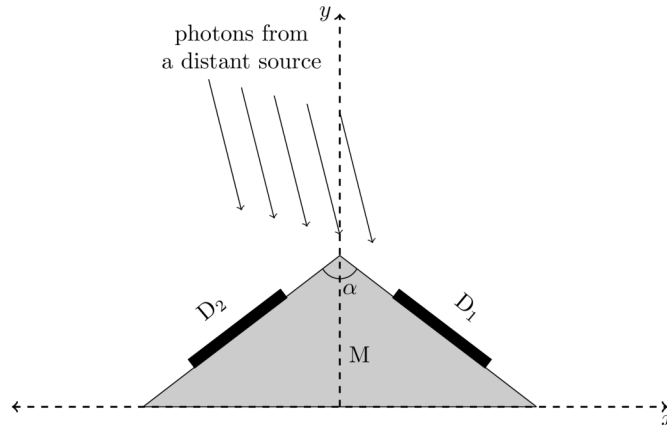


(T01) Misija Daksha

[10 bodova]

„Daksha“ je predložena indijska misija koja se sastoji od dva satelita S_1 i S_2 koji kruže oko Zemlje u istoj kružnoj stazi polumjera $r = 7000$ km, ali s razlikom u fazi od 180° . Ovi sateliti promatraju svemir u području visokih energija (rendgensko zračenje i γ -zračenje). Svaki od satelita Daksha koristi nekoliko ravnih, pravokutnih detektora.

Kako bismo razumjeli kako lokalizirati izvor na nebu, koristit ćemo pojednostavljeni model misije Daksha. Pretpostavimo da S_1 ima samo dva identična detektora D_1 i D_2 svaki površine $A = 0,50$ m², pričvršćenih na neprozirni nosač M kao što je prikazano na slici ispod. Detektori leže simetrično oko osi y u ravninama okomitim na $x - y$ ravninu i zatvaraju međusobni kut od $\alpha = 120^\circ$.



- (T01.1) Prilikom promatranja udaljenog izvora smještenog u ravnini $x - y$, detektor D_1 bilježi snagu $P_1 = 2,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹, dok detektor D_2 bilježi snagu $P_2 = 4,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹.

Odredite kut η koji zatvara vektor položaja izvora s pozitivnom y osi, pri čemu se kut u smjeru suprotnom od kazaljke na satu od pozitivne y osi smatra pozitivnim. **[5]**

Razmotrimo pojedinačni impuls iz udaljenog izvora (ne nužno u ravnini $x - y$) koji su snimili oba satelita misije Daksha (S_1 i S_2). Vremena maksimuma impulsa koje su zabilježili S_1 i S_2 su redom t_1 i t_2 .

- (T01.2) Ako izmjereno vrijeme $t_1 - t_2$ iznosi $10,0 \pm 0,1$ ms, tada odredite udio f nebeske sfere unutar kojeg bi se izvor mogao nalaziti. **[5]**

(T02) Makar-Sankranti

[10 bodova]

Festival "Makar-Sankranti" slavi se u Indiji kada, gledano sa Zemlje, Sunce prividno ulazi u područje zodijačkog znaka Jarca (Makar = Jarac, Sankranti = ulazak). Trenutno se taj festival slavi oko 14. siječnja svake godine. Prije mnogo godina, ovaj se festival također poklapao sa zimskim suncostajem na sjevernoj hemisferi, za koji pretpostavljamo da se događa 21. prosinca.

- (T02.1) Na temelju prethodno navedenih informacija, odredite godinu y_c u kojoj se proslava ovog festivala posljednji put podudarala sa zimskim suncostajem na sjevernoj hemisferi. **[3]**
- (T02.2) Ako je Sunce 14. siječnja 2006. u 11:50:13 po mjesnom vremenu u Mumbaiju ušlo u područje zodijačkog znaka Jarca, izračunajte datum D_{enter} i mjesno vrijeme t_{enter} njegova ulaska u 2013. godini u područje ovog zodijačkog znaka. **[3]**
- (T02.3) Festival Makar-Sankranti slavi se u nekom mjestu na dan prvog zalaska Sunca u području zodijačkog znaka Jarca. Možete pretpostaviti da je mjesno vrijeme zalaska Sunca u Mumbaiju u siječnju jednako 18:30:00 sati.

Naznačite datum proslave festivala za svaku godinu između 2006. i 2013. (označavanjem (✓) [4]
odgovarajućeg polja u tablici u tzv. Summary Answersheet).

(T03) Gravitacijski valovi

[15 bodova]

Dvojne crne rupe koje kruže jedna oko druge stvaraju gravitacijske valove. Razmotrimo dvije crne rupe u našoj Galaktici s masama $M = 36 M_{\odot}$ i $m = 29 M_{\odot}$, koje se gibaju po kružnim stazama oko zajedničkog središta mase s orbitalnom kutnom brzinom ω .

(T03.1) Preko Newtonova zakona gravitacije izvedite izraz za kutnu brzinu, ω_{ini} , kruženja crnih rupa u trenutku, t_{ini} , izraženu samo preko M , m i fizikalnih konstanti i to kada je međusobna udaljenost crnih rupa bila 4,0 puta veća od zbroja njihovih Schwarzschildovih radijusa.

Izračunajte iznos ω_{ini} u (rad s^{-1}).

[5]

(T03.2) U općoj teoriji relativnosti, crne rupe koje kruže jedna oko druge emitiraju gravitacijske valove frekvencije f_{GW} , pri čemu vrijedi: $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. To smanjuje staze crnih rupa, a s druge strane povećava f_{GW} . Brzina promjene f_{GW} dana je izrazom:

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

gdje je $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ tzv. „chirp masa” („masa cvrkuta“).

Odredite vrijednosti α , β i δ .

[4]

(T03.3) Pretpostavimo da su gravitacijski valovi povezani s događajem prvi put detektirani u trenutku $t_{\text{ini}} = 0$.

Izvedite izraz za opaženo vrijeme spajanja crnih rupa, t_{merge} , kada f_{GW} postane vrlo velik, u obliku koji sadrži samo ω_{ini} , M_{chirp} i fizikalne konstante.

Izračunajte iznos t_{merge} (u sekundama).

(T04) Balmerovo smanjenje

[15 bodova]

Razmotrite zvijezdu na glavnom nizu okruženu maglicom. Opažena zvjezdana veličina zvijezde u V-pojasu je 11,315 mag. Ionizirano područje maglice blizu zvijezde emitira linije $H\alpha$ i $H\beta$; njihove valne duljine iznose redom $0,6563 \mu\text{m}$ i $0,4861 \mu\text{m}$. Teorijski predviđeni omjer tokova u linijama $H\alpha$ i $H\beta$ iznosi: $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2,86$. Međutim, kada ovo zračenje prolazi kroz vanjski dio hladne prašnjave maglice, opaženi emisijski tokovi linija $H\alpha$ i $H\beta$ iznose redom $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ i $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

Ekstinkcija A_{λ} funkcija je valne duljine i izražava se kao

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Ovdje je $\kappa(\lambda)$ krivulja ekstinkcije, a $E(B - V)$ označava premah boje u filterskim pojasevima B i V. Krivulja ekstinkcije (s λ u μm) dana je sljedećim izrazima.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2,659 \times \left(-1,857 + \frac{1,040}{\lambda}\right) + R_V, & 0,63 \leq \lambda \leq 2,20 \\ 2,659 \times \left(-2,156 + \frac{1,509}{\lambda} - \frac{0,198}{\lambda^2} + \frac{0,011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0,12 \leq \lambda < 0,63 \end{cases}$$

gdje je $R_V = A_V / E(B - V) = 3,1$ omjer ukupne i pojedine ekstinkcije.

(T04.1) Odredite iznose $\kappa(H\alpha)$ i $\kappa(H\beta)$. [3]

(T04.2) Odredite iznos omjera premaha boje $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$. [4]

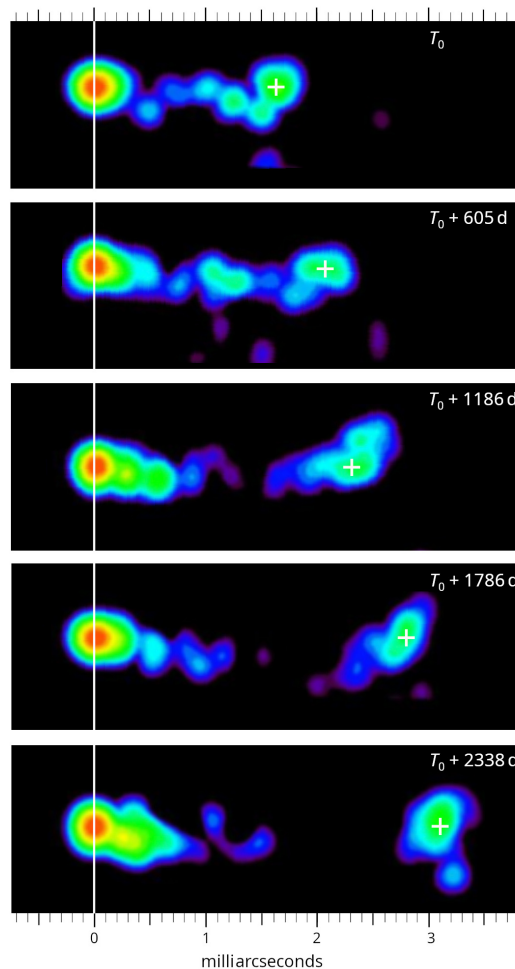
(T04.3) Odredite ekstinkciju $A_{H\alpha}$ i $A_{H\beta}$, uzrokovanu maglicom, na valnim daljinama $H\alpha$ i $H\beta$. [6]

(T04.4) Odredite ekstinkciju maglice (A_V) i prividnu zvjezdanu veličinu zvijezde u V pojasu, m_{V0} , u odsutnosti maglice. [2]

(T05) Kvazari

[20 bodova]

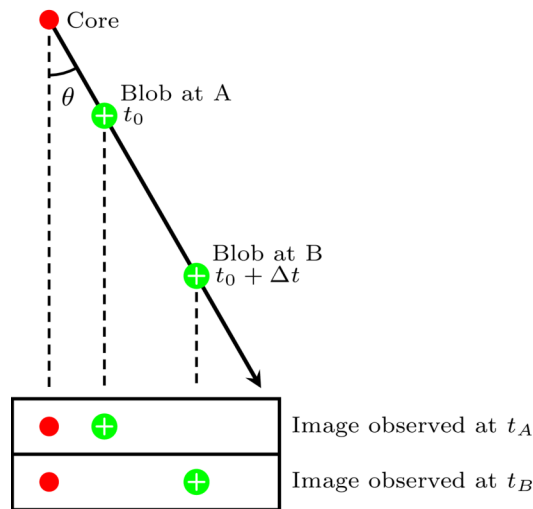
Kvazar je izuzetno sjajna aktivna galaktika koju pokreće supermasivna crna rupa i koja emitira relativističke mlazove. Slika prikazuje niz panela s radio-snimkama kvazara (s crvenim pomakom $z = 0,53$ i luminoznitetnom udaljenošću $D_L = 1,00 \times 10^{10}$ g.s. snimljenih u različitim trenucima. "Jezgra" je poravnata s vertikalnom bijelom linijom, dok se mlaz, koji se sastoji od "nakupine" (označene bijelom oznakom +), udaljava od nje tijekom vremena. Svaka slička prikazuje trenutak opažanja (počevši s T_0 za prvu sliku), a kutna skala označena je na vrhu i dnu slike.



- (T05.1) Odredite kutnu udaljenost "nakupine", ϕ_{blob} (u mililučnim sekundama), i njezinu poprečnu udaljenost, l_{blob} (u svjetlosnim godinama), od jezgre kvazara za svako opažanje. Zatim izračunajte prividnu brzinu "nakupine" u poprečnom smjeru (v_{app}) kao dio brzine svjetlosti, $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ koristeći uzastopna opažanja. Također izračunajte prosječnu prividnu brzinu $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ kroz cijelo razdoblje opažanja. [5]

Mlaz kvazara se zapravo kreće relativističkom brzinom $v \equiv \beta c$, ali ne nužno u ravnini neba; npr. zatvara kut θ („kut gledanja“) u odnosu na doglednicu udaljenog promatrača (označenu isprekidanim linijama), kao što je prikazano na donjoj skici.

Za ovaj i sve sljedeće dijelove zadatka, zanemarite crveni pomak kvazara i sve relativističke efekte.



- (T05.2) Svjetlost koju je "nakupina" emitirala u dva različita trenutka t_0 (što odgovara položaju A) i $t_0 + \Delta t$ (što odgovara položaju B) stiže do promatrača u trenucima t_A i t_B . Stoga je opažena vremenska razlika jednaka $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

- (T05.2a) Pronađite izraz za omjer $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ u ovisnosti o β i θ . [2]

- (T05.2b) Koristeći ovaj omjer, izrazite β_{app} u ovisnosti o β i θ . [2]

- (T05.3) Gibanje se naziva superluminalno ako je prividna brzina veća od brzine svjetlosti ($\beta_{\text{app}} > 1$), a subluminalno ako to nije slučaj ($\beta_{\text{app}} < 1$).

- (T05.3a) Za $\beta_{\text{app}} = 1$, nacrtajte glatku krivulju β kao funkciju θ kako biste označili granicu između subluminalnog i superluminalnog gibanja. Na grafu zasjenite superluminalno područje kosim linijama (///). [4]

- (T05.3b) Pronađite najnižu stvarnu brzinu mlaza ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$) pri kojoj dolazi do superluminalnog gibanja, kao i njen odgovarajući kut promatranja θ_{low} . [2]

- (T05.4) Pronađite izraz za maksimalni kut promatranja, θ_{max} , za koji će biti moguća zadana vrijednost β_{app} . [2]

Jezgra kvazara, njegov središnji kompaktni dio, pokazuje promjenljivost u svojoj emisiji zbog unutarnjih procesa koji se odvijaju unutar uzročno povezanog područja. Veličina (= polumjer) ovog područja obično se uzima da je oko pet puta veća od Schwarzschildova polumjera jezgre.

- (T05.5) Utvrđeno je da se jezgra određenog kvazara mijenja na vremenskim skalama od približno 1 sat. Odredite gornju granicu mase, $M_{\text{c, max}}$, središnjeg kompaktnog objekta, izraženu u jedinicama Sunčeve mase. [3]

(T06) Galaktička rotacija
[20 bodova]

Rotacijska krivulja naše Galaktike određena je mjerenjima brzine oblaka neutralnog vodika (HI) u smjeru doglednice uzduž različitih galaktičkih duljina, promatranih kroz HI liniju od 21 cm. Razmotrimo HI oblak s galaktičkom duljinom l , koji se nalazi na udaljenosti R od središta Galaktike (GC) i udaljenosti D od Sunca. Uzmite da je Sunce na udaljenosti $R_0 = 8,5$ kpc od GC. Pretpostavimo da su i Sunce i HI oblak u kružnim stazama oko GC u Galaktičkoj ravnini, s kutnim brzinama Ω_0 i Ω , te rotacijskim brzinama V_0 i V .

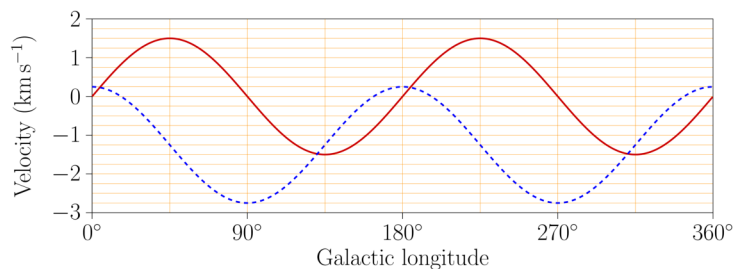
Komponente brzine u smjeru opažanja (V_r) i tangencijalne brzine (V_t) oblaka, promatrane sa Sunca, mogu se izraziti kao:

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Gledano sa sjevernog Galaktičkog pola, Galaktička rotacija odvija se u smjeru kazaljke na satu. U cijelom ovom zadatku, brzina duž doglednice smatra se pozitivnom kada se oblak udaljava, a oblaci se tretiraju kao točkasti objekti.

- (T06.1) Na grafu danom u tzv. Summary Answersheet nacrtajte V_r kao funkciju D od $D = 0$ do $D = 2R_0$ [5]
za dvije doglednice definirane s (i) $l = 45^\circ$ i (ii) $l = 135^\circ$. Označite svaku od svojih linija/krivulja s pripadajućom vrijednošću l .
- (T06.2) Donji graf prikazuje prosječne radijalne (puna crvena krivulja) i tangencijalne (isprekidana plava krivulja) komponente brzine zvijezda na udaljenosti od 100 pc od Sunca, prikazane kao funkcija Galaktičke duljine.



Pomoću grafa procijenite orbitalni period Sunca (P) oko GC u mega godinama (Mgod). [3]

- (T06.3) Jan Oort je primijetio da će u Sunčevom susjedstvu ($D \ll R_0$) razlika kutnih brzina ($\Omega - \Omega_0$) biti mala, te je stoga izveo sljedeću aproksimaciju prvog reda za komponente brzine u smjeru doglednice i tangencijalne komponente brzine:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

gdje su A i B poznati kao Oortove konstante.

Razmotrimo dva slučaja:

(I) stvarno opažena krivulja rotacije Galaktike i

(II) krivulja rotacije je za hipotetski scenarij u kojem je Galaktika bez tamne materije uz pretpostavku da je cijela masa Galaktike koncentrirana u njezinom središtu.

- (T06.3a) Izvedite izraze za radijalni gradijent brzine rotacije na položaju Sunca, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$, za dva slučaja. [2]

- (T06.3b) Izrazite A i B pomoću V_0 , R_0 i radijalnog gradijenta brzine rotacije na položaju Sunca, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$. [8]

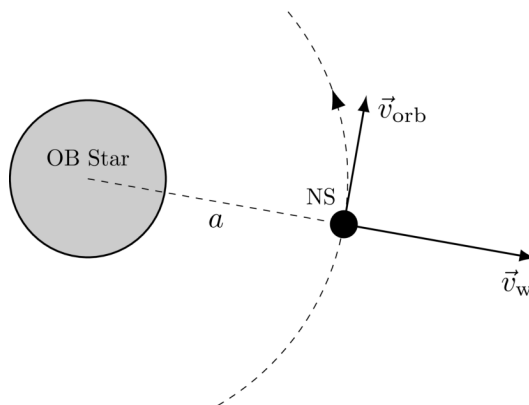
- (T06.3c) Omjer (A/B) Oortovih konstanti za dva dana slučaja, (I) i (II), redom definiranih kao F_I i F_{II} . Odredite F_I i F_{II} . [2]

(T07) Dvojna neutronska zvijezda

[20 bodova]

U dvojnem sustavu koji sadrži kompaktni zvjezdani objekt, gdje pratilac ne prelijeva svoju Rocheovu šupljinu, glavni izvor akrecije za kompaktni objekt je zvjezdani vjetar pratitelja. Ova akrecija hranjena vjetrom posebno je značajna u sustavima koji uključuju rani tip zvijezde (kao što su O ili B zvijezde, koje ćemo dalje nazivati OB zvijezdama), zajedno s kompaktnim objektom poput neutronske zvijezde (NS) u bliskoj orbiti.

Razmotrimo takav NS-OB zvjezdani dvojni sustav gdje neutronska zvijezda mase $M_{NS} = 2,0 M_{\odot}$ i polumjera $R_{NS} = 11$ km kruži u kružnoj stazi polumjera a oko središta OB zvijezde brzinom $v_{orb} = 1,5 \times 10^5$ m s⁻¹ (pogledajte sliku ispod). Kroz cijeli ovaj zadatak pretpostavlja se da je gubitak mase OB zvijezde sferno simetričan, a brzina tog gubitka je $\dot{M}_{OB} = 1,0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$.



- (T07.1) Akrecijski polumjer, R_{acc} , definira se kao najveća udaljenost od neutronske zvijezde (NS) na kojoj se zvjezdani vjetar može uhvatiti (zarobiti) od strane NS-a. Ako je brzina zvjezdanog vjetra na udaljenosti orbite NS-a jednaka $v_w = 3,0 \times 10^6$ m s⁻¹, za gornji sustav izračunajte R_{acc} u km koristeći standardni izraz za brzinu oslobađanja (escape velocity). [3]
- (T07.2) Uz pretpostavku da sva zarobljena tvar pada na NS, procijenite stopu akrecije mase, $\dot{M}_{acc}$, iz zvjezdanog vjetra na NS u jedinicama $M_{\odot} \text{god}^{-1}$ ako je $a = 0,5$ AJ. Zanemarite učinke tlaka zračenja i konačnog vremena hlađenja akrecijskog plina. [3]
- (T07.3) Sada razmotrimo situaciju u kojoj brzina zvjezdanog vjetra na orbitalnoj udaljenosti a (blizu NS) postaje usporediva s orbitalnom brzinom NS-a. U tom slučaju, stopa akrecije mase iz zvjezdanog vjetra na NS dana je izrazom oblika: $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$, gdje je $q = M_{NS}/M_{OB}$ omjer masa u dvojnem sustavu, a β je kut u okviru NS-a između smjera brzine vjetra i radijalnog smjera od OB zvijezde. Izvedite izraz za $f(\tan \beta, q)$ uz pretpostavku da je $M_{OB} \gg M_{NS}$. [6]
- (T07.4) Pretpostavimo da potpuno ionizirana tvar akretira (pada) radijalno, ali je pritom usporena zbog jakog magnetskog polja $\vec{B}$ NS-a. Taj se učinak može modelirati kao tlak, koji je zadan izrazom $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Pretpostavit ćemo da NS ima dipolno magnetsko polje čija se veličina u ekvatorijalnoj ravnini mijenja s udaljenošću r od NS-a (za $r \gg R_{NS}$) prema

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{NS}}{r} \right)^3$$

gdje je B_0 magnetsko polje na ekvatoru NS-a. Također se pretpostavlja da je os magnetskog dipola poravnata s osi rotacije NS-a.

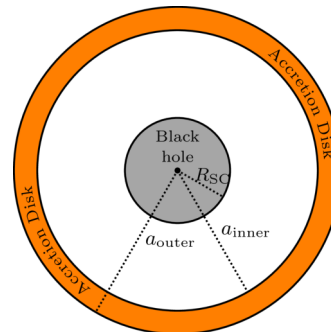
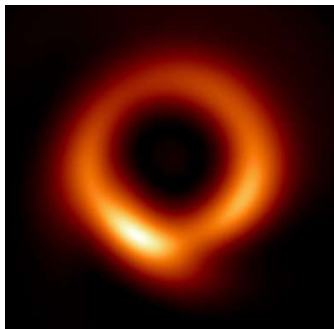
- (T07.4a) Izvedite izraz za magnetski tlak u ekvatorijalnoj ravnini, $P_{\text{eq, mag}}$, u ovisnosti o B_0 , R_{NS} , r i drugim odgovarajućim konstantama. [1]
- (T07.4b) Najveća udaljenost na kojoj magnetsko polje zaustavlja akrecijski tok na ekvatorijalnoj ravnini naziva se magnetosferski polumjer, R_m . Taj tok tvari stvara tlak zbog relativnog gibanja između dolaznog zvjezdanog vjetra i NS-a. Izvedite približan izraz za kritično magnetsko polje $B_{0, c}$, za koje vrijedi da se R_m poklapa s R_{acc} , te izračunajte njegovu vrijednost u teslama. Pretpostavite da su magnetski učinci zanemarivi za $r > R_m$, te da je $v_w \gg v_{\text{orb}}$. [7]

(T08) Sjena crne rupe

[20 bodova]

Teleskop Event Horizon (EHT) objavio je sliku supermasivne crne rupe u središtu galaktike M87, kao što je prikazano na lijevoj strani donje slike.

Kako bismo razumjeli neke jednostavne značajke ove slike, razmotrit ćemo pojednostavljeni model nerotirajuće, statične, sferno simetrične crne rupe mase $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$, okružene tankim ravninskim akrecijskim diskom bez mase, s unutrašnjim i vanjskim polumjerima redom, $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ i $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, gdje je R_{SC} Schwarzschildov radijus. Skica pogleda srijeda prikazana je na desnoj strani donje slike (slika nije u mjerilu).



Pretpostavljamo da je akrecijski disk jedini izvor svjetlosti koji treba uzeti u obzir. Svaka točka na disku emitira svjetlost u svim smjerovima. Ta svjetlost putuje pod utjecajem gravitacijskog polja crne rupe. Put zraka svjetlosti određen je dvjema jednadžbama danim u nastavku (koje su slične onima za objekt oko Sunca):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

gdje je $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ radijalna koordinata, $\phi \in [0, 2\pi)$ je kut azimuta, a E i L su konstante povezane s očuvanjem energije i očuvanjem kutnog momenta.

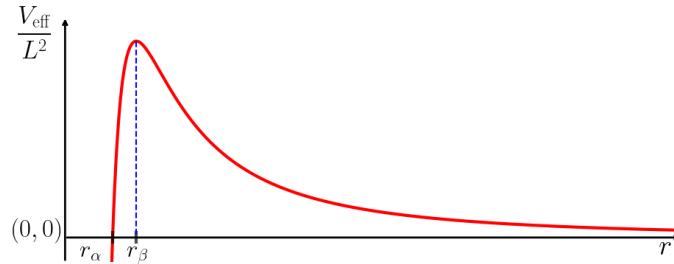
Ovdje je $v_r \equiv dr/dt$ radijalna brzina, v_ϕ tangencijalna brzina, a $\omega \equiv d\phi/dt$ kutna brzina. Definiramo parametar udara b za putanju kao $b = L/\sqrt{2E}$. U ovom problemu zanemaruje se dilatacija vremena.

Druga korisna jednadžba dobiva se diferenciranjem prve jednadžbe:

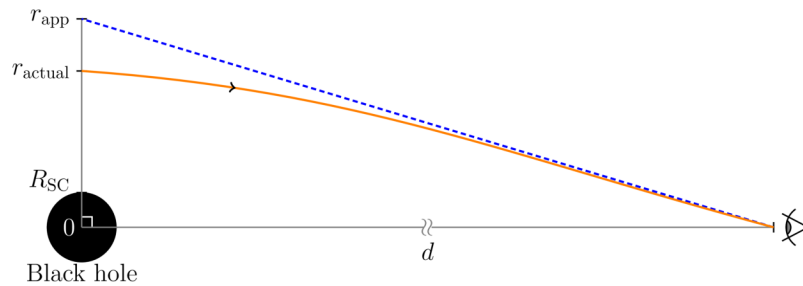
$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

- (T08.1) Oko crne rupe mogu postojati kružne svjetlosne putanje. Pronađite polumjer, r_{ph} , i parametar udara, b_{ph} , za takve putanje fotona u ovisnosti o M i relevantnim konstantama. [4]
- (T08.2) Izračunajte vrijeme, T_{ph} , potrebno za jedan puni obilazak po kružnoj stazi svjetlosti u sekundama. [2]

- (T08.3) Jednadžba radijalne brzine navedena ranije (prva jednadžba u ovom pitanju) može se za putanje svjetlosti usporediti s jednadžbom oblika $\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$. Shematski prikaz V_{eff}/L^2 kao funkcije od r dan je u nastavku.



- (T08.3a) Graf prikazuje dva posebna polumjera, r_α i r_β . Odredite izraze za r_α i r_β u ovisnosti o M i relevantnim konstantama. [2]
- (T08.3b) Foton koji putuje od akrecijskog diska prema crnoj rupi još uvijek može u nekim slučajevima pobjeći u beskonačnost. Pronađite izraz za najmanju vrijednost polumjera točke povratka, r_t , za takav foton, u ovisnosti o M i relevantnim konstantama. Za ovaj foton pronađite izraz za minimalnu vrijednost parametra udara, b_{min} . [3]
- (T08.4) Zraka svjetlosti koja dolazi s polumjera r_{actual} od središta sustava u ravnini neba pretrpjet će snažno savijanje zbog gravitacije crne rupe i na kraju će doći do promatrača (označenog okom) na velikoj udaljenosti d od sustava, kao što je prikazano na donjoj slici.

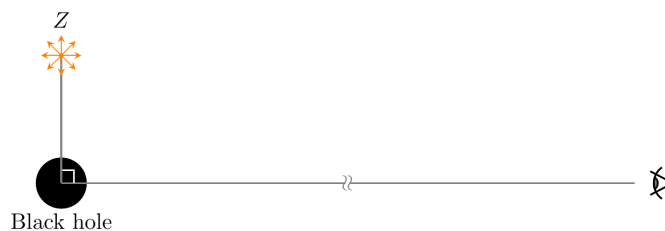


Za ovog promatrača, zraka bi se činila kao da dolazi iz druge točke na udaljenosti $r_{\text{app}} \approx b$ od središta crne rupe u ravnini neba, gdje je b parametar udara za tu putanju fotona. Za točke na akrecijskom disku u $r = r_{\text{actual}}$, može se pretpostaviti sljedeći odnos:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

Za udaljenog promatrača, poput nas, s direktnim pogledom na akrecijski disk, u ravnini neba će se slika sustava činiti kružno simetričnom. Odredite najudaljeniji prividni polumjer, r_{outer} , i najbliži prividni polumjer, r_{inner} , slike u AJ. [5]

- (T08.5) Razmotrimo izoliranu supermasivnu crnu rupu mase $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$ bez ikakvog akrecijskog diska. Kratkotrajna snažna provala elektromagnetskog zračenja događa se tijekom 5 sekundi u točki Z na udaljenosti, recimo, $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ od crne rupe kao što je prikazano na slici. Provala u točki Z emitira svjetlost u svim smjerovima. Promatrač u točki daleko od crne rupe (označeno okom na slici ispod) snima sliku područja oko crne rupe dugom ekspozicijom u trajanju od 60 sekundi.



Odaberite točnu opciju za svaku od dolje navedenih tvrdnji:

- (T08.5a) Broj mogućih puteva kojima svjetlost može putovati od Z do promatrača je: [2]
 (A) Najviše jedan (B) Točno jedan (C) Točno dva (D) Više od dva.
- (T08.5b) Broj slika EM bljeska u Z koje će se vidjeti na slici s dugom ekspozicijom je: [2]
 (A) Najviše jedna (B) Točno jedna (C) Točno dvije (D) Više od dvije.

(T09) Atmosferski seeing

[35 bodova]

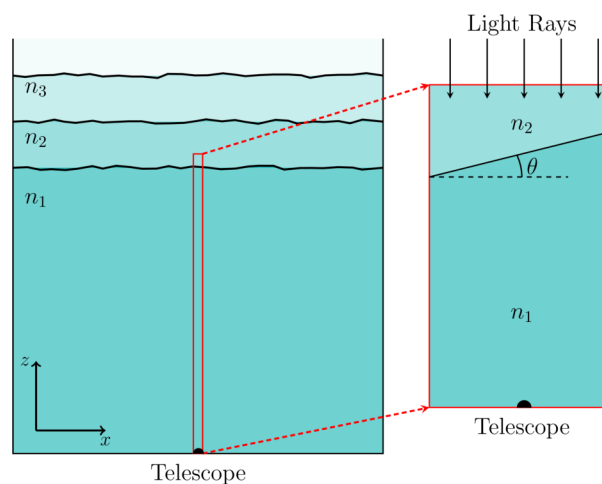
Teleskop čiji je objektiv akromatska konveksna leća promjera $D = 15$ cm i žarišne daljine $f = 200$ cm usmjeren je prema zvijezdi u zenitu.

- (T09.1) Odredite promjer (u m), d_{image} , slike točkastog izvora koju stvara objektiv u svojoj žarišnoj ravnini [1]
 za zelenu svjetlost ($\lambda = 550$ nm), uzimajući u obzir samo učinke difrakcije.

Na sliku astronomskog izvora utječe i takozvani „atmosferski seeing“.

Granice između slojeva u atmosferi, kao i indeksi loma slojeva, kontinuirano se mijenjaju zbog turbulencije, promjena temperature i drugih čimbenika. To dovodi do sitnih promjena u položaju slike u žarišnoj ravnini teleskopa, poznatih kao "efekt treperenja". Za ostatak zadatka, osim korištenja konačne veličine slike zvijezde ograničene difrakcijom (kao što je gore korišteno), neće se uzimati u obzir nikakvi učinci interferencije.

Lijevi dio slike ispod prikazuje vertikalni presjek atmosfere s više slojeva različitih indeksa loma ($n_1, n_2, n_3, \dots$). Desni dio slike prikazuje povećani prikaz tankog okomitog dijela atmosfere i granice između dva najniža atmosferska sloja s indeksima lomova n_1 i n_2 ($n_1 > n_2$). Za ovaj zadatak razmatramo samo ova dva sloja i njihove granice. Dijagrami nisu u mjerilu.



- (T09.2) Neka je granica između dva sloja na visini $H = 1$ km izravno iznad objektiva teleskopa, s nagibom od $\theta = 30^\circ$ u odnosu na horizontalnu ravninu. U svim dijelovima ovog zadatka uzima se da je θ pozitivan u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Za monokromatski izvor svjetlosti, $n_1 = 1,00027$ i $n_2 = 1,00026$. Neka je kutni pomak slike u žarišnoj ravnini teleskopa za zvijezdu u zenitu α .
- (T09.2a) Nacrtajte odgovarajuće označen dijagram zraka svjetlosti na granici slojeva koji [2]
 prikazuje n_1, n_2, θ i α .
- (T09.2b) Pronađite izraz za α u ovisnosti o θ, n_1 i n_2 . Koristite aproksimacije malih kutova: [2]
 $\sin \alpha \approx \alpha$ i $\cos \alpha \approx 1$.

(T09.2c) Izračunajte pomak, Δx_θ (u m), u položaju slike ako se θ poveća za 1% (uz [3]
nepromijenjene vrijednosti n_1 i n_2).

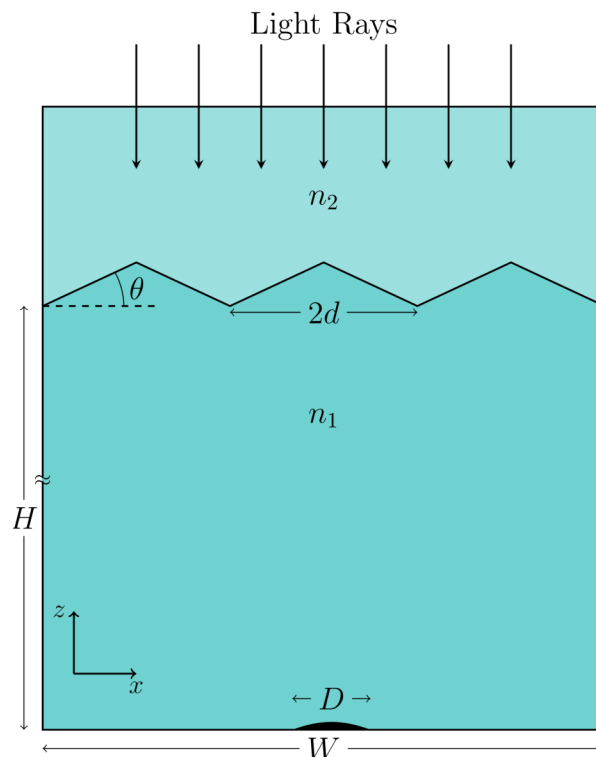
(T09.2d) Izračunajte pomak, Δx_n (u m), u položaju slike ako se n_2 poveća za 0,0001% (uz [3]
nepromijenjene vrijednosti n_1 i θ).

(T09.3) Za bijelu svjetlost koja dolazi sa zvijezde u zenitu, odaberite koja od sljedećih opcija najtočnije [2]
opisuje oblik i boju slike označavanjem (✓) odgovarajućeg okvira (samo jednog) na tzv. Summary
Answersheetu. Napomena: x se povećava s lijeva na desno na slici.

	Boja slike	Oblik slike	Lijevi rub	Desni rub
A	Bijela	Kružni		
B	Bijela	Eliptični		
C	Obojena	Kružni	Plav	Crven
D	Obojena	Kružni	Crven	Plav
E	Obojena	Eliptični	Plav	Crven
F	Obojena	Eliptični	Crven	Plav

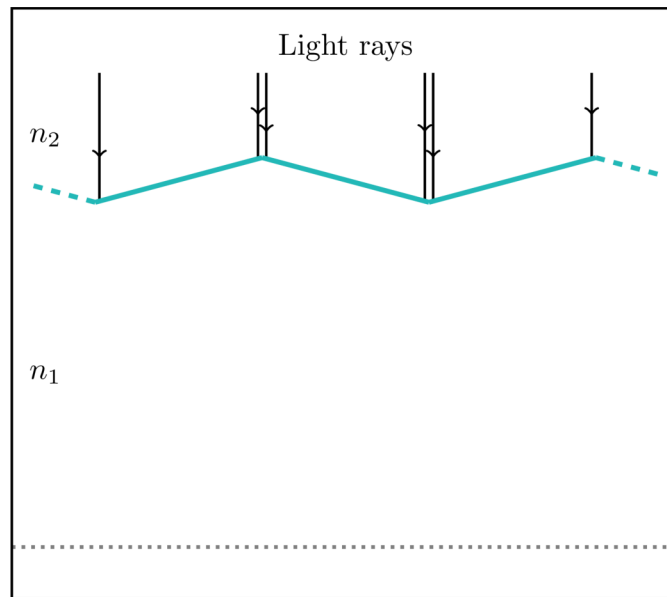
Za sve preostale dijelove ovog zadatka razmatramo monokromatsku zelenu svjetlost s $\lambda = 550$ nm. Granicu između slojeva modeliramo kao skup beskonačnih cik-cak ravnina (koje se protežu okomito na ravninu stranice) razdvojenih za $d = 10$ cm duž x osi, s kutom od ili $\theta = 10^\circ$ ili $\theta = -10^\circ$.

Donja slika (nije u mjerilu) prikazuje presjek ovog modela atmosfere širine W ($W \ll H$). Kod teleskopa s velikim otvorom ova cik-cak priroda granice rezultira stvaranjem pjegica (speckles) u žarišnoj ravnini.



(T09.4) Razmotrite atmosferu modeliranu kao što je gore navedeno.

(T09.4a) Presjek atmosfere s uzastopnim cik-cak ravninama, s istim parametrima kao što je gore navedeno, prikazan je na dijagramu ispod (nije u mjerilu).



Na ovom dijagramu, reproduciranom u Summary Answersheetu, nacrtajte putove upadnih zraka svjetlosti do ravnine u kojoj se nalazi objektiv teleskopa, prikazane sivom isprekidanom linijom.

Označite područje(a), ako ih ima, s "X" na dijagramu do kojih neće doprijeti zrake svjetlosti. [4]

(T09.4b) Izračunajte širinu W_X takvog/ih područja. [3]

(T09.4c) Pronađite najveći promjer, $D_{\max}$, objektiva teleskopa s kojim će biti moguće dobiti jednu sliku zvijezde, odgovarajućim odabirom položaja teleskopa u odnosu na strukturu granice. [4]

(T09.5) Razmotrite slučaj kada je cik-cak oblik granice moguć i u x i u y smjeru (poput polja piramida), te je $D = 100$ cm ($f = 200$ cm). [6]

Nacrtajte kvalitativni uzorak nastalih pjega (speckles) u za to predviđenom okviru u tzv. Summary Answersheetu.

(T09.6) Za turbulentnu atmosferu, ponovno razmotrimo isti paralelni cik-cak oblik graničnog sloja koji se pruža samo uzduž x -smjera, ali sada se kut između dviju ravnina mijenja jednolikom brzinom od 10° do -10° u trajanju od 1,0 sekunde. Pretpostavite da to uzrokuje ujednačenu brzinu pomaka položaja slike. [5]

Razmotrite teleskop s $D = 8$ cm i $f = 1$ m. Procijenite najveće dopušteno vrijeme ekspozicije, $t_{\max}$, za njegovu CCD kameru, tako da se dobije samo jedna slika i da svako moguće odstupanje položaja slike ostane manje od 1% difrakcijom ograničenog promjera slike.

(T10) Nukleosinteza Velikog praska

[35 bodova]

Tijekom ere dominacije zračenja u ranom svemiru, faktor skaliranja svemira $a \propto t^{1/2}$, gdje je t vrijeme od Velikog praska. Tijekom većeg dijela ove ere, neutroni (n) i protoni (p) ostaju u toplinskoj ravnoteži jedni s drugima putem slabih interakcija. Gustoća broja (N) slobodnih neutrona ili protona povezana je s temperaturom T i njihovim odgovarajućim masama m tako da je

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

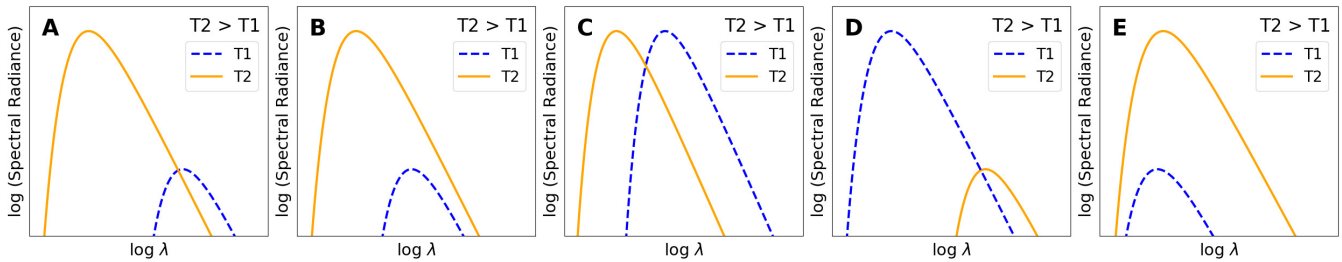
sve dok je vrijeme $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70 \text{ s}$, kada je $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800 \text{ keV}$. Nakon t_{wk} , slabe interakcije više ne mogu održavati takvu ravnotežu, a slobodni neutroni raspadaju se na protone s vremenom poluraspada od 610,4 s.

(T10.1) Neka je gustoća broja protona N_p , a gustoća broja neutrona N_n . Izračunajte relativnu količinu neutrona danu omjerom $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ u trenutku t_{wk} . [4]

(T10.2) Fotoni održavaju toplinsku ravnotežu i zadržavaju spektar crnog tijela u svim epohama.

(T10.2a) Pronađite indeks β , takav da je $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Odredite koji od sljedećih grafova prikazuje ispravno ponašanje spektralne gustoće energije za dvije temperature T_1 i T_2 . Označite (✓) točnu opciju u tzv. Summary Answersheetu. [2]



(T10.3) Nakon t_{wk} , proces stvaranja deuterija iz protona i neutrona reguliran je Sahinom jednačbom, koju je dao indijski fizičar prof. Meghnad Saha, a koja se može pojednostaviti na

$$\frac{N_D}{N_n} = 6,5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

Ovdje je omjer bariona i fotona $\eta = 6,1 \times 10^{-10}$, a N_D je brojčana gustoća deuterija.

(T10.3a) Nacrtajte omjer N_D/N_n na mreži u tzv. Summary Answersheetu, za najmanje 4 razumno razmaknute vrijednosti temperature koje leže u domeni $k_B T = [60, 70] \text{ keV}$, i nacrtajte glatku krivulju koja prolazi kroz te točke. [5]

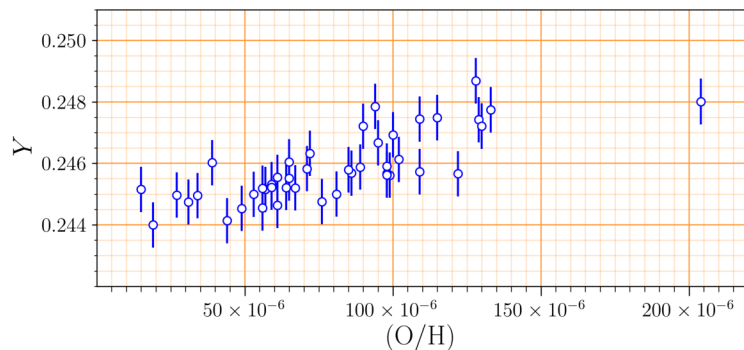
(T10.3b) Iz grafa pronadite $k_B T_{\text{nuc}}$ (u keV) kada je $N_D = N_n$. [1]

(T10.3c) Umjesto toga, sada pretpostavimo da se svi slobodni neutroni trenutno kombiniraju s protonima na $k_B T_{\text{nuc}}$ kako bi formirali deuterij, koji se sav odmah pretvara u helij (${}^4_2\text{He}$). Izračunajte odgovarajuću epohu ili vrijeme nukleosinteze, t_{nuc} (u s), za formiranje helija. [4]

(T10.4) Izračunajte vrijednost $X_{n, \text{nuc}}$ neposredno prije t_{nuc} . [5]

(T10.5) Primordijalna količina helija, Y_{prim} , definirana je kao udio ukupne barionske mase u svemiru koji je vezan u heliju neposredno nakon t_{nuc} . Dobijte teorijsku procjenu za vrijednost Y_{prim} . Samo za potrebe ovog izračuna, pretpostavimo $m_p \approx m_n$ i da je masa helija, $m_{\text{He}} \approx 4m_n$. [3]

- (T10.6) Primordijalnu količinu helija vrlo je teško izmjeriti, jer zvijezde u svemiru kontinuirano pretvaraju vodik u helij. Količina pretvorbe koju vrše zvijezde u galaktici karakterizirana je relativnom gustoćom kisika (koji proizvode samo zvijezde) u odnosu na vodik, označenom kao (O/H) , u galaktici. Kompilacija mjerenja (O/H) i količine helija, Y , za različite galaktike prikazana je u nastavku.



Upotrijebite sve točke iz ovog grafa (koji je reproduciran na tzv. Summary Answersheetu) kako biste odgovorili na sljedeće.

- (T10.6a) Procijenite Y za plavu kompaktnu patuljastu galaktiku s vrijednošću $(O/H)=1,75 \times 10^{-4}$. [2]
- (T10.6b) Odredite nagib $dY/d(O/H)$ ravne linije prilagođene (fitane) gornjim podacima. [2]
- (T10.6c) Procijenite primordijalnu količinu helija, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, na temelju gornjih opažanja. [2]
- (T10.7) Odstupanje između Y_{prim} i $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ može se uskladiti promjenom omjera bariona i fotona η . Kada se η smanji, kao što je naznačeno strelicom $\downarrow$ u tzv. Summary Answersheetu, naznačite povećanje ($\uparrow$) ili smanjenje ($\downarrow$) u $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (kada je $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$ i Y_{prim} u kućicama danim u tzv. Summary Answersheetu. [3]

(T11) Zvijezde kroz grafove

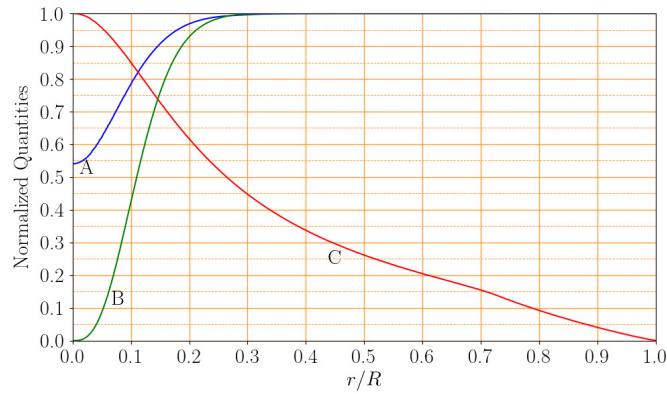
[50 bodova]

Zvijezde se mogu dobro aproksimirati kao sferno simetrični objekti, pa se radijalna udaljenost r od središta može odabrati kao jedina neovisna varijabla u modeliranju zvjezdanih unutrašnjosti. Masa sadržana unutar sfere polumjera r označava se $m(r)$. Luminozitet $l(r)$ definiran je kao neto energija koja prolazi prema van kroz sfernu površinu polumjera r po jedinici vremena. Druge zanimljive veličine, na primjer, gustoća $\rho(r)$, temperatura $T(r)$, maseni udio vodika $X(r)$, maseni udio helija $Y(r)$ i nuklearna energija generirana po jedinici mase po jedinici vremena $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, uzimaju se kao funkcije od r . U ovom zadatku zanemarit ćemo učinke difuzije i gravitacijskog taloženja elemenata unutar zvijezde.

Simbol "log" odnosi se na logaritam s bazom 10. Zadatak se sastoji od tri neovisna dijela.

(T11.1) 1. dio: Unutar zvijezde

Donji graf prikazuje promjenu triju strukturnih veličina, A, B i C, kao funkcije omjera polumjera r/R u zvjezdanom modelu mase $1 M_{\odot}$ i starosti 4 GYr, gdje je R fotosferski polumjer zvijezde. Vrijednosti masenog udjela helija na (fotosferskoj) površini, Y_s , i metaliciteta (masenog udjela svih elemenata težih od helija) na (fotosferskoj) površini, Z_s , zvijezde dane su s $(Y_s, Z_s) = (0,28, 0,02)$. Sve veličine prikazane na grafovima normalizirane su njihovim odgovarajućim maksimalnim vrijednostima.



(T11.1a) Jedinstveno odredite tri veličine A, B i C između pet mogućih:

[6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Upišite A/B/C u kućice pokraj odgovarajućih veličina u tzv. Summary Answersheetu. Nije potrebno obrazloženje za vaš odgovor.)

(T11.1b) Koliki je maseni udio helija u središtu, Y_c , zvijezde?

[3]

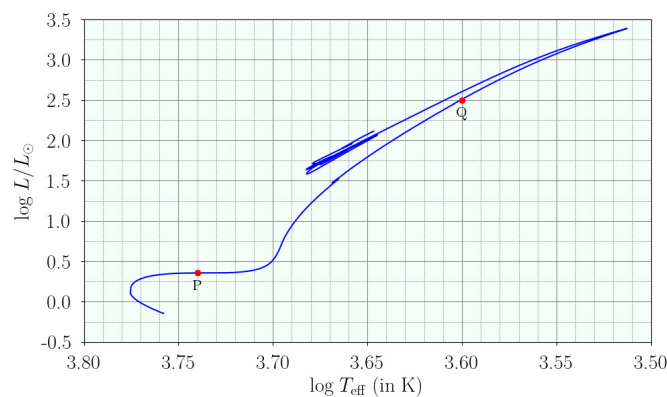
(T11.1c) Skicirajte preostale dvije veličine s popisa od pet (koje nisu identificirane kao krivulje A, B ili C) dane u (T11.1a) kao funkcije od r/R na istom grafu u tzv. Summary Answersheetu i označite ih njihovim odgovarajućim veličinama.

[5]

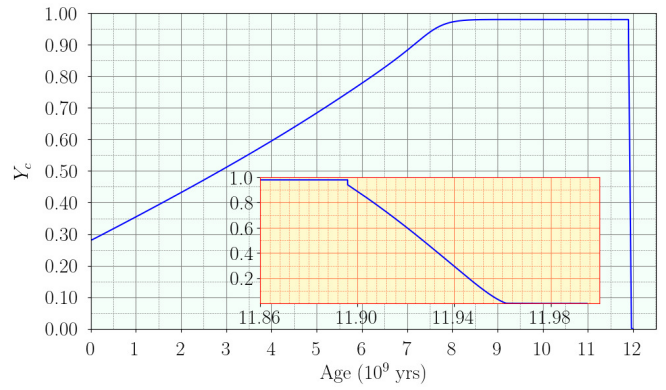
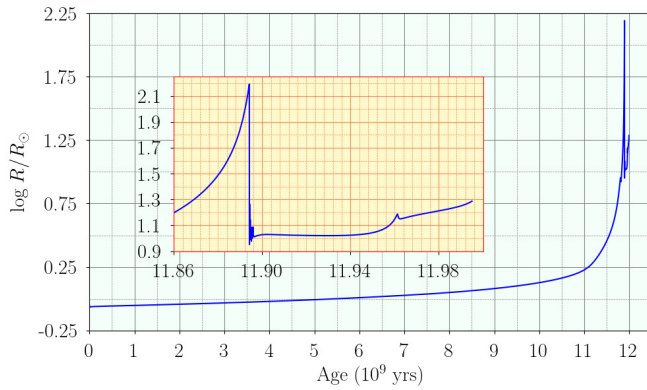
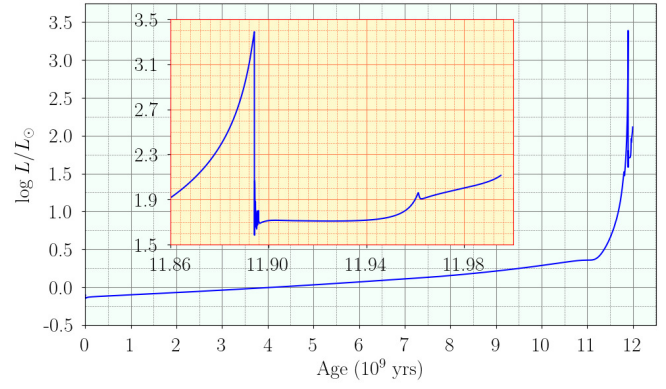
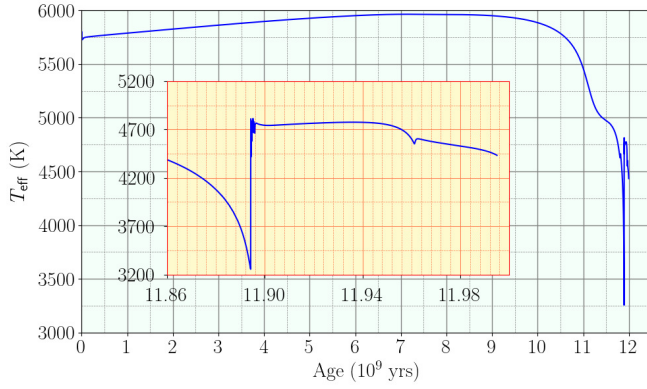
(T11.2) 2. dio: Zvijezde u razvoju

Razmotrimo evoluciju zvijezde $1M_{\odot}$ čiji je početni ujednačen sastav dan masenim udjelima helija, $Y_0 = 0,28$, i metala, $Z_0 = 0,02$. Slike u nastavku prikazuju promjenu različitih globalnih količina ove zvijezde dok se razvija od ZAMS-a (Glavnog niza nultog doba) do kraja izgaranja helija u njezinoj jezgri.

Graf ispod prikazuje evolucijski put zvijezde na HR dijagramu (grafikon $\log L/L_{\odot}$ u odnosu na $\log T_{\text{eff}}$, gdje je L površinski luminozitet, a T_{eff} efektivna temperatura).



Donja slika ima četiri grafa koji prikazuju promjenu T_{eff} (u K), L (prikazanu kao $\log L/L_{\odot}$), R (prikazanu kao $\log R/R_{\odot}$) i Y_c sa starošću (u 10^9 god.) iste zvijezde. U svakom od ova četiri grafa, umetci detaljno prikazuju varijacije odgovarajućih veličina između starosti od $11,86 \times 10^9$ god. do $12,00 \times 10^9$ god., radi veće jasnoće.



Pomoću ovih grafova odgovorite na sljedeća pitanja.

- (T11.2a) Koliki je približni životni vijek zvijezde na glavnom nizu, t_{MS} (u godinama)? [1]
- (T11.2b) Koliko je približno trajanje, Δt_{He} (u godinama), tijekom kojeg zvijezda sagorijeva helij u svojoj jezgri? [1]
- (T11.2c) Koliki je udio, f_{H} početne količine vodika u njenom središtu sagorio kada je luminozitet zvijezde $1 L_{\odot}$? [3]
- (T11.2d) Koliki je polumjer zvijezde, R_1 (u jedinicama $R_{\odot}$) kada je 60% početne količine vodika u njenom središtu izgorjelo? [3]
- (T11.2e) Koji su polumjeri zvijezde, R_P i R_Q (u jedinicama $R_{\odot}$), koji odgovaraju njezinim položajima P i Q, kako je označeno na HR-dijagramu? [4]

(T11.3) Dio 3: Raspodjela mase unutar zvijezde

Jednadžba kojom je određena raspodjela mase unutar zvijezde dana je s

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Bilo bi prikladno izraziti ovu jednadžbu u ovisnosti o tri bezdimenzijske varijable: omjeru mase, q , omjeru polumjera, x i relativne gustoće, σ , koje definiramo kao

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

gdje su M i R ukupna masa i polumjer zvijezde, a $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ je prosječna gustoća zvijezde. Za određenu zvijezdu koju ćemo razmatrati u ovom dijelu, dane su sljedeće informacije:

- Gustoća središta $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$

- Polovica mase zvijezde nalazi se u unutarnjih 25% njenog ukupnog polumjera, a 70% njene mase nalazi se u unutarnjih 35% njenog ukupnog polumjera.

U svim sljedećim dijelovima ovog pitanja bit će dovoljno zaokružiti sve izvedene numeričke koeficijente na 0,005.

- (T11.3a) Izrazite gornju jednadžbu koja opisuje ovisnost mase o polumjeru preko vrijednosti x , [2]
 $\frac{dq(x)}{dx}$ i $\sigma(x)$.

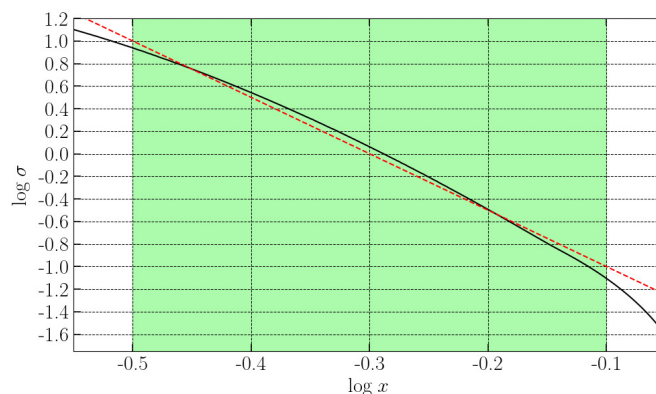
Za dobivanje raspodjele mase ovisno o polumjeru, potrebno je znati profil gustoće unutar zvijezde. Za potrebe ovog problema, opisat ćemo približnu promjenu gustoće s polumjerom u dva područja od x :

- unutarnji dio zvijezde: $0 \leq x \leq 0,32$
- srednji dio zvijezde: $0,32 < x < 0,80$

Ne radimo nikakvu aproksimaciju za najudaljeniji dio, tj. $0,80 \leq x \leq 1,00$.

- (T11.3b) **Aproksimacija za srednji dio :**

Promjena $\log \sigma$ kao funkcije $\log x$ u srednjem dijelu zvijezde prikazana je (crnom krivuljom) na grafu ispod. Napraviti ćemo linearnu aproksimaciju (prikazanu isprekidanom crvenom linijom na grafu) za $\log \sigma$ kao funkciju $\log x$ u području $-0,5 < \log x < -0,1$, tj. $0,32 \lesssim x \lesssim 0,80$ (prikazano zelenim osjenčanim područjem). Nadalje, aproksimirati ćemo nagib ove linije najbližim cijelim brojem.



Pomoću ove aproksimacije napišite izraz za $\sigma(x)$ kao funkciju od x u području $0,32 < x < 0,80$. [4]

- (T11.3c) Pomoću rezultata (T11.3b) izvedite izraz za $q(x)$ u području $0,32 < x < 0,80$. [6]

- (T11.3d) **Aproksimacija za unutarnji dio :**

U unutarnjem dijelu zvijezde ($0 \leq x \leq 0,32$) gustoća se može aproksimirati kao linearna funkcija polumjera, tj. $\sigma(x) = Ax + B$, gdje su A, B konstante. Odredite A i B i tako dobijte izraz za $q(x)$ u području $0 \leq x \leq 0,32$. Imajte na umu da aproksimacije usvojene u prethodnom i ovom dijelu mogu dovesti do malih diskontinuiteta u gustoći ili masi pri $x = 0,32$. [8]

- (T11.3e) Izrazi za $q(x)$ dobiveni u dijelovima (T11.3c) i (T11.3d) su aproksimacije koje prilično dobro opisuju promjenu mase s polumjerom, ali samo u specifičnim područjima zvijezde. Za područje $0,80 \leq x \leq 1$ (za koju nismo izveli nikakav izraz), moguće je koristiti odgovarajuću ekstrapolaciju iz susjednog područja. Koristite ove približne izraze i zadane podatke za skiciranje glatke krivulje (bez ikakvih diskontinuiteta u $q(x)$ ili njezinoj derivaciji) za $q(x)$ u odnosu na x za cijelu zvijezdu ($0 \leq x \leq 1$) koja predstavlja promjenu mase s polumjerom. [4]

(T12) Hawkingovo zračenje iz crnih rupa

[50 bodova]

(T12.1) Crna rupa (CR) obično nastaje gravitacijskim kolapsom masivne zvijezde na kraju njezina životnog ciklusa, pri čemu se urušava u točku zvanu singularitet. Zbog iznimno jake gravitacije takvog objekta, ništa što uđe unutar tzv. obzora događaja (sferna ploha s $r = R_{SC}$, gdje je r udaljenost od singulariteta) ne može pobjeći iz nje. Ovdje se R_{SC} naziva Schwarzschildov polumjer.

(T12.1a) **Modeliranje podrijetla Hawkingova zračenja:** Razmotrimo par čestica, svaka mase m , koje nastaju s obje strane obzora CR. Jedna se čestica nalazi neznatno izvan obzora, na položaju $r \approx R_{SC}$, dok se druga nalazi unutar obzora, na $r = \kappa R_{SC}$. Pretpostavlja se da je ukupna energija čestice zbroj njezine energije mirovanja mc^2 i gravitacijske potencijalne energije zbog CR.

Odredite vrijednost κ za koju par čestica ima ukupnu energiju jednaku nuli.

[4]

(T12.1b) **Temperatura crne rupe:** Ako čestica nastala izvan obzora u gore opisanom procesu ima dovoljno kinetičke energije, može pobjeći iz CR u procesu koji nazivamo Hawkingovo zračenje. Čestica unutar obzora, koja ima negativnu energiju, biva apsorbirana i time smanjuje masu CR.

Pretpostavite da je cjelokupno Hawkingovo zračenje sastavljeno od fotona sa spektrom crnog tijela čiji je maksimum na valnoj daljini $\lambda_{bb} \approx 16R_{SC}$. Poznato je da za CR mase Sunca vrijedi: $R_{SC, \odot} = 2,952 \text{ km}$.

Izvedite izraz za temperaturu, T_{bh} , CR koja odgovara ovom zračenju crnog tijela, u ovisnosti o njezinoj masi M_{bh} i fizikalnim konstantama. Izračunajte Schwarzschildov polumjer, $R_{SC, 10\odot}$, i temperaturu, $T_{bh, 10\odot}$, za CR mase $10 M_{\odot}$. [4]

(T12.1c) **Gubitak mase crne rupe:** Pretpostavite da se Hawkingovo zračenje emitira s obzora događaja.

Koristeći ekvivalent mase i energije, izvedite izraz za brzinu gubitka mase, $dM_{bh}(t)/dt$, u ovisnosti o masi $M_{bh}(t)$ CR i fizikalnim konstantama.

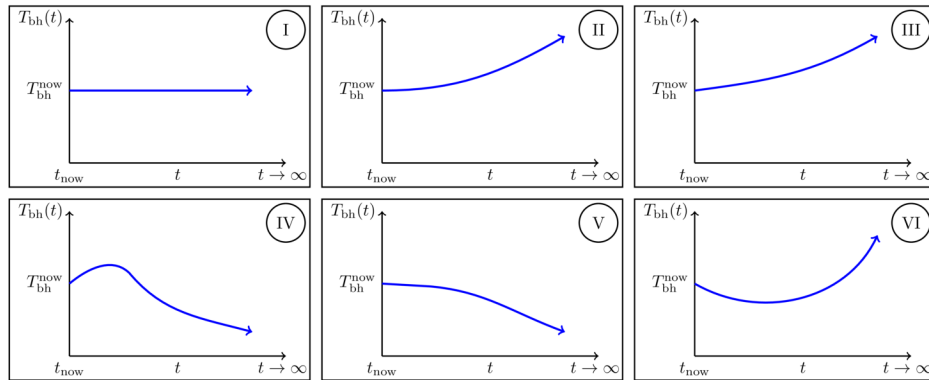
Zatim izvedite izraz za $M_{bh}(t)$ CR za slučaj kada je početna masa M_0 . Nacrtajte graf $M_{bh}(t)$ kao funkciju t od $M_{bh} = M_0$ do $M_{bh} = 0$. [8]

(T12.1d) **Životni vijek crne rupe:** Izvedite izraz za životni vijek τ_{BH} pri kojem crna rupa početne mase M_0 potpuno ispari uslijed Hawkingova zračenja, u ovisnosti o M_0 i fizikalnim konstantama. Izračunajte životni vijek $\tau_{bh, 10\odot}$ (u sekundama) za crnu rupu s $M_0 = 10 M_{\odot}$. [3]

(T12.1e) **Crna rupa u kupki CMB zračenja:** Razmotrite izoliranu crnu rupu u svemiru, daleko od drugih tijela, s trenutnom temperaturom T_{bh}^{now} , okruženu kozmičkim mikrovalnim pozadinskim zračenjem (CMB) s trenutnom temperaturom $T_{cmb}^{now} = 2,7 \text{ K}$. Crna rupa može rasti u masi apsorbirajući CMB zračenje, a može i gubiti masu zbog Hawkingova zračenja.

Uzimajući u obzir ubrzano širenje Svemira, identificirajte koja od sljedećih slika prikazuje dugoročni vremenski razvoj temperature T_{bh} u sljedeća tri slučaja:

(X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Označite svoj odgovor tako da označite odgovarajuću kućicu (samo jednu) za svaki slučaj X, Y ili Z u tablici koja se nalazi na tzv. Summary Answersheetu, uz odgovarajući broj slike. [6]

(T12.2) Primordijalne crne rupe (PBHs) mnogo manjih masa mogu se formirati u vrlo ranom svemiru. Sva sljedeća pitanja odnose se na PBH. Ovdje se zanemaruju svi procesi koji povećavaju masu crne rupe.

(T12.2a) **PBH koje isparavaju u sadašnjoj epohi:** Kao što ste mogli primijetiti iz odgovora na prethodna pitanja, crne rupe Sunčeve mase trebaju jako puno vremena da ispare. Međutim, budući da PBH mogu imati mnogo manju masu, možda ih možemo vidjeti kako isparavaju u sadašnjem vremenu.

Pronađite početnu masu $M_{0, \text{PBH}}$ (u kg), Schwarzschildov polumjer $R_{\text{SC, PBH}}$ (u m), i temperaturu T_{PBH} (u K) crne rupe koja bi mogla u potpunosti ispariti u sadašnjem vremenu, tj. crne rupe čiji je životni vijek $\tau_{\text{PBH}} = 14$ milijardi godina. [4]

(T12.2b) **Formiranje PBH-a:** U ranoj fazi svemira dominiranoj zračenjem, skalarni faktor varira kao $a(t) \sim t^{1/2}$. U ovom razdoblju, PBH-ovi nastaju uslijed kolapsa sve energije sadržane u području fizičke veličine ct , gdje je t tadašnja starost Svemira.

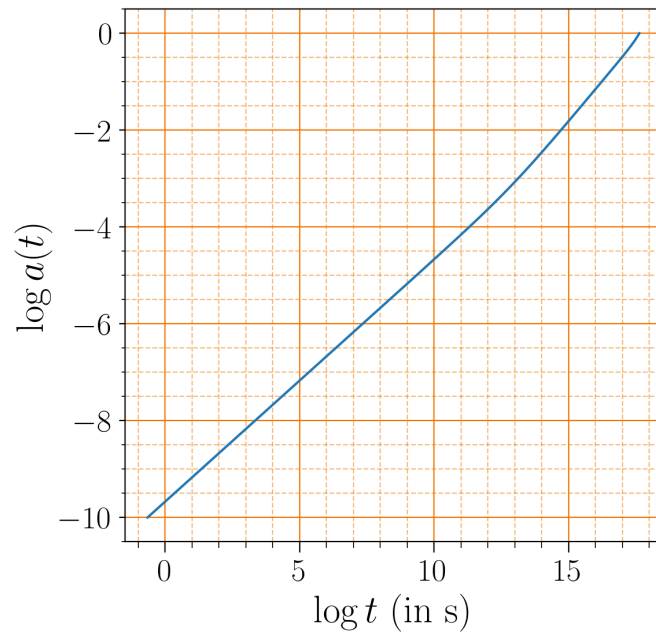
PBH mase 1×10^{12} kg nastaje kada je starost Svemira oko 1×10^{-23} s. Izračunajte starost Svemira, t_{20} , kada nastane PBH mase 1×10^{20} kg. [6]

(T12.2c) **Opazani spektar Hawkingovog zračenja iz PBH-a:** Razmotrite PBH s početnom masom 1×10^{10} kg koji potpuno isparava na kraju svog životnog vijeka τ_{PBH} . Za ovaj dio pretpostavite jednostavno da se većina Hawkingovog zračenja emitira u tom trenutku, s temperaturom koja odgovara njegovoj početnoj masi. Također, uzmite da se skalarni faktor svemira mijenja kao $a(t) \sim t^{2/3}$.

Izračunajte maksimalnu valnu dajinu ovog Hawkingovog zračenja opažanog sa Zemlje, λ_{earth} , u sadašnjoj epohi (pri $t = 14$ milijardi godina). [5]

(T12.2d) **Visokoenergetsko kozmičko zračenje iz PBH:** Sada pretpostavimo da Hawkingovo zračenje emitirano u danom trenutku t odgovara fotonima emitiranim s energijom $k_B T_{\text{bh}}(t)$. Također, najviša moguća temperatura za crnu rupu je Planckova temperatura T_{Planck} gdje je $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Promjena faktora skaliranja kroz vremenski period prikazana je na sljedećoj slici. Faktor skaliranja danas je postavljen na jedan. Na vremenskoj osi $t(s)$ predstavlja starost svemira u sekundama.



Ako se na Zemlji opaža foton s energijom $E_{\text{det}} = 3,0 \times 10^{20}$ eV, odredite najveću i [10]
najmanju moguću vrijednost početne mase PBH (M_0^{max} i M_0^{min}) koje bi mogle biti
odgovorne za taj foton.