

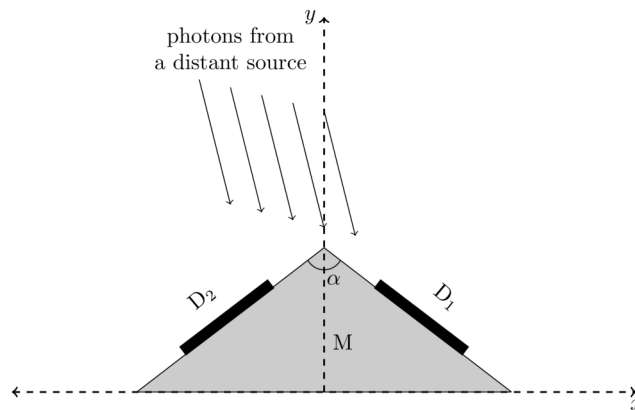
理论试题

(T01) 达刹任务

[10 分]

“达刹” (Daksha) 是印度当前拟提案的任务, 由两颗卫星 S_1 和 S_2 组成, 它们在半径为 $r = 7000$ km 的同一个圆轨道上绕地球运行, 但二者之间有 180° 的相位差。这两颗卫星在高能波段 (X 射线和 γ 射线) 观测宇宙。Daksha 的每颗卫星都使用多个平坦的矩形探测器。

为了理解如何在天空中定位一个源, 我们将使用达刹任务的简化模型。如下图所示, 假设卫星 S_1 只有两个相同的探测器 D_1 和 D_2 , 面积均为 $A = 0.50$ 平方米, 安装在一个不透明的支架 M 上。两个探测器对称地位于 y 轴两侧, 且探测器平面垂直于 $x-y$ 平面, 二者之间的夹角为 $\alpha = 120^\circ$ 。



- (T01.1) 观测远处一个位于 $x-y$ 平面上的源时, 探测器 D_1 记录到的功率为 $P_1 = 2.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$, 探测器 D_2 记录到的功率为 $P_2 = 4.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$ 。

试估计源的位置矢量与 y 轴正方向所成的角度 η , 以从 y 轴正方向开始、逆时针旋转的角度为正值。 [5]

考虑来自远处源的单个脉冲 (不一定在 $x-y$ 平面内), 由达刹任务的两颗卫星 S_1 和 S_2 记录。已知 S_1 和 S_2 记录到的脉冲峰值时间分别为 t_1 和 t_2 。

- (T01.2) 如果测量到的 $t_1 - t_2$ 为 $10.0 \pm 0.1 \text{ ms}$, 确定该源可能位于的天区所占整个天球的比例 f 。 [5]

(T02) 玛克桑格拉提节

[10 分]

从地球看去, 太阳进入黄道上的摩羯座时, 印度人民便会庆祝他们的传统节日——“玛克桑格拉提” (Makar-Sankranti), 其中“玛克” (Makar) 意为“摩羯座”, “桑格拉提” (Sankranti) 意为“进入”。现如今, 这个节日是在每年1月14日前后庆祝。而在很多年前, 这个节日曾与北半球的冬至重合, 我们假设冬至日是12月21日。

- (T02.1) 试根据上述信息, 计算该节日最后一次与北半球的冬至日重合的年份 y_c 。 [3]

- (T02.2) 已知太阳在2006年1月14日孟买地方时 11:50:13 进入了摩羯座, 试计算太阳在2013年进入摩羯座的日期 D_{enter} 和孟买地方时 t_{enter} 。 [3]

- (T02.3) 在给定地点, 玛克桑格拉提节是在太阳进入摩羯座之后首次日落所在的日期庆祝的。我们假设1月份孟买日落的地方时是 18:30:00。

试确定该节日从2006年到2013年每年的庆祝日期。答案汇总纸上给出了一份表格, 请在表格的对应位置处打勾 (✓)。 [4]

(T03) 引力波

[15 分]

相互绕转的双黑洞系统会产生引力波。考虑我们银河系中的一个双黑洞系统，其中两个黑洞的质量分别为 $M = 36 M_{\odot}$ 和 $m = 29 M_{\odot}$ ，且围绕系统的质心以轨道角频率 ω 作圆周运动。

(T03.1) 若两个黑洞之间的距离在时刻 t_{ini} 达到了它们施瓦西半径之和的 4.0 倍，试在牛顿引力的体系下推导出此时的黑洞轨道角频率 ω_{ini} 的表达式，仅用 M 、 m 和物理常量表示。

并计算 ω_{ini} 的值，以 rad s^{-1} （弧度每秒）为单位。

[5]

(T03.2) 在广义相对论中，被束缚在轨道上运动的黑洞会发出引力波，其频率 f_{GW} 满足 $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$ 。这个过程会使黑洞的轨道半径缩小，从而使 f_{GW} 增大。 f_{GW} 的变化率为

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

其中 $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ 被称为“啁啾质量”（chirp mass）。

试求出 α 、 β 和 δ 的值。

[4]

(T03.3) 假设与该事件相关的引力波在时刻 $t_{\text{ini}} = 0$ 首次被我们检测到。

[6]

双黑洞系统发生并合时， f_{GW} 将会变得非常大。试推导我们观测到双黑洞并合的时刻 t_{merge} 的表达式，仅用 ω_{ini} 、 M_{chirp} 和物理常量表示。

并计算 t_{merge} 的值（以秒为单位）。

(T04) 巴耳末减幅

[15 分]

考虑一颗被星云包围的主序星，其观测到的 V 波段星等为 11.315 mag。靠近恒星的星云电离区域发射 $\text{H}\alpha$ 和 $\text{H}\beta$ 线，其波长分别为 $0.6563 \mu\text{m}$ 和 $0.4861 \mu\text{m}$ 。理论预测的 $\text{H}\alpha$ 与 $\text{H}\beta$ 线流量之比为 $f_{\text{H}\alpha}/f_{\text{H}\beta} = 2.86$ 。然而，当这种辐射通过冷尘埃星云的外部时，观测到的 $\text{H}\alpha$ 与 $\text{H}\beta$ 线的发射流量分别为 $6.80 \times 10^{-15} \text{W m}^{-2}$ 和 $1.06 \times 10^{-15} \text{W m}^{-2}$ 。

消光 A_{λ} 是波长的函数，表示为

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

这里， $\kappa(\lambda)$ 是消光曲线， $E(B - V)$ 表示滤光片波段 B 和 V 的色余（colour excess）。消光曲线如下所示（其中 λ 以 μm 为单位）：

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

其中， $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ 是总消光与选择性消光（selective extinction）的比值。

(T04.1) 试计算 $\kappa(\text{H}\alpha)$ 和 $\kappa(\text{H}\beta)$ 的值。

[3]

(T04.2) 试计算色余之比 $\frac{E(\text{H}\beta - \text{H}\alpha)}{E(B - V)}$ 的值。

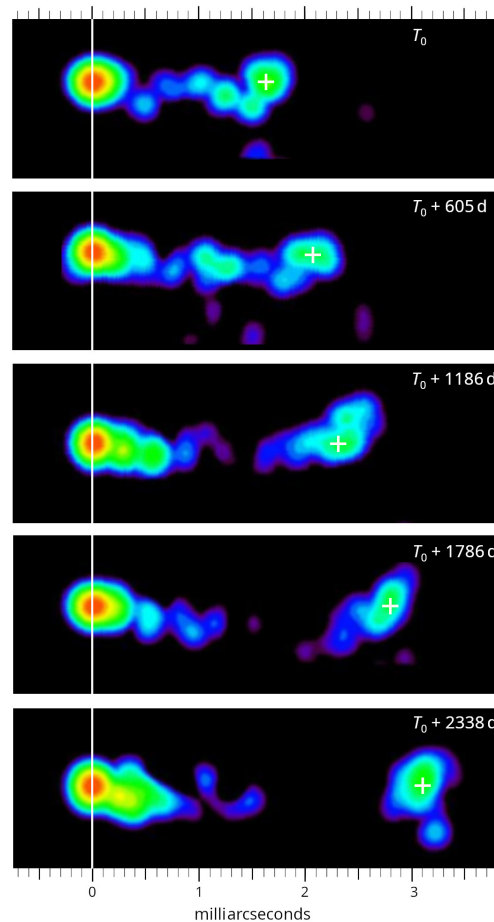
[4]

(T04.3) 试估算星云导致的 $H\alpha$ 和 $H\beta$ 波长处的消光 $A_{H\alpha}$ 和 $A_{H\beta}$ 。 [6]

(T04.4) 试估算星云的总消光 A_V ，以及在没有星云的情况下，该恒星的 V 波段视星等 m_{V0} 。 [2]

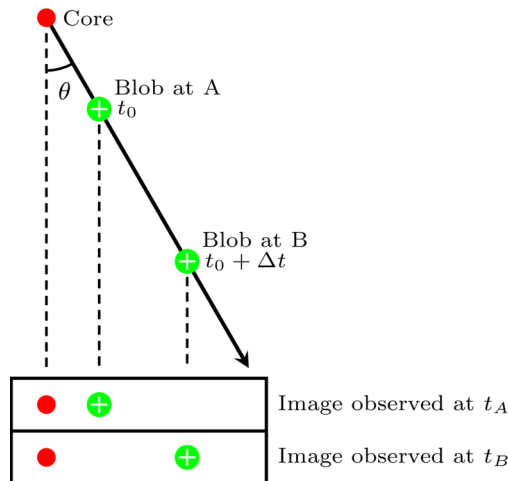
(T05) 类星体 [20 分]

类星体是一种由超大质量黑洞驱动的极其明亮的活动星系，能够发射相对论喷流。下图的一系列射电图像显示了在不同时刻观测到的同一个类星体，其红移为 $z = 0.53$ ，光度距离为 $D_L = 1.00 \times 10^{10}$ 光年。图中的白色垂直线表示类星体的“核心”，白色十字符号 (+) 标记了其喷流所包含的一个“斑块”，它随着时间推移而远离核心。每张图像均标注了观测时间（以第一张图像为 T_0 ），全图的顶部和底部标示了角度尺度。



(T05.1) 试确定每次观测的斑块与类星体核心的角间距 ϕ_{blob} （以毫角秒为单位）以及横向距离 l_{blob} （以光年为单位）。然后，使用所有的相邻两次观测结果计算斑块的横向视速度 v_{app} ，用 $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ 表示。最后，计算斑块在整个观测时段内的平均横向视速度 $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ 。 [5]

类星体喷流实际上以相对论速度 $v \equiv \beta c$ 移动，但方向并不一定在天球面上。例如，喷流方向与远处观察者的视线（由虚线表示）形成一个角度 θ （即“视角”），如下图所示。对于该小问及后续所有小问，忽略类星体的红移。



(T05.2) 在两个不同时刻 t_0 (对应位置 A) 和 $t_0 + \Delta t$ (对应位置 B)，斑块发出的光分别在时刻 t_A 和 t_B 到达观察者。因此，观察到的时间差为 $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$ 。

(T05.2a) 试求出 $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ 的表达式，用 β 和 θ 表示。 [2]

(T05.2b) 借助上一小问的结果，求出 β_{app} 的表达式，用 β 和 θ 表示。 [2]

(T05.3) 如果视速度超过光速 (即 $\beta_{\text{app}} > 1$)，则称为“超光速运动”；如果视速度没有超过光速 (即 $\beta_{\text{app}} < 1$)，则称为“亚光速运动”。

(T05.3a) 对于 $\beta_{\text{app}} = 1$ ，用光滑曲线绘出 β 与 θ 之间的函数关系，此即亚光速和超光速运动之间的边界。在图中用斜线阴影 (///) 填涂超光速区域。 [4]

(T05.3b) 找到可能发生超光速运动的最低真实喷流速度 ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$) 及其对应的视角 θ_{low} 。 [2]

(T05.4) 对于给定的 β_{app} ，试推导使其可能发生的最大视角 θ_{max} 的表达式。 [2]

观测发现，类星体核心 (即中心致密天体) 的辐射会发生变化。这是在存在因果关系的某个区域之内发生的某些过程导致的，该区域的尺度 (= 半径) 通常被认为是类星体核心的施瓦西半径的五倍。

(T05.5) 若某个类星体核心的变化时标约为 1 小时，试求出其中心致密天体的质量上限 $M_{\text{c, max}}$ ，以太阳质量为单位。 [3]

(T06) 银河系旋转曲线

[20 分]

借助 21 厘米中性氢 (HI) 线，测量沿着不同银经方向的 HI 云的视向速度，可以确定我们银河系的旋转曲线。考虑一个 HI 云，银经为 l ，与银心 (GC) 的距离为 R ，与太阳的距离为 D 。假设太阳距离银心 $R_0 = 8.5 \text{ kpc}$ ，并假设太阳和 HI 云都在银道面内围绕银心作圆周运动，角速度分别为 Ω_0 和 Ω ，旋转速度分别为 V_0 和 V 。

从太阳处观察到的 HI 云的视向速度 V_r 和横向速度 V_t 分量可以表示为

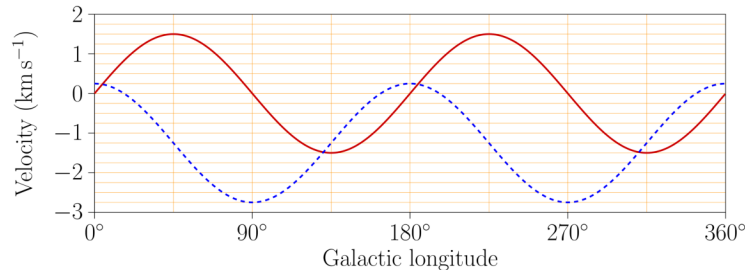
$$V_r = (\Omega - \Omega_0) R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0) R_0 \cos l - \Omega D$$

从北银极观察，银河系是顺时针旋转的。本大题中，HI 云可视为点状物体，远离观测者时，其视向速度取为正值。

(T06.1) 在提供的答案汇总纸上的图中，对应 (i) $l = 45^\circ$ 和 (ii) $l = 135^\circ$ 的两条视线，分别绘制 V_r 与 D 之间的函数关系，范围从 $D = 0$ 到 $D = 2R_0$ 。用 l 的值标记每条曲线。 [5]

(T06.2) 下图以银经 (Galactic longitude) l 为自变量，展示了距离太阳为 100 pc 的恒星的平均径向 (红色实线) 和横向 (蓝色虚线) 速度分量。



利用该图，估算太阳围绕银心运动的轨道周期 P ，以百万年 (Myr) 为单位。 [3]

(T06.3) Jan Oort 注意到，在太阳邻域 ($D \ll R_0$) 中，恒星角速度的差异 $\Omega - \Omega_0$ 会很小，由此推导出视线速度和横向速度分量的一阶近似：

$$\begin{aligned} V_r &= AD \sin 2l \\ V_t &= AD \cos 2l + BD \end{aligned}$$

其中 A 和 B 被称为 Oort 常数。

让我们考虑两种情况：

(I) 实际观测到的银河系旋转曲线，以及

(II) 假设情景下的银河系旋转曲线，其中银河系没有暗物质，且整个银河系的质量集中在其中心。

(T06.3a) 对于这两种情况，试推导太阳所在位置处的银河系旋转速度的径向梯度 $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ 的表达式。 [2]

(T06.3b) 试用 V_0 、 R_0 和太阳位置处的银河系旋转速度的径向梯度 $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ 来表示这两种情况下的 Oort 常数 A 和 B 。 [8]

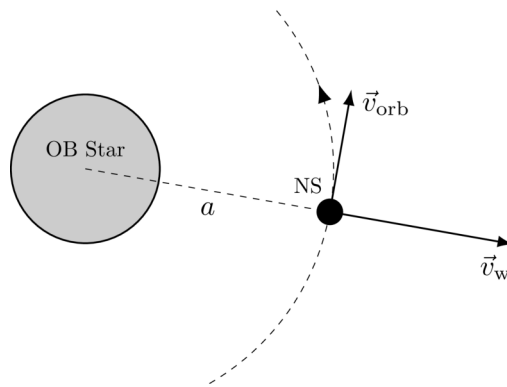
(T06.3c) 对于给定的两种情况 (I) 和 (II)，将两个 Oort 常数的比值 A/B 分别定义为 F_I 和 F_{II} 。试确定 F_I 和 F_{II} 。 [2]

(T07) 中子星双星

[20 分]

在一个包含致密星的双星系统中，如果伴星没有溢出其洛希瓣，则致密星的主要吸积源是来自伴星的星风。在包含早型星（如 O 型或 B 型星，以下简称为 OB 星）和一个在近轨道中运行的致密天体（如中子星）的系统中，这种星风驱动的吸积尤为重要。

考虑这样一个中子星-OB 星双星系统：如下图所示，质量为 $M_{NS} = 2.0 M_\odot$ 、半径为 $R_{NS} = 11 \text{ km}$ 的中子星在围绕 OB 星中心的圆轨道上运行，轨道半径为 a 、轨道速度为 $v_{orb} = 1.5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ 。在本大题中，假设 OB 星的质量损失是球对称的，且其速率为 $\dot{M}_{OB} = 1.0 \times 10^{-4} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ 。



(T07.1) 吸积半径 R_{acc} ，被定义为中子星能够捕获星风的条件下，星风与中子星之间的最大距离。如果中子星附近星风的速度为 $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ ，试求出上述系统的 R_{acc} ，以 km 为单位，使用标准逃逸速度计算。 [3]

(T07.2) 假设中子星捕获的所有物质都被吸积，如果 $a = 0.5 \text{ au}$ ，试估算中子星捕获星风的质量吸积率 $\dot{M}_{\text{acc}}$ ，单位为 $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ 。忽略辐射压力和吸积气体有限冷却时间的影响。 [3]

(T07.3) 现在考虑在轨道距离 a 处（即中子星附近）的星风速度与中子星的轨道速度的大小很接近的情况。在这种情况下，中子星捕获星风的质量吸积率可以表示为 $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} f(\tan \beta, q)$ ，其中 $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$ 是双星的质量比， β 是在中子星参考系下的星风速度方向与指向 OB 星的径向方向之间的角度。假设 $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$ ，试求出 $f(\tan \beta, q)$ 的表达式。 [6]

(T07.4) 考虑完全电离的物质从径向被吸积，并受到中子星强磁场 $\vec{B}$ 的阻碍。这个效应可被模拟为一种压力，由 $\frac{B^2}{2\mu_0}$ 给出。我们假设中子星具有偶极磁场，其在赤道面上的大小随着到中子星的距离 r 而变化，对于 $r \gg R_{\text{NS}}$ ，有

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

，其中 B_0 是中子星赤道处的磁场。假设磁偶极矩的南北极轴线与中子星的自转轴重合。

(T07.4a) 试求出赤道面上的磁压力 $P_{\text{eq,mag}}$ ，用 B_0 、 R_{NS} 、 r 和其他适当的常量表示。 [1]

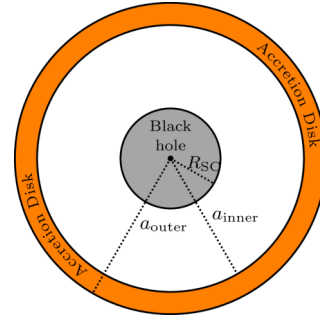
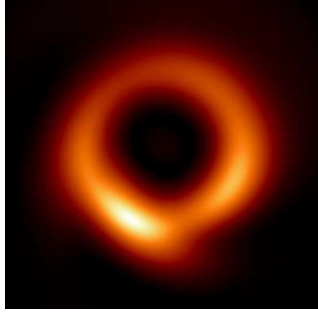
(T07.4b) 在赤道平面上，吸积流被磁场所阻止的最大距离称为磁层半径 R_m 。由于星风与中子星之间的相对运动，这些被吸积的物质流会产生压力。使得 R_m 与 R_{acc} 一致的磁场称为临界磁场，试求出临界磁场 $B_{0,c}$ 的近似表达式，并计算其值，以 T（特斯拉）为单位。当 $r > R_m$ 时可忽略磁效应，且应考虑 $v_w \gg v_{\text{orb}}$ 。 [7]

(T08) 黑洞的阴影

[20 分]

事件视界望远镜（EHT）发布了 M87 星系中心超大质量黑洞的图像，如下图左侧所示。

为了理解该图像的一些简单特征，我们将考虑一个简化模型，即一个质量为 $M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$ 的非旋转、静态、球对称黑洞，被一个无质量、薄的平面吸积盘包围，吸积盘的内半径和外半径分别为 $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ 和 $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$ ，其中 R_{SC} 为施瓦西半径。下图右侧为该模型的正面示意图，注意该图不按比例。



我们假设吸积盘是唯一需要考虑的光源，盘上的每一点都朝各个方向发光。这些光在黑洞引力场的影响下传播，其路径由下面的两个方程决定（与围绕太阳运行的天体类似）：

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

其中 $r \in (R_{SC}, \infty)$ 是径向坐标， $\phi \in [0, 2\pi)$ 是方位角， E 和 L 分别是与能量守恒和角动量守恒相关的常数。

这里 $v_r \equiv dr/dt$ 是径向速度的大小， v_ϕ 是切向速度的大小， $\omega \equiv d\phi/dt$ 是角速度。我们定义轨迹的碰撞参数 (impact parameter) 为 $b = L/\sqrt{2E}$ 。在这道大题中，忽略时间膨胀效应。

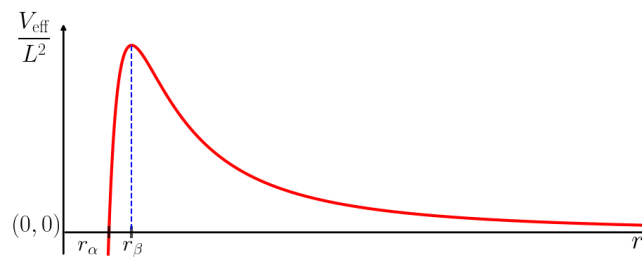
对第一个方程作微分，可以得到另一个有用的方程：

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

(T08.1) 在黑洞周围，光子的轨迹可能是圆形。试求出此类光子轨迹的半径 r_{ph} 和碰撞参数 b_{ph} ，用 M 和相关常量表示。 [4]

(T08.2) 计算光子沿圆形轨迹绕行一整圈所需的时间 T_{ph} ，以秒为单位。 [2]

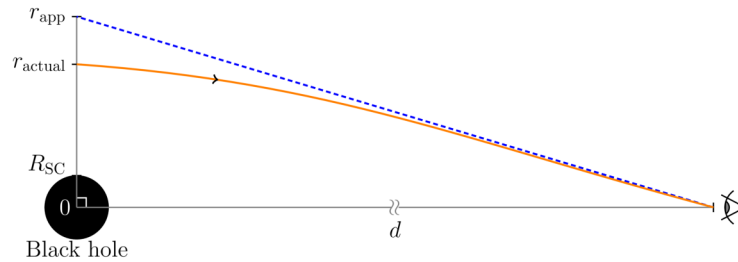
(T08.3) 上面给出的径向速度方程（本大题中的第一个方程）可与以下形式的光轨迹方程进行比较： $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$ 。下图展示了 V_{eff}/L^2 与 r 的函数关系。



(T08.3a) 图中显示了两个特殊半径 r_{α} 和 r_{β} 。试求出 r_{α} 和 r_{β} 的表达式，用 M 和相关常量表示。 [2]

(T08.3b) 从吸积盘向黑洞运动的光子在某些情况下仍然可以逃逸到无穷远处。求出这种光子的转折点半径的最小值 r_t 的表达式，用 M 和相关常量表示。并求出该光子的碰撞参数的最小值 b_{min} 的表达式。 [3]

- (T08.4) 如下图所示，天球面上与黑洞中心相距 r_{actual} 处发出一束光线，由于黑洞的引力而发生强烈弯曲，最终到达与黑洞中心相距 d 的远方观察者（用眼睛表示）。

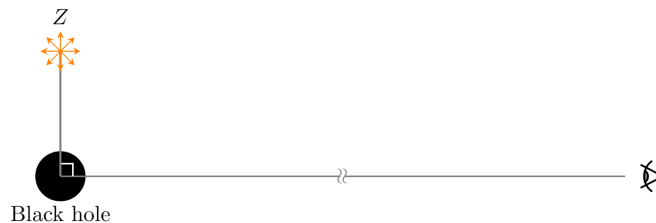


对这个观察者而言，光线似乎是从天球面上与黑洞中心相距 $r_{\text{app}} \approx b$ 的不同点发出的，其中 b 是该光子轨迹的碰撞参数。对于吸积盘上 $r = r_{\text{actual}}$ 的点，可以假设以下关系：

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

我们这样的远方观察者以正面视角观察吸积盘，则系统的图像在天球面上将呈圆对称分布。 [5]
试确定图像的最外表观半径 r_{outer} 和最内表观半径 r_{inner} ，单位为天文单位 (au)。

- (T08.5) 考虑一个没有吸积盘的孤立超大质量黑洞，其质量为 $M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$ 。如下图所示，在与黑洞中心相距 $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ 的某点 Z 处发生了一次持续5秒的强烈电磁辐射爆发。点 Z 的爆发朝所有方向发射光线。远离黑洞的观察者（用眼睛表示）对黑洞周围区域进行了60秒的长曝光拍摄。



在以下陈述中，选择正确的一项：

- (T08.5a) 光从点 Z 处传播到观察者处的可能路径的数量为 [2]
(A) 至多一个 (B) 恰好一个 (C) 恰好两个 (D) 多于两个。
- (T08.5b) 在长曝光图像中，将看到点 Z 处的电磁辐射爆发所成的像的数量是 [2]
(A) 至多一个 (B) 恰好一个 (C) 恰好两个 (D) 多于两个。

(T09) 大气视宁度 [35 分]

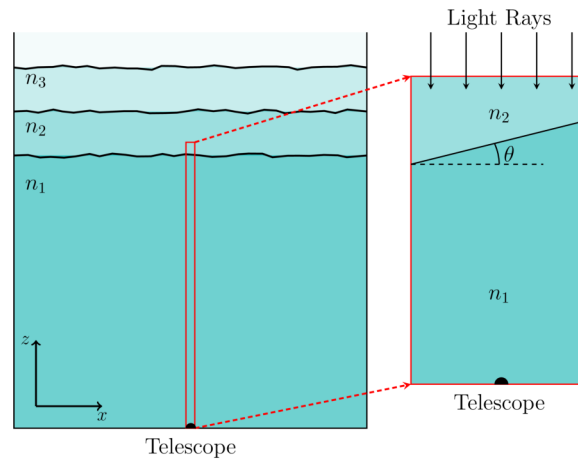
一台望远镜指向天顶的一颗恒星，其物镜为消色差凸透镜，直径为 $D = 15 \text{ cm}$ ，焦距为 $f = 200 \text{ cm}$ 。

- (T09.1) 对于点光源发出的绿色光 ($\lambda = 550 \text{ nm}$)，仅考虑衍射效应，试求物镜在其焦平面上所成的像的直径 d_{image} ，以米为单位。 [1]

天体所成的像也受到所谓的“大气视宁度”的影响。

由于湍流、温度变化以及其他因素，大气各层间的边界以及各层内的折射率都会不断变化。这导致像在望远镜焦平面上的位置发生微小变化，称为“闪烁效应”。对于本大题以下各小问，除了上一小问讨论的星像被衍射效应所限制的有限大小以外，不考虑任何干涉效应。

下图左侧为大气的垂直截面示意图，各层具有不同的折射率 ($n_1, n_2, n_3, \dots$)；右侧选取了其中一小条大气细柱并放大，显示了折射率为 n_1 和 n_2 的最低两层之间的边界 ($n_1 > n_2$)。我们仅考虑这两层及其边界。注意该图不按比例。



(T09.2) 设两层之间的边界位于望远镜物镜正上方 $H = 1 \text{ km}$ 处，相对于水平面的倾角为 30° 。对于单色光源，两层的折射率分别为 $n_1 = 1.00027$ 、 $n_2 = 1.00026$ 。设位于天顶的恒星在望远镜焦平面所成的像的角偏移为 α 。

(T09.2a) 在两层边界处画出一个带有适当标注的光路图，以显示 n_1 、 n_2 、 θ 和 α 。 [2]

(T09.2b) 试求 α 的表达式，用 θ 、 n_1 和 n_2 表示。使用小角度近似 $\sin \alpha \approx \alpha$ 和 $\cos \alpha \approx 1$ 。 [2]

(T09.2c) 如果 θ 增加 1%，并保持 n_1 和 n_2 不变，试计算像的位置的偏移 Δx_θ ，以米为单位。 [3]

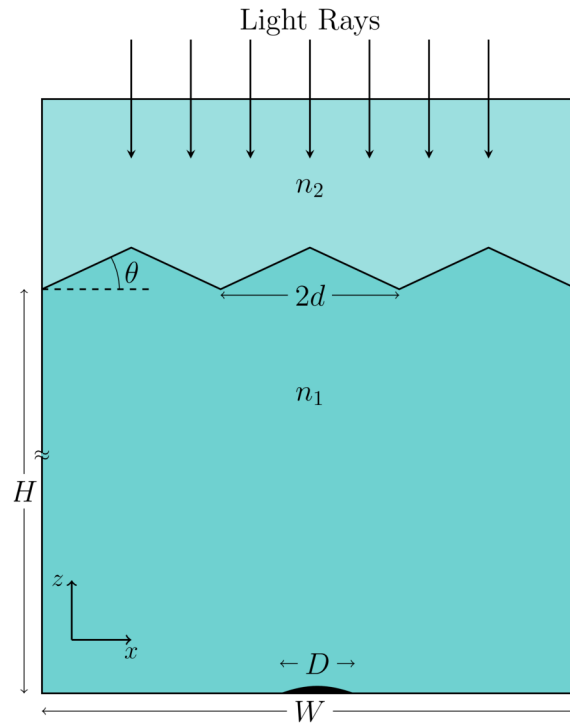
(T09.2d) 如果 n_2 增加 0.0001%，并保持 n_1 和 θ 不变，试计算像的位置的偏移 Δx_n ，以米为单位。 [3]

(T09.3) 对于来自天顶恒星的白光，选择以下哪一项正确描述了所成的像的形状和颜色（单选）， [2] 并在答案汇总纸上的相应方格里打勾 (✓)。注意图中 x 从左到右增加。

	像的颜色	像的形状	左边缘	右边缘
A	白色	圆形		
B	白色	椭圆形		
C	彩色	圆形	蓝色	红色
D	彩色	圆形	红色	蓝色
E	彩色	椭圆形	蓝色	红色
F	彩色	椭圆形	红色	蓝色

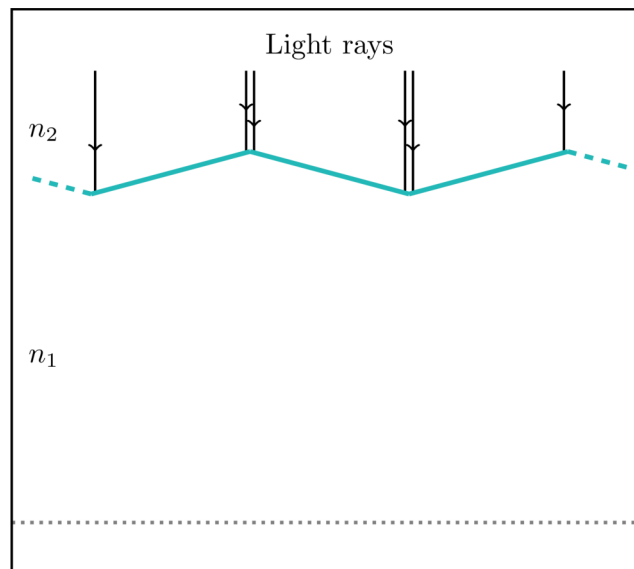
对于这道大题的所有剩余小问，我们考虑波长为 $\lambda = 550 \text{ nm}$ 的单色绿色光。我们将层之间的边界模拟为一组无限延伸的锯齿形平面，锯齿面垂直于纸面，并沿着 x 轴以 $d = 10 \text{ cm}$ 的间隔分隔，倾角为 $\theta = 10^\circ$ 或 $\theta = -10^\circ$ 。

下图（不按比例）显示了这种大气模型的截面图，截面宽度 $W \ll H$ 。对于大口径望远镜，这种锯齿形状的边界会导致焦平面上形成斑点。



(T09.4) 考虑如上所述的大气模型。

(T09.4a) 下图（不按比例）显示了具有连续锯齿界面的一部分大气，其参数与上述相同。



在答案汇总纸的该图中，画出入射光线的路径，直至灰色虚线表示的望远镜物镜所在平面。

在图中标记出没有光线到达的区域（如果有的话），用“X”标记。

[4]

(T09.4b) 计算没有光线到达的区域的宽度 W_X 。

[3]

(T09.4c) 通过适当选择望远镜相对于这种边界结构的位置，找到望远镜物镜的最大直径 $D_{\max}$ ，以便能够获得单一恒星的像。

[4]

- (T09.5) 考虑边界的锯齿形状在 x 和 y 两个方向均存在的情况（就像无限延伸的一座座金字塔），且 $D = 100 \text{ cm}$, $f = 200 \text{ cm}$. [6]

在答题汇总纸的框中定性地绘制所得斑点的图案。

- (T09.6) 对于大气湍流，再次考虑仅沿 x 方向平行分布的锯齿形状界面，但现在两个平面之间的夹角在 1.0 秒的时间内以均匀的速率从 10° 变化到 -10° 。假设这一过程导致像的位置以均匀的速率移动。 [5]

考虑一台望远镜， $D = 8 \text{ cm}$, $f = 1 \text{ m}$ 。试估算其 CCD 相机所允许的最长曝光时间 $t_{\max}$ ，以便只获得单个像，并且其位置的任何可能偏差均保持在像的衍射极限直径的 1% 以内。

(T10) 大爆炸核合成

[35 分]

在早期宇宙的辐射主导的时代，宇宙的尺度因子 $a \propto t^{1/2}$ ，其中 t 是自大爆炸以来的时间。在这个时代的早期，中子 (n) 和质子 (p) 通过弱相互作用保持热平衡。自由中子或质子的数密度 (N) 与温度 T 及其相应的质量 m 相关，如下式所示：

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

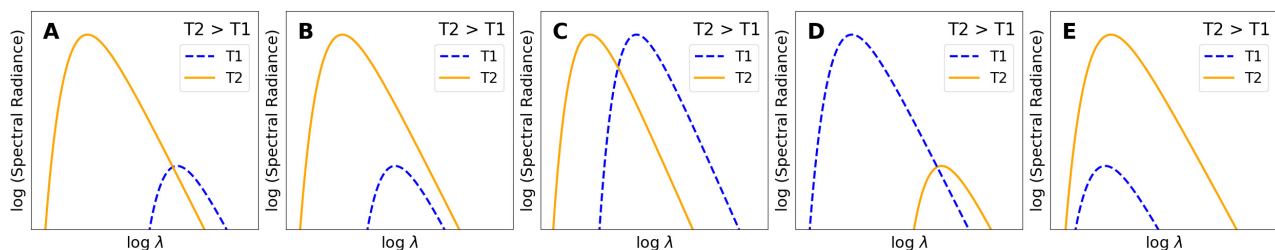
只要时间 $t \leq t_{\text{wk}} = 1.70 \text{ s}$ ，当 $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800 \text{ keV}$ 。当 t 超过 t_{wk} 后，弱相互作用便无法再维持这种平衡，自由中子以 610.4 秒的半衰期衰变为质子。

- (T10.1) 设质子的数密度为 N_p ，中子的数密度为 N_n 。试计算中子的相对丰度，用时刻 t_{wk} 的比率 $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ 表示。 [4]

- (T10.2) 光子在所有时期均保持热平衡，并保持黑体谱。

- (T10.2a) 试求指数 β ，使得 $T(a) \propto a^\beta$ 。 [2]

- (T10.2b) 请在以下图像中，选出正确描述了两个温度 T_1 和 T_2 对应的能谱能量密度的图像。在答案汇总表中勾选 (✓) 正确的选项。 [2]

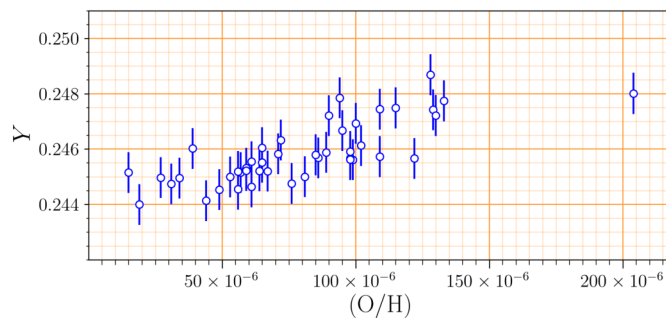


- (T10.3) 在 t_{wk} 之后，质子和中子形成氘原子核的过程由印度物理学家梅赫纳德·萨哈教授给出的萨哈方程制约，该方程可以简化为

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

其中，重子与光子之比 η 是 6.1×10^{-10} ， N_D 是氘原子核的数密度。

- (T10.3a) 在答案汇总纸所提供的坐标纸上，绘制比率 N_D/N_n ，至少选择 $k_B T = [60, 70]$ keV 范围中的4个合理间隔的温度值，并画出通过这些点的平滑曲线。 [5]
- (T10.3b) 从图中求得 $N_D = N_n$ 所对应的 $k_B T_{\text{nuc}}$ ，以 keV 为单位。 [1]
- (T10.3c) 现在假设所有自由中子在 $k_B T_{\text{nuc}}$ 的瞬间与质子结合形成氘原子核，并立即全部转化为氦原子核 (${}^4_2\text{He}$)。计算用于形成氦原子核的相应核合成时期所在时刻 t_{nuc} ，以秒为单位。 [4]
- (T10.4) 计算紧接在 t_{nuc} 之前的 $X_{n, \text{nuc}}$ 的值。 [5]
- (T10.5) 原初氦丰度 Y_{prim} ，被定义为宇宙中重子总质量在 t_{nuc} 之后被束缚在氦原子核中的比例。仅以此计算为目的，假设 $m_p \approx m_n$ ，并且氦原子核的质量 $m_{\text{He}} \approx 4m_n$ ，试对 Y_{prim} 的值进行理论估算。 [3]
- (T10.6) 原初氦丰度非常难以测量，因为宇宙中的恒星不断地将氢转化为氦。星系中恒星核合成过程也会富集更重的金属元素，可通过氧（仅由恒星产生）与氢的相对数密度来表征，表示为星系中的 (O/H) 。不同星系的 (O/H) 和氦丰度 Y 的测量结果绘制在下图中。



使用该图中的所有点（已在答案汇总表中重制）回答以下小问。

- (T10.6a) 估计一个蓝色致密矮星系的 Y ，其 (O/H) 值为 1.75×10^{-4} 。 [2]
- (T10.6b) 获取上述数据的直线拟合的斜率 $dY/d(\text{O}/\text{H})$ 。 [2]
- (T10.6c) 根据上述观测结果，估计原初氦丰度 $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ 。 [2]
- (T10.7) 通过改变重子与光子的比率 η ，可以调和 Y_{prim} 和 $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ 之间的偏差。假设 η 减少，答案汇总表已在相应的方框中标注 $\downarrow$ ，请判断 $N_D/N_n(T)$ 、 T_{nuc} （当 $N_D = N_n$ 时）、 t_{nuc} 、 $X_{n, \text{nuc}}$ 和 Y_{prim} 分别增加 ($\uparrow$) 还是减少 ($\downarrow$)，并在答案汇总表的其他方框中标注。 [3]

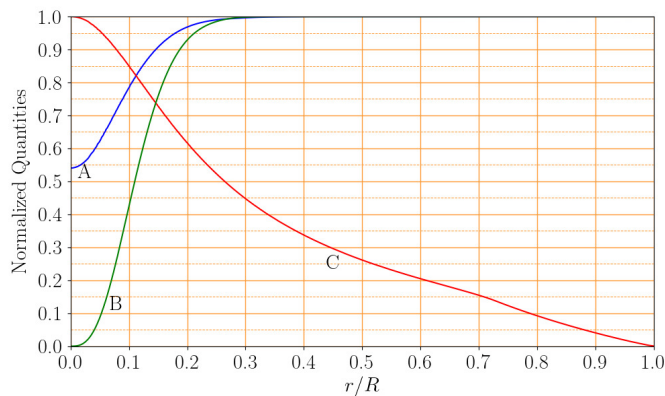
(T11) 用关系图理解恒星

[50 分]

恒星可以被很好地近似为球对称的天体，因此在对恒星内部建模时，可以选择离中心的径向距离 r 作为唯一的自变量。半径为 r 处的球体所包含的质量用 $m(r)$ 表示。光度 $l(r)$ 定义为单位时间内通过半径为 r 的球面向外流出的净能量。其他常用量，例如密度 $\rho(r)$ 、温度 $T(r)$ 、氢元素所占的质量比 (hydrogen mass fraction) $X(r)$ 、氦元素的质量比 (helium mass fraction) $Y(r)$ ，以及单位时间内单位质量产生的核能 $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$ ，都是 r 的函数。在本道大题中，我们将忽略恒星内部元素的扩散和重力沉降效应。符号 “log” 指的是以 10 为底的对数。本道大题由三个独立部分组成。

(T11.1) 第一部分：恒星内部

下图显示了在质量为 $1 M_{\odot}$ 、年龄为 4 Gyr (40 亿年) 的恒星模型中，A、B 和 C 这三个量随半径 (用 r/R 表示) 的变化情况，其中 R 是恒星的光球半径。恒星表面的氦元素质量占比 Y_s 和金属丰度 (所有比氦重的元素的质量占比) Z_s ，由 $(Y_s, Z_s) = (0.28, 0.02)$ 给出。图中显示的所有量都按各自的最大值进行了归一化处理。



(T11.1a) 现有三个量 A、B 和 C，分别对应以下五个量中的三个：

[6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

，找出它们分别对应哪个，并在答案汇总表中相应量旁边的方框中写下 A/B/C。本小问的答案无需说明理由。

(T11.1b) 在恒星的中心处，氦元素的质量占比 Y_c 是多少？

[3]

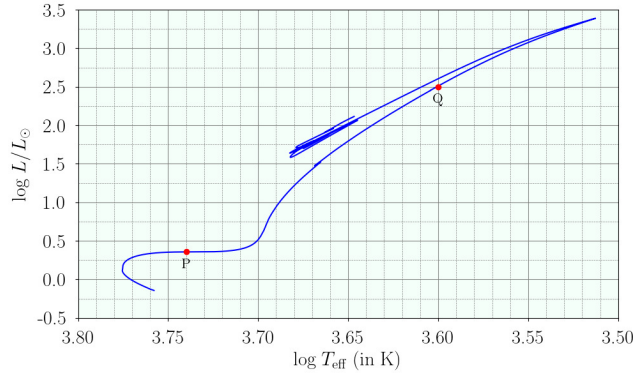
(T11.1c) 对于 (T11.1a) 所给出的五个量中的另外两个量 (即 A、B、C 之外的那两个量)，用曲线画出它们与 r/R 的函数关系，并在答案汇总表中的同一张图上画出，同时标出它们的变量名。

[5]

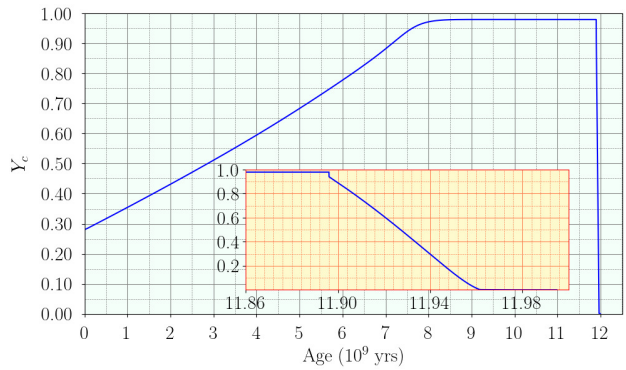
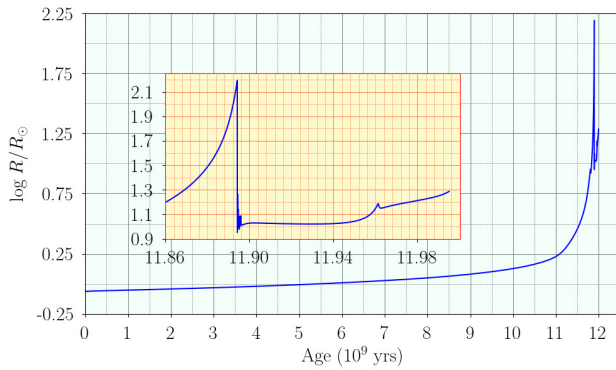
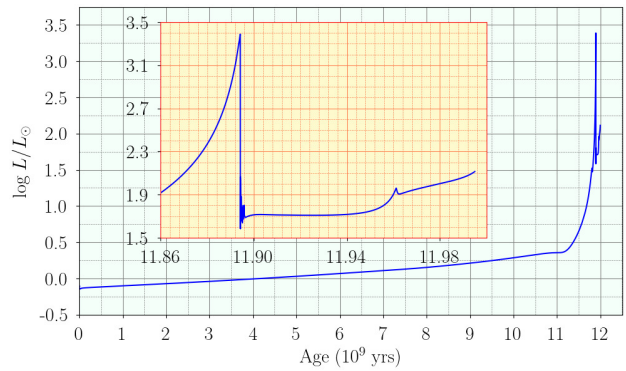
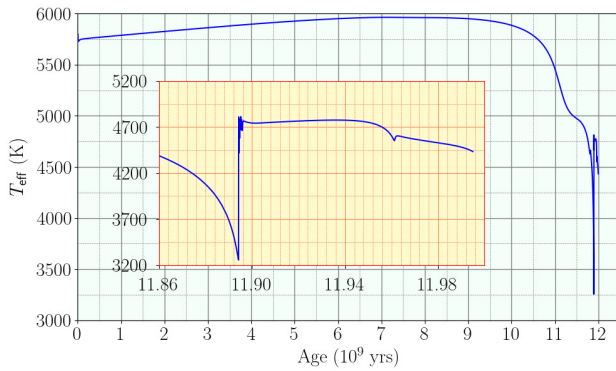
(T11.2) 第二部分：恒星的演化

考虑质量为 $1 M_{\odot}$ 的恒星的演化过程，它的初始成分包括均匀分布的氢 (质量占比 $Y_0 = 0.28$) 和金属 (质量占比 $Z_0 = 0.02$)。下图显示了这颗恒星从零龄主序 (ZAMS) 演化到核心氦燃烧结束的期间内，各个物理量的变化情况。

下图显示了这颗恒星在赫罗图上的演化轨迹，纵坐标与横坐标分别为 $\log L/L_{\odot}$ 与 $\log T_{\text{eff}}$ ，其中 L 是表面光度， T_{eff} 是有效温度。



下图中的四幅图显示了同一颗恒星的 T_{eff} (单位为 K)、 L (展示为 $\log L/L_{\odot}$)、 R (展示为 $\log R/R_{\odot}$) 和 Y_c 随年龄 (单位为 10^9 年) 的变化。为了显示得更加清晰, 每幅图中还插入了一幅详图, 显示了恒星年龄从 $11.86 \times 10^9 \text{ yr}$ 增长到 $12.00 \times 10^9 \text{ yr}$ 的期间内, 各个物理量的变化。



利用上述图像, 回答以下小问。

- (T11.2a) 该恒星的主序寿命 t_{MS} 大约是多少年? [1]
- (T11.2b) 该恒星核心氦燃烧的持续时间 Δt_{He} 大约是多少年? [1]
- (T11.2c) 当该恒星的光度为 $1 L_{\odot}$ 时, 它中心的氢有多大比例 (f_{H}) 被燃烧掉了? [3]
- (T11.2d) 当该恒星中心的氢有 60% 被燃烧掉时, 恒星的半径 R_1 是多少倍 $R_{\odot}$? [3]
- (T11.2e) 在赫罗图上标注的位置 P 和 Q 处, 恒星的半径 R_P 和 R_Q 分别是多少倍 $R_{\odot}$? [4]

(T11.3) 第三部分：恒星内部的质量分布

恒星内部质量分布的方程为：

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

，用三个无量纲变量来表示这个方程会很方便，它们分别是：质量占比 q 、半径占比 x 以及相对密度 σ ，我们将其定义为：

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

，其中 M 和 R 是恒星的总质量和半径， $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ 是恒星的平均密度。对于我们在这部分要考虑的特定恒星，我们将给出以下信息：

- 中心密度 $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$;
- 该恒星一半的质量包含在其总半径的 25% 以内，70% 的质量包含在其总半径的 35% 以内。

在本题的所有后续小问中，将推导出的所有系数的数值四舍五入到 0.005 以内即可。

(T11.3a) 用 x 、 $\frac{dq(x)}{dx}$ 和 $\sigma(x)$ 来表达上述描述质量与半径关系的方程。 [2]

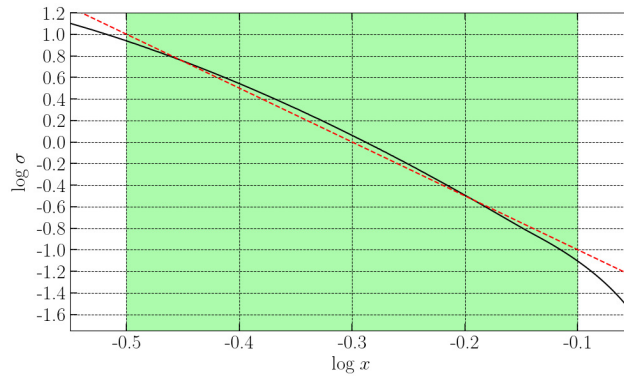
为了得到质量随半径的分布，我们需要知道恒星内部的密度分布。为了解决这个问题，我们将在 x 的两个区域中用近似形式描述密度随半径的变化：

- 恒星内部： $0 \leq x \leq 0.32$
- 恒星的中间部分： $0.32 < x < 0.80$

我们不对最外层部分（即： $0.80 \leq x \leq 1.00$ ）作任何近似。

(T11.3b) 中区间部分（the middle part）的近似：

恒星中间部分的 $\log \sigma$ 作为 $\log x$ 的函数的变化如下图所示（黑色曲线）。我们将对 $-0.5 < \log x < -0.1$ 区间的 $\log \sigma$ 作线性近似（如图中红色虚线所示），即 $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ （如绿色阴影区域所示）。此外，我们将用最接近的整数来近似这条直线的斜率。



根据以上近似，写出 $\sigma(x)$ 的函数表达式，自变量 x 的取值区间为 $0.32 < x < 0.80$ 。 [4]

(T11.3c) 利用 (T11.3b) 的结果推导出 $0.32 < x < 0.80$ 区间内的 $q(x)$ 的表达式。 [6]

(T11.3d) **内区间部分 (the inner part) 的近似：**

在恒星的内部 ($0 \leq x \leq 0.32$)，密度可以近似为半径的线性函数，即 $\sigma(x) = Ax + B$ ，其中 A, B 是常数。确定 A 和 B ，从而得到在区间 $0 \leq x \leq 0.32$ 上 $q(x)$ 的表达式。需要注意的是，上一部分和这一部分所采用的近似方法可能会导致密度或质量在 $x = 0.32$ 处出现些许不连续性。 [8]

(T11.3e) 在 (T11.3c) 和 (T11.3d) 部分得到的 $q(x)$ 表达式是近似值，可以很好地描述质量随半径的变化，但仅限于恒星的特定区域。对于区间 $0.80 \leq x \leq 1$ （我们没有推导出任何表达式），可以使用邻近区域做适当外推。使用这些近似表达式和给定的数据，对整个恒星 ($0 \leq x \leq 1$) 画出代表着质量随半径的变化 $q(x) \sim x$ 的光滑曲线图（对 $q(x)$ 或其导数，都没有任何不连续性）。 [4]

(T12) 黑洞的霍金辐射

[50 分]

(T12.1) 黑洞通常是由一颗大质量恒星在其生命周期结束时的引力坍缩形成的，最终形成一个称为“奇点”的点。由于这种天体的极端引力，进入所谓的事件视界（半径为 $r = R_{\text{SC}}$ 的球面，其中 r 是与奇点的距离）以内的任何物质都无法逃脱。这里， R_{SC} 被称为施瓦西半径。

(T12.1a) **模拟霍金辐射的起源：**考虑一个粒子对，每个粒子的质量都为 m ，产生在黑洞视界的两侧。一个粒子稍微在视界外部，位置为 $r \approx R_{\text{SC}}$ ；而另一个粒子在视界内部，位置为 $r = \kappa R_{\text{SC}}$ 。假设粒子的总能量是其静质能 mc^2 和由于黑洞而获得的引力势能之和。

试确定使得粒子对的总能量为零的 κ 的值。

[4]

- (T12.1b) **黑洞的温度：**上述过程中，如果在视界外产生的粒子具有足够的动能，则它可能会通过霍金辐射过程逃离黑洞。在视界内产生的粒子具有负能量，会被黑洞吸收并使黑洞的质量减小。

假设所有的霍金辐射都是由具有黑体谱的光子组成的，其峰值波长为 $\lambda_{\text{bh}} \approx 16 R_{\text{SC}}$ 。已知对于一倍太阳质量的黑洞， $R_{\text{SC}, \odot} = 2.952 \text{ km}$ 。

试推导与此黑体辐射相对应的黑洞温度 T_{bh} 的表达式，用黑洞质量 M_{bh} 和物理常量来表示。并计算质量为 $10 M_{\odot}$ 的黑洞的施瓦西半径 $R_{\text{SC}, 10\odot}$ 和温度 $T_{\text{bh}, 10\odot}$ 。 [4]

- (T12.1c) **黑洞的质量损失：**假设霍金辐射从事件视界发出。

利用质能关系，试推导质量损失率 $dM_{\text{bh}}(t)/dt$ 的表达式，用黑洞质量 $M_{\text{bh}}(t)$ 和物理常量来表示。

从而获得初始质量为 M_0 的黑洞在时刻 t 的质量 $M_{\text{bh}}(t)$ 的表达式。绘制 $M_{\text{bh}}(t)$ 和 t 之间的函数关系，从 $M_{\text{bh}} = M_0$ 到 $M_{\text{bh}} = 0$ 。 [8]

- (T12.1d) **黑洞的寿命：**霍金辐射导致黑洞蒸发，试推导初始质量为 M_0 的黑洞的寿命 τ_{BH} 的表达式，用 M_0 和物理常数来表示。计算初始质量为 $M_0 = 10 M_{\odot}$ 的黑洞的寿命 $\tau_{\text{bh}, 10\odot}$ ，以秒为单位。 [3]

- (T12.1e) **处于 CMB 辐射浴中的黑洞：**考虑一个远离其他天体的孤立黑洞，当前温度为 $T_{\text{bh}}^{\text{now}}$ ，被当前温度为 $T_{\text{cmb}}^{\text{now}} = 2.7 \text{ K}$ 的宇宙微波背景（CMB）所包围。黑洞可通过吸收 CMB 辐射增加质量，并通过霍金辐射损失质量。

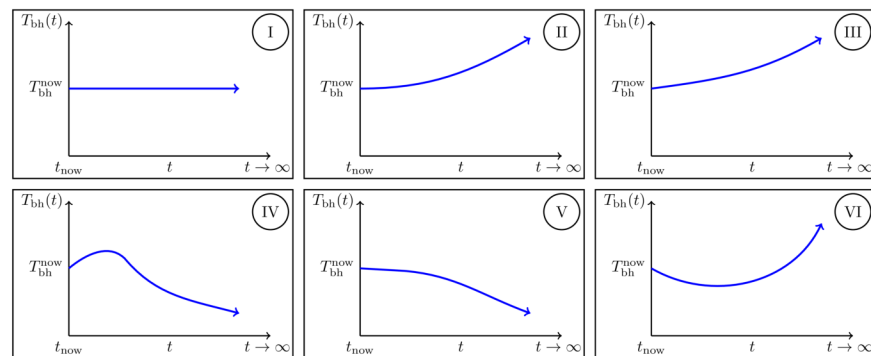
给定三种情况：

(X) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} > T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$,

(Y) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} = T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$,

(Z) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} < T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$ 。

考虑到宇宙的加速膨胀，分别确定下列哪幅图像正确描述了每种情况下 T_{bh} 的长期演化：



在答案汇总纸中，对于每种情况X、Y或Z，通过勾选相应的方格（仅一个）来标明相应的正确图像编号。 [6]

- (T12.2) **原初黑洞（PBHs）**形成于非常早期的宇宙中，其质量要小得多。以下所有小问都与原初黑洞相关，可忽略任何使黑洞质量增加的过程。

- (T12.2a) **在当前时代蒸发的原初黑洞：**正如您可能从之前小问的答案中注意到的，太阳质量的黑洞需要很长时间才能蒸发。然而，由于原初黑洞可以具有更小的质量，我们可能在当前时代看到它们的蒸发。

试计算可能在当前时代完全蒸发的黑洞（即寿命为 $\tau_{\text{PBH}} = 140$ 亿年的那些黑洞）的初始质量 $M_{0, \text{PBH}}$ （以千克为单位）、史瓦西半径 $R_{\text{SC, PBH}}$ （以米为单位）和温度 T_{PBH} （以开尔文为单位）。 [4]

- (T12.2b) **原初黑洞的形成：**在辐射主导的早期宇宙中，宇宙尺度因子随时间的变化为 $a(t) \sim t^{1/2}$ 。在这个时期，原初黑洞是由物理尺度为 ct 的区域内所有能量的坍缩而形成的，其中 t 是当时的宇宙年龄。

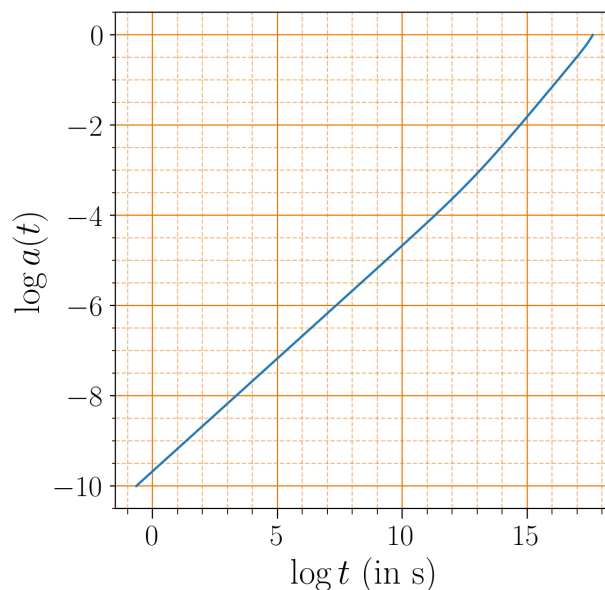
已知质量为 1×10^{12} kg 的原初黑洞形成于宇宙年龄约为 1×10^{-23} 秒时。试计算质量为 1×10^{20} kg 的原初黑洞形成时的宇宙年龄 t_{20} 。 [6]

- (T12.2c) **观测到的原初黑洞霍金辐射光谱：**考虑一个初始质量为 1×10^{10} kg 的原初黑洞，它在其生命周期结束时完全蒸发。对于这一小问，可作以下的简化假设：其大部分霍金辐射都在完全蒸发时发出，且其温度与其初始质量相对应。同时，假设宇宙的尺度因子随时间的演化为 $a(t) \sim t^{2/3}$ 。

试计算在当前时代（ $t = 140$ 亿年）在地球上观测到的这种霍金辐射的峰值波长 λ_{earth} 。 [5]

- (T12.2d) **来自原初黑洞的高能宇宙辐射：**现在假设在给定时刻 t 发射的霍金辐射对应于能量为 $k_B T_{\text{bh}}(t)$ 的光子。此外，黑洞可能达到的最高温度是普朗克温度 T_{Planck} ，其中 $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV。

下图给出了宇宙尺度因子在相关时间尺度上的演化。当前的尺度因子设为 1，时间轴上的 $t(s)$ 表示宇宙年龄，以秒为单位。



如果在地球上观察到能量为 $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$ eV 的光子，试确定可能产生该光子的原初黑洞初始质量的最大值 M_0^{max} 和最小值 M_0^{min} 。 [10]