnové délce $\lambda_{bb} \approx 16R_{SC}$. Je známo, že pro černou díru o hmotnosti Slunce je $R_{SC, \odot} = 2,952 \text{ km}$.

[4]

Vyjádřete vztah pro teplotu T_{bh} černé díry odpovídající tomuto záření černého tělesa pomocí její hmotnosti M_{bh} a fyzikálních konstant. Vypočítejte Schwarzschildův poloměr $R_{SC, 10\odot}$ a teplotu $T_{bh, 10\odot}$ pro černou díru s hmotností $10 M_{\odot}$.

(T12.1c) **Ztráta hmotnosti černé díry:** Předpokládejme, že Hawkingovo záření je vyzařováno z horizontu událostí.

Pomocí ekvivalence hmoty a energie odvoďte výraz pro rychlost úbytku hmotnosti, $dM_{bh}(t)/dt$ v závislosti na hmotnosti $M_{bh}(t)$ černé díry a fyzikálních konstantách.

Dále odvoďte výraz pro $M_{bh}(t)$ pro černou díru s počáteční hmotností M_0 . Nakreslete $M_{bh}(t)$ jako funkci t od $M_{bh} = M_0$ do $M_{bh} = 0$.

[8]

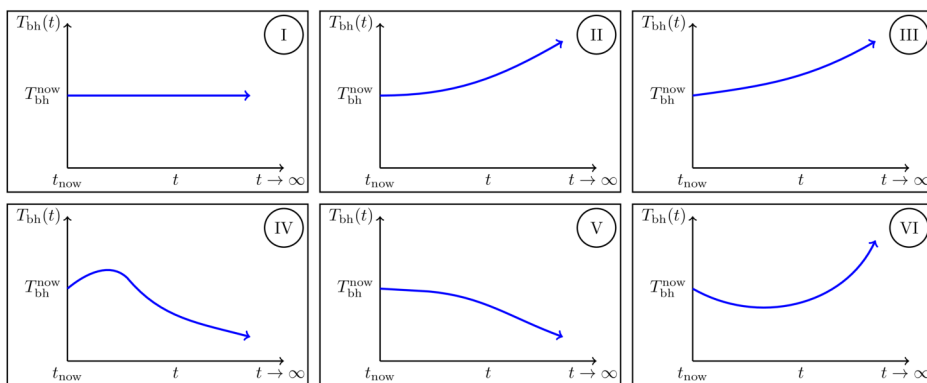
(T12.1d) **Doba života černé díry:** Odvoďte výraz pro dobu života τ_{BH} , při které dojde ke kompletnímu vyzáření černé díry s počáteční hmotností M_0 v důsledku Hawkingova záření pomocí M_0 a fyzikálních konstant. Vypočítejte dobu života $\tau_{bh, 10\odot}$ (v sekundách) pro černou díru s $M_0 = 10 M_{\odot}$.

[3]

(T12.1e) **Černá díra v lázni CMB záření:** Uvažujte izolovanou černou díru ve vesmíru daleko od jiných těles s aktuální teplotou T_{bh}^{now} , obklopenou kosmickým mikrovlnným pozadím (CMB) s aktuální teplotou $T_{cmb}^{now} = 2,7 \text{ K}$. Černá díra může hmotnostně růst absorpcí CMB záření a ztrácet svou hmotnost Hawkingovým zářením.

S ohledem na zrychlující se expanzi vesmíru určete, které z následujících obrázků znázorňují dlouhodobý časový vývoj T_{bh} v následujících třech případech:

(X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Uved'te svou odpověď zaškrtnutím políčka odpovídajícího příslušnému číslu obrázku [6]
(pouze jednoho) pro každý z případů X, Y nebo Z v tabulce uvedené v souhrnném
odpovědním archu.

(T12.2) Primordiální černé díry (PBH) mohou vznikat s mnohem menšími hmotnostmi ve velmi raném vesmíru. Všechny následující otázky se týkají PBH. Můžete zde zanedbat jakékoliv procesy, které zvyšují hmotnost černé díry.

(T12.2a) **PBH vypařující se v současné epoše:** Jak jste si mohli všimnout z odpovědí v předchozích částech, černé díry o hmotnosti Slunce by potřebovaly dlouhou dobu k vypaření. Nicméně, protože PBH mohou mít mnohem menší hmotnost, mohli bychom je vidět vypařovat se v současnosti.

Určete počáteční hmotnost M_0 , PBH (v kg), Schwarzschildův poloměr $R_{SC, PBH}$ (v m) a [4]
teplotu T_{PBH} (v K) černé díry, která se může v současné epoše zcela vypařit, tj. ta s
životností $\tau_{PBH} = 14$ miliard let.

(T12.2b) **Vznik PBH:** V raném vesmíru dominovaném zářením lze škálový faktor vyjádřit jako $a(t) \sim t^{1/2}$. V této éře PBH vznikají v důsledku kolapsu veškeré energie obsažené v oblasti o fyzické velikosti ct , kde t je stáří vesmíru v té době.

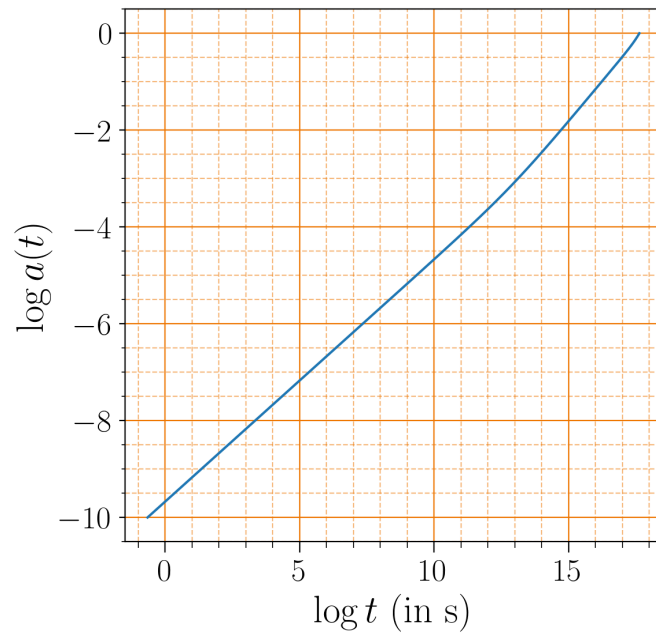
PBH o hmotnosti 1×10^{12} kg vzniká, když je stáří vesmíru přibližně 1×10^{-23} s. [6]
Vypočítejte stáří vesmíru, t_{20} , kdy vznikají PBH o hmotnosti 1×10^{20} kg.

(T12.2c) **Pozorované spektrum Hawkingova záření z PBH:** Uvažujte PBH s počáteční hmotností 1×10^{10} kg, která se na konci svého života zcela vypaří τ_{PBH} . Pro tuto část předpokládejte pro zjednodušení, že většina Hawkingova záření je vyzařována v tomto okamžiku, s teplotou odpovídající její počáteční hmotnosti. Také předpokládejte, že škálový faktor vesmíru se vyvíjí jako $a(t) \sim t^{2/3}$.

Vypočítejte vlnovou délku maxima tohoto Hawkingova záření, jak je pozorováno na [5]
Zemi λ_{earth} v současné epoše (při $t = 14$ miliardách let).

(T12.2d) **Vysokoenergetické kosmické záření z PBH:** Nyní předpokládejme, že Hawkingovo záření vyzařované v daném čase t odpovídá fotonům vyzařovaným s energií $k_B T_{bh}(t)$. Také nejvyšší možná teplota pro černou díru je Planckova teplota T_{Planck} , kde $k_B T_{Planck} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Vývoj škálového faktoru v průběhu relevantních časových úsecích je uveden na následujícím obrázku. Škálový faktor dnes je roven jedné. $t(s)$ na časové ose představuje stáří vesmíru v sekundách.



Pokud je na Zemi pozorován foton s energií $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$ eV, určete největší a [10]
nejmenší možné hodnoty počáteční hmotnosti PBH (M_0^{max} a M_0^{min} , respektive), které
by mohly být zodpovědné za tento foton.