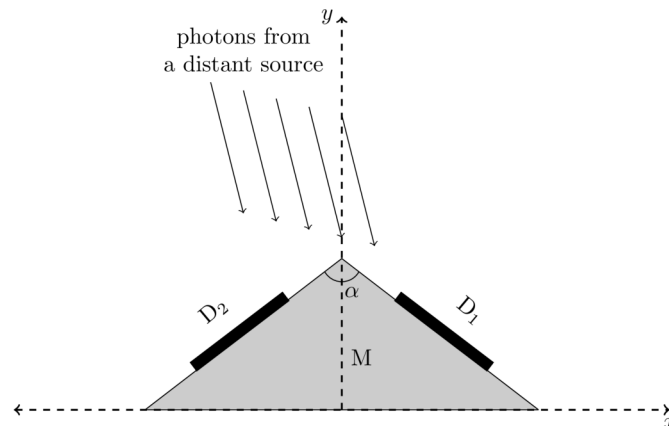


(T01) Мисия Дакша

[10 точки]

"Дакша" е мисия, предложена от Индия, състояща се от два спътника S_1 и S_2 , обикалящи Земята по една и съща кръгова орбита с радиус $r = 7000 \text{ km}$, но отместени един от друг на фазова разлика от 180° . Тези спътници наблюдават Вселената във високи енергии (рентгенови и γ -лъчи). Всеки от спътниците на Дакша използва няколко плоски, правоъгълни детектора.

За да разберем как да локализираме източник в небето, ще използваме опростен модел на мисията Дакша. Приемаме, че S_1 има само два еднакви детектора D_1 и D_2 , всеки с площ $A = 0.50 \text{ m}^2$, прикрепени към непрозрачна поставка M , както е показано на фигурата по-долу. Детекторите лежат симетрично около y -оста в равнини, перпендикулярни на x - y равнината и сключват ъгъл $\alpha = 120^\circ$ помежду си.



- (T01.1) При наблюдение на отдалечен източник, разположен в x - y равнината, детектор D_1 измерва мощност $P_1 = 2.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$, а детектор D_2 отчита мощност $P_2 = 4.70 \times 10^{-10} \text{ J s}^{-1}$.

Оценете ъгъла η , който векторът насочен към източника сключва с положителната посока на оста y , приемайки, че ъгълът, измерван обратно на часовниковата стрелка от положителната y -ос, се счита за положителен. [5]

Разгледайте единичен импулс от отдалечен източник (не непременно лежащ в равнината x - y), който е бил регистриран от двата спътника (S_1 и S_2) на Дакша. Моментите на максимумите на импулсите, регистрирани от S_1 и S_2 , са съответно t_1 и t_2 .

- (T01.2) Ако измерената стойност на $t_1 - t_2$ е $10.0 \pm 0.1 \text{ ms}$, то определете в каква част, f , от небесната сфера, може да се намира източникът. [5]

(T02) Макар-Санкранти

[10 точки]

Фестивалът "Макар-Санкранти" се празнува в Индия около 14 януари всяка година, когато Слънцето видимо навлиза в зодиакалния регион на Козирог (Макар = Козирог, Санкранти = Навлизане), гледано от Земята. Понастоящем, това се случва около 14 януари всяка година. Преди много години този фестивал е съвпадал и със зимното слънцестоене в северното полукълбо, което понастоящем е на 21 декември.

- (T02.1) Въз основа на информацията по-горе, намерете годината, y_c , когато празнуването на този фестивал за последен път е съвпаднало с датата на зимното слънцестоене за северното полукълбо. [3]
- (T02.2) Ако Слънцето е изглеждало, че навлиза в зодиакалната област на Козирог в 11:50:13 часа местно време, на 14 януари 2006 г. в Мумбай, изчислете датата, D_{enter} , и местното време, t_{enter} , на навлизането му в Козирог през 2013 г. [3]
- (T02.3) На някакво място, фестивалът Макар-Санкранти се празнува в деня на първия залез на Слънцето, в зодиакалния регион на Козирог. Можете да приемете, че моментът на залез по местно време за Мумбай през януари е 18:30:00 часа. [3]
- Посочете датата, на която фестивалът е бил отпразнуван за всяка година между 2006 и 2013 (като отбележите (✓) съответната клетка в таблицата, дадена в Листа за крайни отговори). [4]

(T03) Гравитационни вълни

[15 точки]

Двойните черни дупки генерират гравитационни вълни. Разгледайте две черни дупки в нашата Галактика с маси $M = 36 M_{\odot}$ и $m = 29 M_{\odot}$, въртящи се по кръгови орбити с ъглова скорост ω около своя център на масите.

- (T03.1) Използвайки Нютонова гравитация, изведете израз за ъгловата честота, ω_{ini} , на орбитите на черните дупки в момент, t_{ini} , когато разстоянието между черните дупки е било 4.0 пъти сумата от техните радиуси на Шварцшилд, изразено само чрез M , m и необходимите физични константи.

Изчислете стойността на ω_{ini} (в rad s^{-1}).

[5]

- (T03.2) Съгласно общата теория на относителността, черните дупки, които се намират в орбита излъчват гравитационни вълни с честота f_{GW} , така че $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. Това намалява техния орбитален радиус, което от своя страна увеличава f_{GW} . Скоростта на промяна на f_{GW} е

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

където $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ се нарича "chirp mass".

Намерете стойностите на α , β и δ .

[4]

(T03.3) Приемете, че гравитационните вълни, свързани със събитието, са били регистрирани за първи път в момент $t_{\text{ini}} = 0$. [6]

Изведете израз за наблюдавания момент на сливане на черните дупки, t_{merge} , когато f_{GW} става много голямо, в който участват само ω_{ini} , M_{chirp} и физични константи.

Изчислете стойността на t_{merge} (в секунди).

(T04) Балмерово намаляване

[15 точки]

Разглеждаме звезда от главната последователност, заобиколена от мъглявина. Наблюдаваната звездна величина на звездата във V-диапазона е 11.315 mag. Йонизираната област на мъглявината в близост до звездата излъчва линии $H\alpha$ и $H\beta$; техните дължини на вълните са съответно 0.6563 μm и 0.4861 μm . Теоретично предсказаното съотношение на потоците в линиите $H\alpha$ и $H\beta$ е $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2.86$. Но след като това лъчение преминава през външната част на студената прахова мъглявина, наблюдаваните емисионни потоци на линиите $H\alpha$ и $H\beta$ са съответно $6.80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ и $1.06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

Екстинкцията A_λ е функция на дължината на вълната и се изразява чрез

$$A_\lambda = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Тук $\kappa(\lambda)$ е кривата на екстинкция, а $E(B - V)$ е цветовия ексцес за филтри B и V. Кривата на екстинкция (с λ в μm) се задава с изрази

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

където $R_V = A_V/E(B - V) = 3.1$ е отношението на пълно към селективно поглъщане.

(T04.1) Намерете стойностите на $\kappa(H\alpha)$ и $\kappa(H\beta)$.

[3]

(T04.2) Намерете стойността на отношението на цветовите ексцеси $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$.

[4]

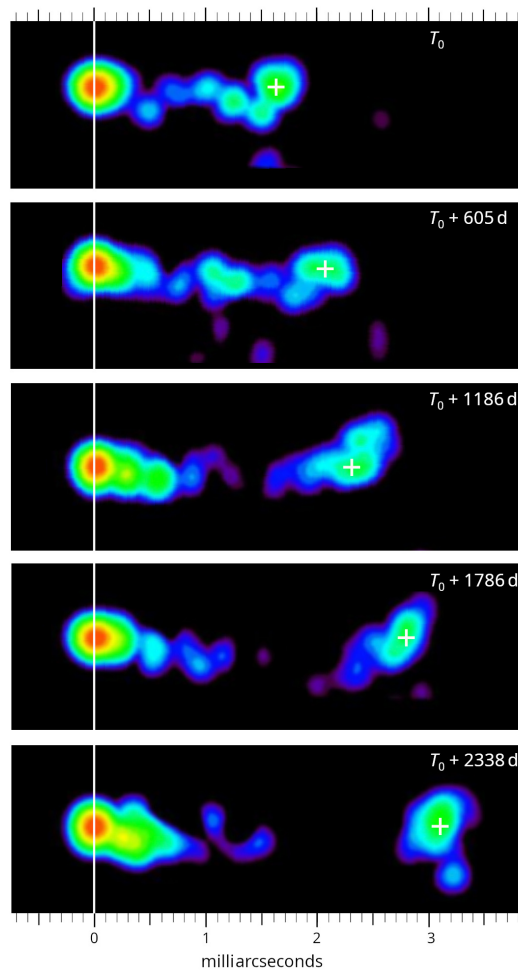
(T04.3) Оценете екстинкцията, дължаща се на мъглявината $A_{H\alpha}$ и $A_{H\beta}$, съответно за дължините на вълните $H\alpha$ и $H\beta$. [6]

(T04.4) Оценете екстинкцията на мъглявината (A_V) и видимата звездна величина на звездата m_{V0} във филтър V при отсъствие на мъглявината. [2]

(T05) Квazarи

[20 точки]

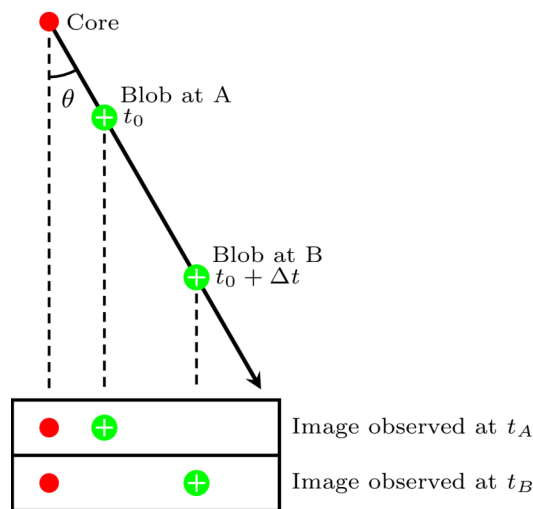
Квazarът е изключително ярка активна галактика, чиято светимост се захранва от свръхмасивна черна дупка, която изхвърля релятивистки струи. Фигурата показва серия от радиоизображения на квазар ($z = 0.53$ и разстояние, определено, чрез светимост $D_L = 1.00 \times 10^{10}$ св.г.), заснет в различни моменти от време. "Ядрото" съответства на вертикалната бяла линия, докато джет, състоящ се от "петно" (отбелязано с бял знак +), се отдалечава от него с времето. Всеки панел показва момента на наблюдение (започвайки с T_0 за първото изображение), а ъгловият мащаб е обозначен в горната и долната част на фигурата.



- (T05.1) Определете на какво ъглово отстояние се намира петното, ϕ_{blob} (в дъгови милисекунди), и напречното разстояние, l_{blob} (в светлинни години), на което то се наблюдава от ядрото на квазара в момента на всяко наблюдение. След това изчислете видимата скорост на петното в напречната посока (v_{app}) като част от скоростта на светлината, β_{app} ($= v_{\text{app}}/c$) като използвате двойките от последователни моменти. Накрая изчислете средната видима скорост $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$. [5]

Струята от квазара всъщност се движи с релативистка скорост $v \equiv \beta c$, но тази скорост не лежи непременно в картинната равнина (перпендикулярна на зрителния лъч); например: възможно е тя да образува ъгъл θ ("ъгълът на наблюдение") спрямо лъча на зрение на далечен наблюдател, както е показано на скицата по-долу.

За тази и всички следващи части, пренебрегнете червеното отместване на квазара и всички релативистични ефекти.



- (T05.2) Светлината, излъчена от петното в два различни момента t_0 (съответстващ на позиция A) и $t_0 + \Delta t$ (съответстващ на позиция B), достига до наблюдателя съответно в моментите t_A и t_B . Така наблюдаваният времеви интервал е $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

- (T05.2a) Намерете израз за съотношението $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ чрез β и θ . [2]
- (T05.2b) Използвайки това съотношение, изразете β_{app} чрез β и θ . [2]
- (T05.3) Движението се нарича свръхсветлинно, ако видимата скорост надвишава тази на светлината ($\beta_{\text{app}} > 1$), и подсветлинно, ако не я надвишава ($\beta_{\text{app}} < 1$).
- (T05.3a) За $\beta_{\text{app}} = 1$, начертайте гладка крива, описваща β като функция на θ , съответстваща на границата между подсветлинните и свръхсветлинните движения. Защриховайте свръхсветлинната област на графиката с наклонени линии (///). [4]
- (T05.3b) Намерете най-ниската стойност на истинската скорост на джета ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$) при която може да възникне свръхсветлинно движение, както и ъгъла на ориентация, на който тя съответства θ_{low} . [2]
- (T05.4) Намерете израз за максималния ъгъл, θ_{max} , при който дадена стойност на β_{app} ще бъде възможна. [2]

Ядрото на квазар, неговият централен компактен обект, показва променливост в своето излъчване поради вътрешни процеси, протичащи в област, която е причинно-следствено свързана област. Размерът (= радиусът) на тази област обикновено се приема за около пет пъти радиуса на Шварцшилд на ядрото.

- (T05.5) Установено е, че ядрото на един квазар променя своя блясък в рамките на около 1 час. [3]
Получете горна граница, $M_{\text{c, max}}$, на масата на централния компактен обект в единици слънчеви маси.

(T06) Галактично въртене

[20 точки]

Кривата на въртене на нашата Галактика може да бъде определена с помощта на измервания на скоростта по зрителния лъч на облаци от неутрален водород (HI) по различни галактични дължини, наблюдавани чрез 21 cm HI линия. Разгледайте облак от HI с галактична дължина l , разположен на разстояние R от центъра на Галактиката (GC) и на разстояние D от Слънцето. Приемете, че Слънцето се намира на разстояние $R_0 = 8.5$ kpc от GC. Приемете, че както Слънцето, така и облакът HI са в кръгови орбити около GC в галактичната равнина, с ъглови скорости Ω_0 и Ω , и ротационни скорости съответно V_0 и V .

Лъчевата скорост (V_r) и тангенциалната скорост (V_t) на облака, наблюдавани от Слънцето, могат да бъдат изразени като

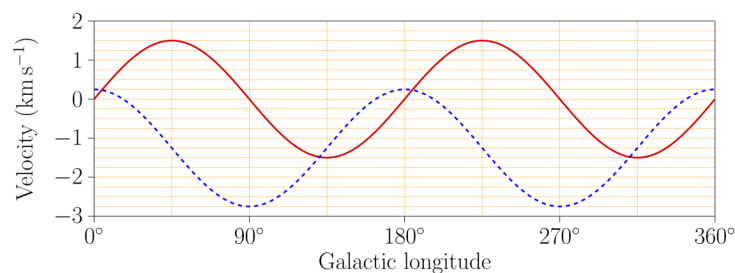
$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Гледано от северния галактичен полюс, въртенето на Галактиката е по посока на часовниковата стрелка. В тази задача ще приемем, че скоростта по зрителния лъч е положителна, когато обектът се отдалечава, а облаците ще се разглеждат като точкови обекти.

- (T06.1) В графиката, предоставена на Summary Answersheet, качествено скицирайте V_r като функция на D от $D = 0$ до $D = 2R_0$ за два зрителни лъча, съответстващи на (i) $l = 45^\circ$ и (ii) $l = 135^\circ$. Обозначете всяка от вашите линии/криви със стойността на l . [5]

- (T06.2) Графиката по-долу показва средните лъчеви (плътна, червена крива) и тангенциални (пунктирна, синя крива) компоненти на скоростта на звездите на разстояние 100 pc от Слънцето, като функция на галактичната дължина. [3]



Използвайки графиката, оценете орбиталния период на Слънцето (P) около галактичния център в милиони години (Myr).

- (T06.3) Ян Оорт забелязва, че в околността на Слънчевата система ($D \ll R_0$) разликата в ъгловите скорости ($\Omega - \Omega_0$) ще бъде малка, с което получава следното приближение от първи ред за компонентите на лъчевата и тангенциалната скорост:

$$\begin{aligned} V_r &= AD \sin 2l \\ V_t &= AD \cos 2l + BD \end{aligned}$$

където A и B са известни като константи на Оорт.

Нека разгледаме два случая:

(I) кривата на въртене на Галактиката е такава, каквато се наблюдава, и

(II) кривата на въртебе съответства на хипотетичен сценарий, при който Галактиката е лишена от тъмна материя и цялата маса на Галактиката се приема за концентрирана в нейния център.

- (T06.3a) Изведете изрази за радиалния градиент на ротационната скорост в областта около Слънцето, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$, за двата случая. [2]

- (T06.3b) Изразете A и B чрез V_0 , R_0 и радиалния градиент на ротационната скорост в областта около Слънцето, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$. [8]

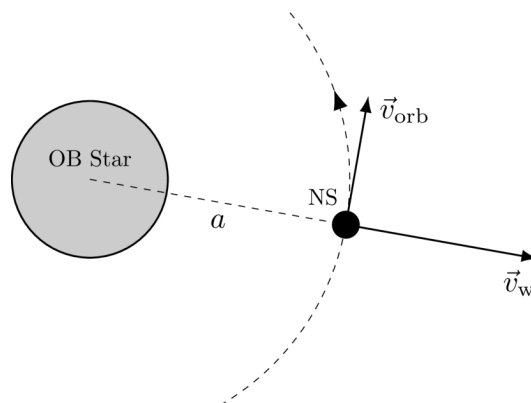
- (T06.3c) Съотношенията (A/B) на константите на Оорт за двата дадени случая, (I) и (II), са дефинирани като F_I и F_{II} , съответно. Определете F_I и F_{II} . [2]

(T07) Неутронна звезда в двойна система

[20 точки]

В двойна система, включваща компактен обект, където звездата-компаньон е изцяло в своята област на Рош, основният източник на акреция за компактната звезда е звездният вятър от тази звездата-компаньон. Тази акреция, захранвана от вятъра, е особено значима в системи, които включват звезда от ранен клас (O или B звезда, обозначавана по-нататък като OB звезда), заедно с компактен обект, например неутронна звезда (NS) в близка орбита.

Разгледайте такава двойна система NS-OB звезда, в която неутронна звезда с маса $M_{NS} = 2.0 M_\odot$ и радиус $R_{NS} = 11 \text{ km}$ обикаля в кръгова орбита с радиус a около центъра на OB звездата със скорост $v_{orb} = 1.5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (вижте фигурата по-долу). В цялата тази задача се приема, че загубата на маса от OB звездата е сферично симетрична и нейният темп е $\dot{M}_{OB} = 1.0 \times 10^{-4} M_\odot \text{ yr}^{-1}$.



- (T07.1) Радиусът на акреция, R_{acc} , се дефинира като максималното разстояние от неутронната звезда, от което звездният вятър се улавя от нея. Ако скоростта на звездния вятър близо до повърхността на неутронната звезда е $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, намерете R_{acc} за горната система в km, използвайки стандартния начин за пресмятане на скорост на избягване. [3]

- (T07.2) Като приемем, че цялото уловено вещество се натрупва върху неутронната звезда, оценете темпа на натрупване на маса, $\dot{M}_{\text{acc}}$, от звездния вятър върху тази неутронната звезда в единици $M_{\odot} \text{yr}^{-1}$, ако $a = 0.5 \text{ au}$. Пренебрегнете ефектите от светлинното налягане и крайното време за охлаждане на натрупващия се газ. [3]
- (T07.3) Сега разгледайте ситуацията, при която скоростта на звездния вятър на орбиталното разстояние a (близо до NS) става сравнима с орбиталната скорост на NS. Темпът на акреция на маса от звездния вятър върху неутронната звезда в този случай би трябвало да се задава с израз от вида $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{ОВ}} f(\tan \beta, q)$, където $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{ОВ}}$ е съотношението на масите в двойната система и β е ъгълът в отправната система на неутронната звезда между посоката на скоростта на вятъра и радиалната посока навън от ОВ звездата. Получете израз за $f(\tan \beta, q)$, използвайки, че $M_{\text{ОВ}} \gg M_{\text{NS}}$. [6]
- (T07.4) Имайте предвид, че напълно йонизираният материал се натрупва радиално и е повлиян от силното магнитно поле $\vec{B}$ на неутронната звезда. Налягането, упражнявано от магнитното поле, се дава с израз $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Ще приемем, че неутронната звезда има диполно магнитно поле, чиято стройност в екваториалната равнина се променя с разстоянието r от неутронната звезда за $r \gg R_{\text{NS}}$ като

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

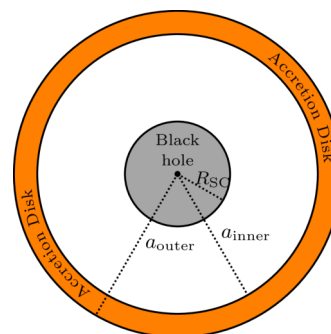
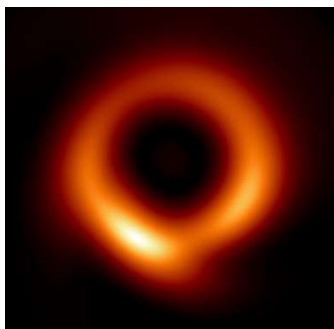
където B_0 е магнитното поле на екватора.

- (T07.4a) Получете израз за магнитното налягане ($P_{\text{eq, mag}}$) в екваториалната равнина по отношение на B_0 , R_{NS} , r и други подходящи константи. [1]
- (T07.4b) Разстоянието, на което потокът на акрецията се спира от магнитното поле, се нарича магнитосферен радиус R_m . Този поток от материя упражнява налягане поради относителното движение между входящия звезден вятър и неутронната звезда. Намерете израз за критичното магнитно поле $B_{0, c}$, за което R_m съвпада с R_{acc} и изчислете стойността му в Тесла. Магнитните ефекти се пренебрегват за $r > R_m$ и приемете $v_w \gg v_{\text{orb}}$. [7]

(T08) Сянка на черна дупка

Event Horizon Telescope (ЕНТ) публикува изображение на свръхмасивната черна дупка в центъра на галактиката М87, както е показано в лявата част на фигурата по-долу.

За да разберем някои прости характеристики на това изображение, ще разгледаме опростен модел на невъртяща се, статична, сферично симетрична черна дупка с маса $M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$, заобиколена от безмасов, тънък, плосък акреционен диск с вътрешен и външен радиус съответно $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ и $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, където R_{SC} е радиусът на Шварцшилд. Скица на изглед отгоре е показана в дясната част на фигурата по-долу (фигурата не е в мащаб).



Приемаме, че акреционният диск е единственият източник на светлина, който трябва да се вземе предвид. Всяка точка от диска излъчва светлина във всички посоки. Тази светлина се движи под влиянието на гравитационното поле на черната дупка. Пътят на светлинните лъчи се задава от две уравнения, дадени по-долу (които са подобни на тези за обект около Слънцето):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

където $r \in (R_{SC}, \infty)$ е радиалната координата, $\phi \in [0, 2\pi)$ е азимуталният ъгъл, а E и L са константи, свързани съответно със запазената енергия и запазения момент на импулса.

Тук $v_r \equiv dr/dt$ е големината на лъчевата скорост, v_ϕ е големината на тангенциалната скорост, а $\omega \equiv d\phi/dt$ е ъгловата скорост. Дефинираме прицелния параметър b за траектория като $b = L/\sqrt{2E}$. В тази задача забавянето на времето се пренебрегва.

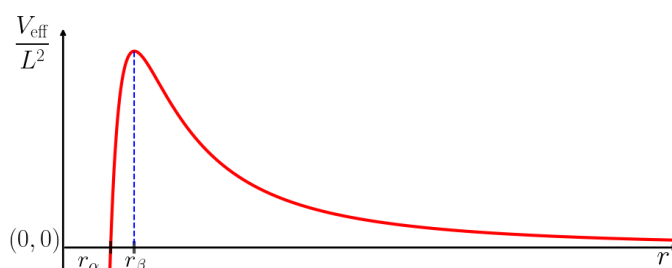
Още едно полезно уравнение се получава чрез диференциране на първото уравнение:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

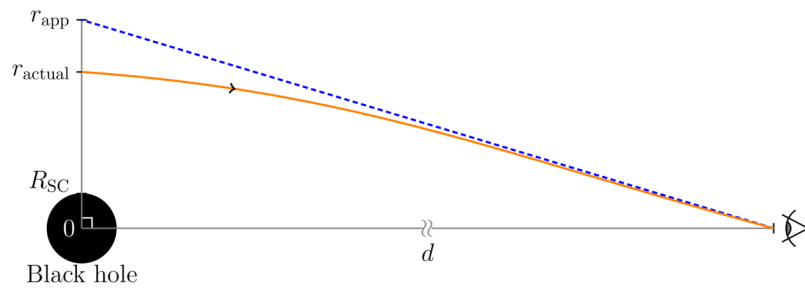
(T08.1) Около черната дупка могат да съществуват кръгови светлинни траектории. Намерете радиуса, r_{ph} , и прицелния параметър, b_{ph} , за такива фотонни траектории като функция на M и съответните константи. [4]

(T08.2) Изчислете времето, T_{ph} , необходимо за извършване на една пълна обиколка по кръговата траектория на светлината, в секунди. [2]

(T08.3) Уравнението за лъчевата скорост, дадено по-горе, може да бъде съпоставено с уравнение от вида $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$ за траектории на светлината. По-долу е дадена схематична графика на V_{eff}/L^2 като функция на r .



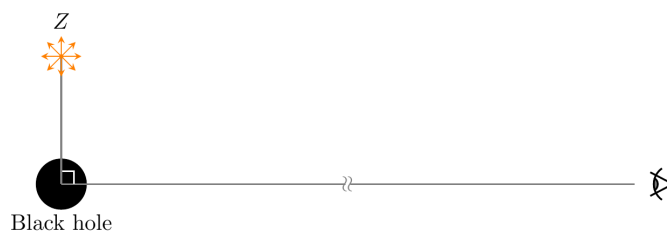
- (T08.3a) На графиката са показани два особени радиуса, r_α и r_β . Получете изрази за r_α и r_β като функция на M и съответните константи. [2]
- (T08.3b) Фотон, пътуващ навътре от акреционния диск към черната дупка, все още може да избяга до безкрайност в определени случаи. Намерете изрази за най-малката стойност на радиуса на точката на обръщане, r_t за такъв фотон, като функция на M и съответните константи. Намерете изрази за минималната стойност на прицелния параметър $b_{\min}$ за този фотон. [3]
- (T08.4) Лъч светлина, идващ от радиус r_{actual} от центъра на системата в равнината на небето, ще претърпи силно отклонение поради гравитацията на черната дупка и в крайна сметка ще достигне до наблюдател на голямо разстояние d от системата, както е показано по-долу.



За този наблюдател лъчът би изглеждал, сякаш идва от различна точка на разстояние $r_{\text{app}} \approx b$ от центъра на черната дупка в равнината на небето, където b е прицелният параметър за тази траектория на фотона. За точки от акреционния диск при $r = r_{\text{actual}}$ може да се приеме следната зависимост:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

- За далечен наблюдател като нас, гледащ отгоре върху акреционния диск, изображението на системата ще изглежда централно симетрично по равнината на небето. Определете най-външния видим радиус r_{outer} и най-вътрешния видим радиус r_{inner} на изображението, в единици au. [5]
- (T08.5) Разгледайте изолирана свръхмасивна черна дупка с маса $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$ и без акреционен диск. В точка Z на разстояние, например, $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ от черната дупка, става кратко и силно избухване с продължителност 5 s, както е показано на фигурата. При избухването в точка Z се излъчва светлина във всички посоки. Наблюдател в точка далеч от черната дупка (обозначен с око на фигурата по-долу) прави снимка с дълга експонация от 60 s на региона около черната дупка.



Изберете правилната опция за всяко от твърдения по-долу:

- (T08.5a) Броят на възможните пътища, по които светлината може да пътува от Z до наблюдателя, е [2]
 (A) Най-много един (B) Точно един (C) Точно два (D) Повече от два.
- (T08.5b) Броят на изображенията на ЕМ избухването в Z, които ще се видят на снимката с дълга експонация, е [2]
 (A) Най-много едно (B) Точно едно (C) Точно две (D) Повече от две.

(T09) Атмосферна разделителна способност

[35 точки]

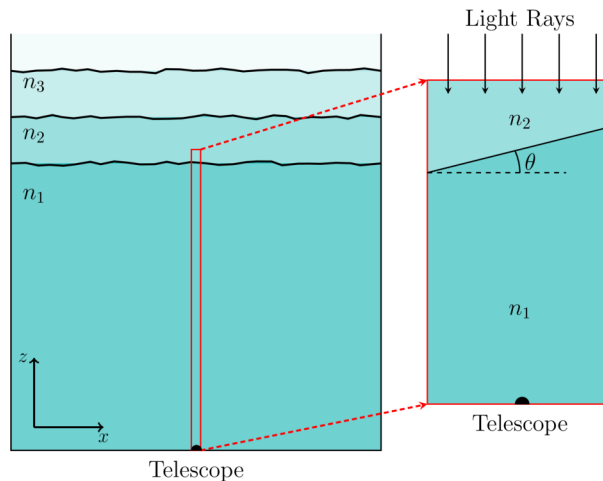
Телескоп с обектив, който представлява ахроматична изпъкнала леща с диаметър $D = 15$ cm и фокусно разстояние $f = 200$ cm е насочен към звезда в зенита.

- (T09.1) Намерете диаметъра, d_{image} , на изображението на точков източник, създадено от лещата на обектива в нейната фокална равнина, за зелена светлина ($\lambda = 550$ nm), като вземете предвид само ефектите, свързани с дифракция. [1]

Изображението на астрономически източник също се влияе от така наречената "атмосферна разделителна способност" (seeing).

Границите между слоевете в атмосферата, както и показателите на пречупване на слоевете, се променят непрекъснато поради турбуленция, температурни промени и други фактори. Това води до малки промени в позицията на изображението във фокалната равнина на телескопа, известни като "ефект на трептене". За останалата част от задачата, освен ограничения от дифракцията краен размер на изображението на звездата, обсъден по-горе, няма да се разглеждат никакви интерференчни ефекти.

Левият панел на фигурата по-долу показва вертикален разрез на атмосферата с множество слоеве с различни показатели на пречупване ($n_1, n_2, n_3, \dots$). Десният панел показва увеличен изглед към тънък вертикален сегмент от атмосферата и границата между двата най-ниски атмосферни слоя с показатели на пречупване n_1 и n_2 ($n_1 > n_2$). За тази задача разглеждаме само тези два слоя и тяхната граница. Диаграмите не са показани в мащаб.

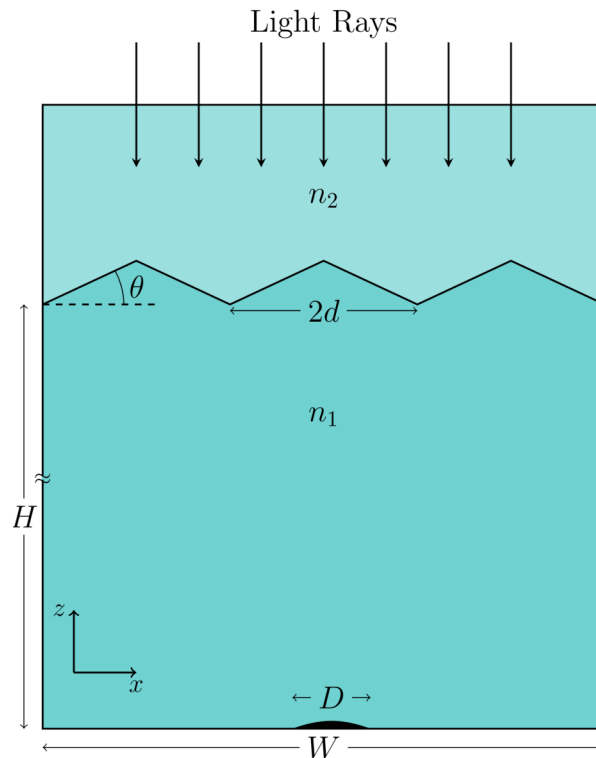


- (T09.2) Нека границата между двата слоя да бъде на височина $H = 1$ km, точно над телескопа и да има наклон $\theta = 30^\circ$ спрямо хоризонталата. Във всички части на задачата положителната посока в която ъгълът θ се измерва е обратно на часовниковата стрелка. За монохроматичен източник на светлина, $n_1 = 1.00027$ и $n_2 = 1.00026$. Нека ъгловото отместване в положението на изображението във фокалната равнина на телескопа за звезда в зенита бъде α .
- (T09.2a) Начертайте подходящо обозначена диаграма на границата между два слоя, на която е показан лъч и са означени n_1, n_2, θ и α . [2]
- (T09.2b) Получете израз за α чрез θ, n_1 и n_2 . Използвайте приближенията за малки ъгли: $\sin \alpha \approx \alpha$ и $\cos \alpha \approx 1$. [2]
- (T09.2c) Изчислете отместването, Δx_θ (в m), в положението на изображението, ако θ се увеличи с 1% (запазвайки n_1 и n_2 фиксирани). [3]
- (T09.2d) Изчислете отместването, Δx_n (в m), на положението на изображението, ако n_2 се увеличи с 0.0001% (запазвайки n_1 и θ фиксирани). [3]
- (T09.3) За бяла светлина, идваща от звезда в зенита, изберете кой ред най-точно описва формата и цвета на изображението, като отбележите с $\checkmark$ съответното квадратче (само едно) в листа за крайни за отговори. Отбелязваме, че x расте от ляво надясно на фигурата. [2]

	Цвят на изображението	Форма на изображението	Ляв край	Десен край
A	Бяло	Кръгло		
B	Бяло	Елиптично		
C	Цветно	Кръгло	Синьо	Червено
D	Цветно	Кръгло	Червено	Синьо
E	Цветно	Елиптично	Синьо	Червено
F	Цветно	Елиптично	Червено	Синьо

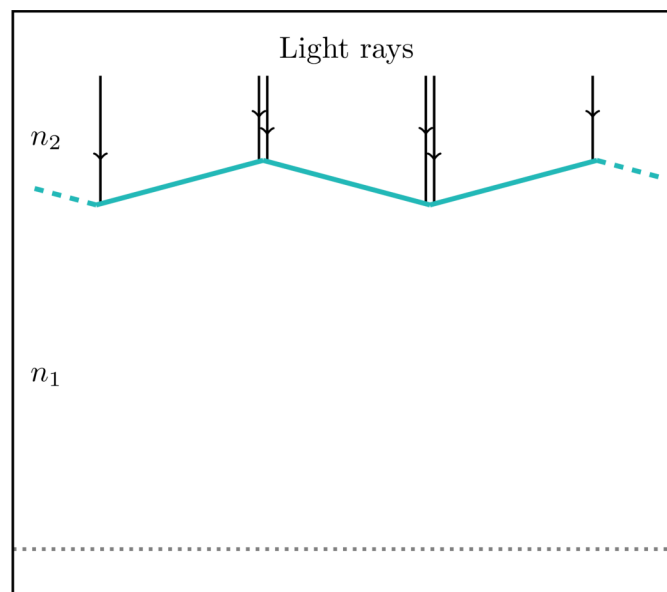
Във всички останали части на тази задача разглеждаме монохроматична жълта светлина с $\lambda = 550 \text{ nm}$. Моделираме границата между слоевете като набор от безкрайно много зигзагообразни равнини (перпендикулярни на равнината на страницата), разделени на разстояние $d = 10 \text{ cm}$ по x -оста, с ъгъл $\theta = 10^\circ$ или $\theta = -10^\circ$.

Фигурата по-долу (не е в мащаб) показва напречно сечение на този модел на атмосферата с ширина W ($W \ll H$). За телескопи с голяма апертура този зигзагообразен характер на границата води до формиране на петънца във фокалната равнина.



(T09.4) Разгледайте атмосфера, моделирана както е описано по-горе.

(T09.4a) Част от атмосферата с последователни зигзагообразни равнини, със същите параметри, както е посочено по-горе, е показана на диаграмата по-долу (не е в мащаб).



На тази диаграма, която е възпроизведена в листа за крайни отговори, начертайте пътищата на падащите светлинни лъчи до равнината, където е поставен обективът на телескопа, показана със сивата пунктирана линия.

Отбележете областта(ите), ако има такива, с "X" на диаграмата, където няма да достигат светлинни лъчи. [4]

(T09.4b) Изчислете ширината W_X на такава(ива) област(и). [3]

(T09.4c) Намерете най-големия диаметър, $D_{\max}$, на обектива на телескопа, с който ще бъде възможно да се получи единично изображение на звезда, чрез подходящ избор на местоположението на телескопа, съобразно структурата на границата. [4]

(T09.5) Разгледайте случая, когато зигзагообразната форма на границата се реализира както в посока x , така и в посока y , и $D = 100 \text{ cm}$ ($f = 200 \text{ cm}$). [6]

Нарисувайте качествено картината на получените петна в полето, дадено в листа за крайни отговори.

(T09.6) За турбулентна атмосфера отново разгледайте същата зигзагообразна форма на граничния слой само по x -посока, но сега ъгълът между двете равнини се променя с постоянен темп от 10° до -10° за 1.0 s . Приемете, че това води до равномерна скорост на изместване на позицията на изображението. [5]

Разгледайте телескоп с $D = 8 \text{ cm}$ и $f = 1 \text{ m}$. Оценете максималното време на експозиция $t_{\max}$, позволено за неговата CCD камера, така че да се получи само едно изображение, и всяко възможно отклонение в позицията му да остане по-малко от 1% от ограничения от дифракцията диаметър на изображението.

(T10) Нуклеосинтез след Големия взрив

[35 точки]

По време на епохата, в която ранната Вселена е била доминирана от лъчение, мащабният фактор на Вселената се е променял с времето $a \propto t^{1/2}$, където t е времето след Големия взрив. В началото на тази ера неутроните (n) и протоните (p) остават в термодинамично равновесие помежду си благодарение на слабото взаимодействие. Концентрацията (N) на свободните неутрони или протони е свързана с температурата T и съответните им маси m така, че

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

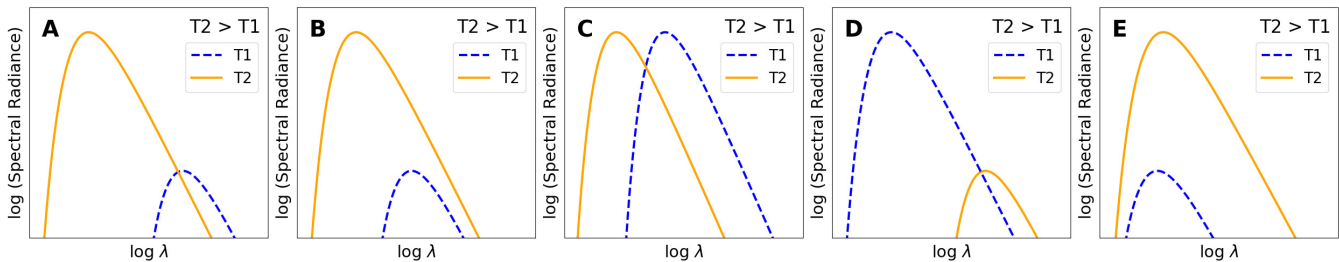
до момента $t_{\text{wk}} = 1.70 \text{ s}$, когато $k_B T_{\text{wk}} = 800 \text{ keV}$. След t_{wk} , слабото взаимодействие вече не може да поддържа такова равновесие и свободните неутрони се разпадат до протони с период на полуразпад от 610.4 s .

(T10.1) Нека концентрацията на протоните да бъде N_p , а тази на неутроните - N_n . Изчислете [4]
сътношението на плътността на неутроните $X_{n, wk} = N_n / (N_n + N_p)$ в момента t_{wk} .

(T10.2) Фотоните остават в термодинамично равновесие и запазват спектър на абсолютно черно тяло във всички епохи.

(T10.2a) Намерете индекса β , където $T(a) \propto a^\beta$. [2]

(T10.2b) Определете коя от следните графики показва правилното разпределение на [2]
спектралната плътност на потока за две различни температури T_1 и T_2 .
Отбележете с (✓) правилния отговор в листа за крайни отговори.



(T10.3) След момента t_{wk} , процесът на формиране на деутерий от протони и неутрони се описва от уравнението на Саха, изведено от индийския физик проф. Мегнад Саха, което може да бъде опростено до

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n) c^2}{k_B T} \right).$$

Тук съотношението на броя бариони към броя на фотоните η е 6.1×10^{-10} , а N_D е концентрацията на деутерия.

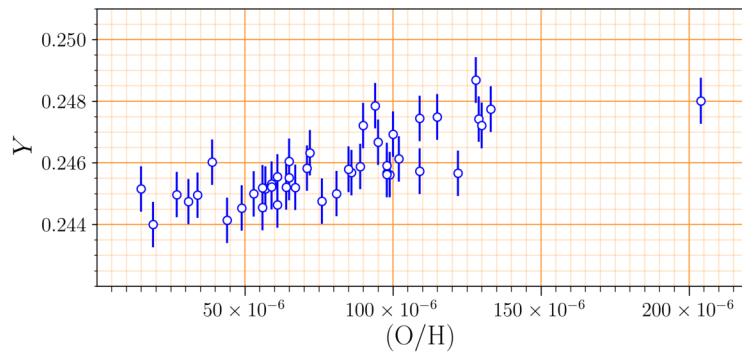
(T10.3a) Начертайте съотношението N_D/N_n на милиметровата мрежа в листа за крайни [5]
отговори, за поне 4 достатъчно различаващи се стойности на температурата,
попадащи в областта $k_B T = [60, 70]$ keV, и начертайте плавна крива,
преминаваща през тези точки.

(T10.3b) От графиката намерете $k_B T_{nuc}$ (в keV), за което $N_D = N_n$. [1]

(T10.3c) Сега приемете, че всички свободни неутрони се комбинират мигновено с [4]
протоните при $k_B T_{nuc}$, за да образуват деутерий, и всичият веднага се превръща
в хелий (^4He). Изчислете съответното време, t_{nuc} (в s), за образуването на хелий.

(T10.4) Изчислете стойността на $X_{n, nuc}$ непосредствено преди t_{nuc} . [5]

- (T10.5) Началното обилие на хелий, Y_{prim} , се дефинира като частта от общата маса във Вселената, която е под формата на хелий в момента T_{nuc} . Получете теоретична оценка за стойността на Y_{prim} . За целите само на това изчисление, приемете, че $m_p \approx m_n$ и че масата на хелия, $m_{\text{He}} \approx 4m_n$. [3]
- (T10.6) Началното обилие на хелий е много трудно за измерване, тъй като звездите непрекъснато превръщат водорода в хелий. Количеството преработено от звездите вещество в една галактика се характеризира с относителната концентрация на кислорода (който се произвежда само от звезди) спрямо водорода, означена като (O/H) , в галактиката. По-долу е представена компилация от измервания на (O/H) и обилието на хелий, Y , за различни галактики.



Използвайте тази графика (която е възпроизведена в листа за крайни отговори), за да отговорите на следните въпроси:

- (T10.6a) Оценете Y за синя компактна галактика джудже със стойност на $(\text{O}/\text{H}) = 1.75 \times 10^{-4}$. [2]
- (T10.6b) Получете стойността на $dY/d(\text{O}/\text{H})$ за горните данни. [2]
- (T10.6c) Оценете първичното обилие на хелий, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, въз основа на горните наблюдения. [2]
- (T10.7) Отклонението между Y_{prim} и $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ може да бъде коригирано чрез промяна на съотношението между бариони и фотони η . Когато η се намали, което е посочено с $\downarrow$ в листа за крайни за отговори, посочете увеличението ($\uparrow$) или намалението ($\downarrow$) в $N_{\text{D}}/N_{\text{n}}(T)$, T_{nuc} (когато $N_{\text{D}} = N_{\text{n}}$), t_{nuc} , $X_{\text{n, nuc}}$ и Y_{prim} в полетата, предоставени в листа за крайни отговори. [3]

(T11) Звездите в графики

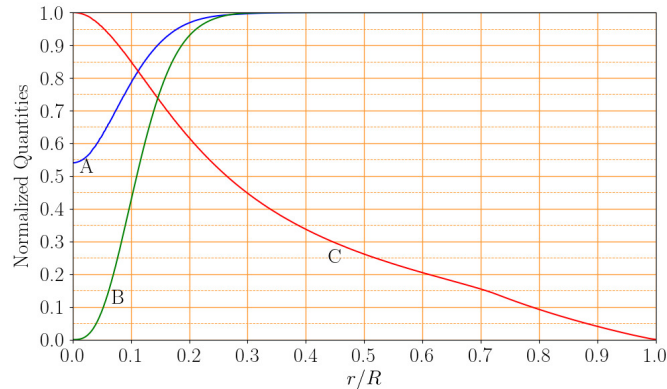
[50 точки]

Звездите в добро приближение са сферично симетрични обекти и следователно радиалното разстояние r от центъра може да бъде избрано като единствената независима променлива при моделирането на звездните недра. Масата, съдържаща се в сфера с радиус r , се обозначава с $m(r)$. Светимостта $l(r)$ се дефинира като общата енергия, протичаща навън през сферична повърхност с радиус r за единица време. Други важни величини, например плътността $\rho(r)$, температурата $T(r)$, масовата част на водорода $X(r)$, масовата част на хелия $Y(r)$ и ядрената енергия, генерирана за единица маса за единица време $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, също се приемат за функции на r . В тази задача ще пренебрегнем ефектите на дифузия и гравитационно утаяване на елементите вътре в звездата.

Съкращението "log" означава логаритъм с основа 10. Задачата се състои от три независими части.

(T11.1) **Вътре в звезда**

Графиката по-долу показва изменението на три структурни величини, А, В и С, като функция на относителния радиус r/R в звезден модел с маса $1 M_{\odot}$ и възраст 4 милиарда години, където R е фотосферният радиус на звездата. Стойностите на масовата част на хелия на повърхността, Y_s , и металичността (масова част на всички елементи, по-тежки от хелия) на повърхността, Z_s , на звездата са дадени от $(Y_s, Z_s) = (0.28, 0.02)$. Всички величини, показани в графиките, са нормализирани спрямо съответните им максимални стойности.



(T11.1a) Идентифицирайте трите величини А, В и С еднозначно измежду петте възможности: [6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Напишете А/В/С в полетата до съответните величини в листа за крайни отговори. Не е необходима обосновка за вашия отговор.)

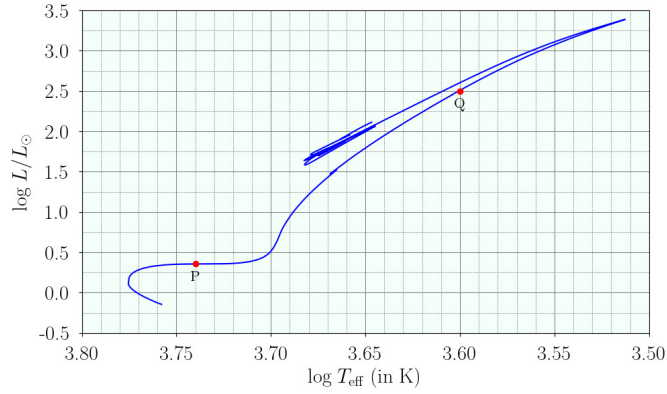
(T11.1b) Каква е масовата част на хелия в центъра, Y_c , на звездата? [3]

(T11.1c) Скицирайте останалите две величини от списъка (които не са идентифицирани като криви А, В или С), дадени в (T11.1a), като функции на r/R на същата графика в листа за крайни отговори и ги обозначете със съответните им означения. [5]

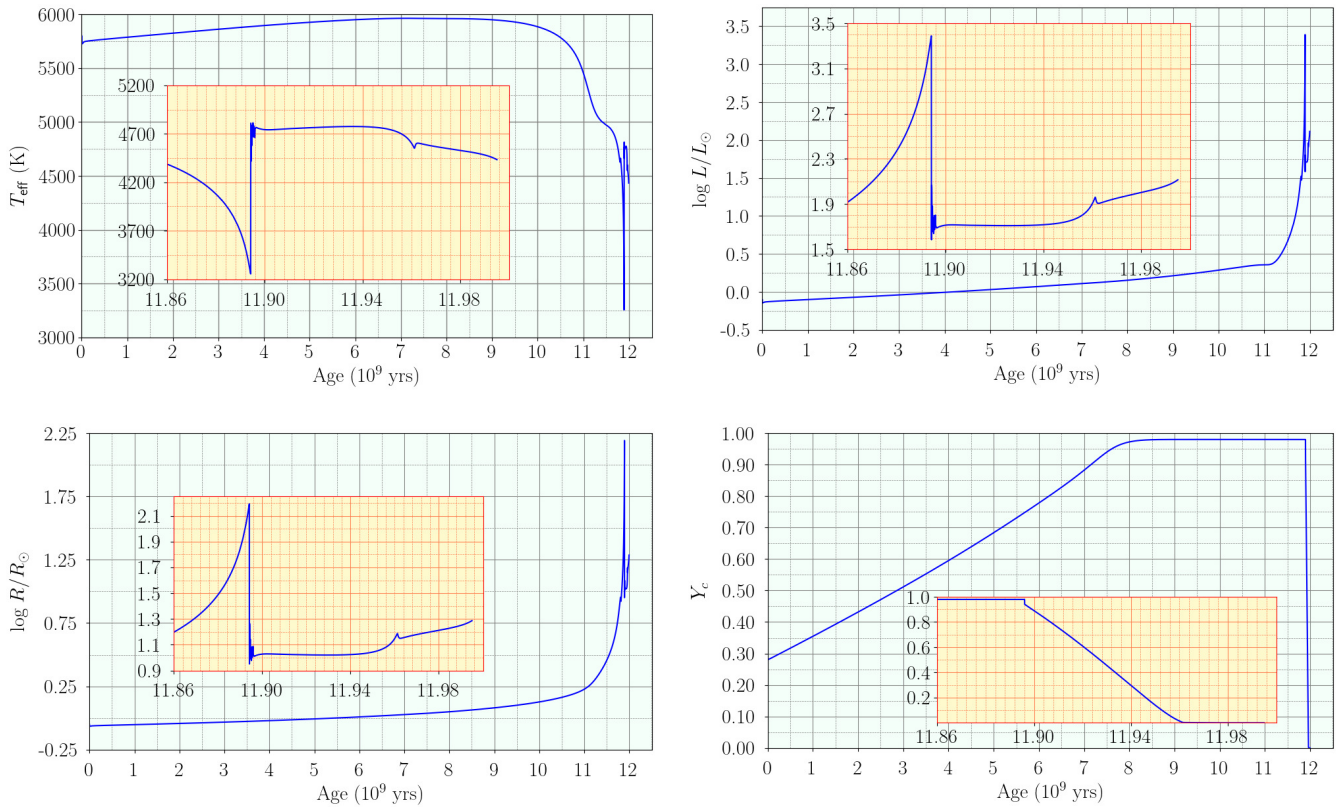
(T11.2) **Еволюиращи звезди**

Разгледайте еволюцията на звезда с маса $1 M_{\odot}$, чийто първоначален еднороден състав е даден чрез масовите дялове на хелий, $Y_0 = 0.28$, и метали, $Z_0 = 0.02$. Фигурите по-долу показват изменението на различни глобални параметри на тази звезда, докато тя еволюира от ZAMS (Главната последователност с нулева възраст) до края на хелиевото горене в нейното ядро.

Графиката по-долу показва еволюционния трек на звездата върху диаграмата на Херцшпрунг-Ръсел (графика на $\log L/L_{\odot}$ спрямо $\log T_{\text{eff}}$, където L е светимостта, а T_{eff} е ефективната температура).



Фигурата по-долу съдържа четири графики, които показват изменението на T_{eff} (в K), L (представена като $\log L/L_{\odot}$), R (представен като $\log R/R_{\odot}$) и Y_c с възрастта (в 10^9 yr) на същата звезда. Във всяка от тези четири графики, вложените изображения показват измененията на съответните параметри в детайли между възрасти от 11.86×10^9 години до 12.00×10^9 години, за по-голяма яснота.



Използвайте тези графики, за да отговорите на следващите въпроси.

- (T11.2a) Колко е приблизителното време за живот на главната последователност, t_{MS} (в [1] години), на звездата?
- (T11.2b) Каква е приблизителната продължителност, Δt_{He} (в години), за която звездата [1] изгаря хелия в ядрото си?
- (T11.2c) Каква част, f_{H} , от началния водород в центъра ѝ е изгоряла, когато светимостта на [3] звездата е $1 L_{\odot}$?
- (T11.2d) Какъв е радиусът на звездата, R_1 (в единици R), когато 60% от първоначалното [3] количество водород в центъра ѝ е изгоряло?

(T11.2e) Какви са радиусите на звездата, R_P и R_Q (в единици $R_\odot$), съответстващи на позициите P и Q , както са отбелязани на диаграмата на Херцшпрунг-Ръсел? [4]

(T11.3) **Разпределение на масата в звезда**

Уравнението, което описва разпределението на масата в звезда, се дава чрез израза

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Би било удобно да изразим това уравнение чрез три безразмерни променливи, а именно, относителната маса, q , относителния радиус, x , и относителната плътност, σ , които дефинираме като

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

където M и R са общата маса и радиус на звездата, съответно, и $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ е средната плътност на звездата. За конкретната звезда, която ще разглеждаме в тази част, е дадена следната информация:

- Централната плътност $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$
- Половината от масата на звездата се съдържа в рамките на вътрешните 25% от общия ѝ радиус, а 70% от масата ѝ се съдържа в рамките на вътрешните 35% от общия ѝ радиус.

Във всички следващи части на тази задача е достатъчно да закръглите всички получени числени коефициенти до 0,005.

(T11.3a) Запишете горното уравнение, описващо зависимостта на масата от радиуса, чрез x , $\frac{dq(x)}{dx}$ и $\sigma(x)$. [2]

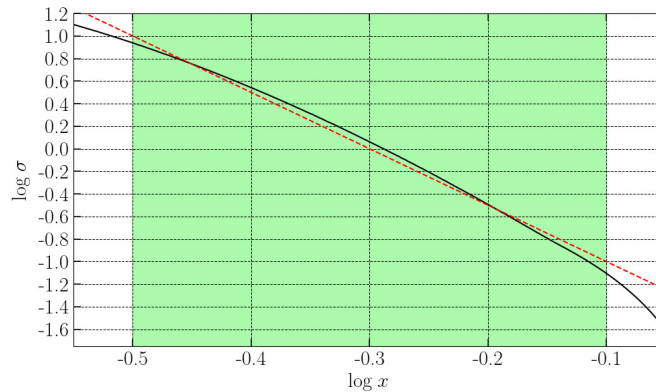
За да получим разпределението на масата спрямо радиуса, трябва да знаем профила на плътността вътре в звездата. За целите на тази задача ще опишем изменението на плътността спрямо радиуса чрез приближения в две области на x :

- вътрешната част на звездата: $0 \leq x \leq 0.32$
- средната част на звездата: $0.32 < x < 0.80$

Не правим никакво приближение за най-външната част, т.е. $0.80 \leq x \leq 1.00$.

(T11.3b) **Приближение за средната част:**

Изменението на $\log \sigma$ като функция на $\log x$ в средната част на звездата е показано (с черната крива) на графиката по-долу. Ще направим линейно приближение (показано като пунктирна червена линия на графиката) за $\log \sigma$ като функция на $\log x$ в областта $-0.5 < \log x < -0.1$, т.е. $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (показана със зелената засенчена област). Освен това, ще приближим наклона на тази линия до най-близкото цяло число.



Използвайте това приближение, за да запишете израз за $\sigma(x)$ като функция на x в областта $0.32 < x < 0.80$. [4]

(T11.3c) Използвайте резултата от (T11.3b), за да изведете израз за $q(x)$ в областта $0.32 < x < 0.80$. [6]

(T11.3d) **Приближение за вътрешната част:**

Във вътрешната част на звездата ($0 \leq x \leq 0.32$), плътността може да бъде приближена като линейна функция на радиуса, т.е. $\sigma(x) = Ax + B$, където A, B са константи. Определете A и B , и след това получите израз за $q(x)$ в областта $0 \leq x \leq 0.32$. Имайте предвид, че приближенията, приети в предишната част и в тази част, могат да доведат до малки прекъсвания в плътността или масата при $x = 0.32$. [8]

(T11.3e) Изразите за $q(x)$, получени в частите (T11.3c) и (T11.3d), са приближения, които описват много добре изменението на масата спрямо радиуса, но само в определени области на звездата. За областта $0.80 \leq x \leq 1$ (за която не сме извели никакъв израз), е възможно да се използва подходяща екстраполация от съседната област. Използвайте тези приблизителни изрази и дадените данни, за да скицирате плавна крива (без никакви прекъсвания нито в $q(x)$, нито в нейната производна) за $q(x)$ спрямо x за цялата звезда ($0 \leq x \leq 1$), която представя изменението на масата спрямо радиуса. [4]

(T12) Излъчване на Хокинг от черни дупки

[50 точки]

(T12.1) Черната дупка (ВН) обикновено се формира при гравитационен колапс на масивна звезда в края на жизнения ѝ цикъл до точка, наречена сингулярност. Поради екстремната гравитация на такъв обект, нищо, което навлезе в т.нар. хоризонт на събитията (сферична повърхност с $r = R_{SC}$, където r е разстоянието от сингулярността), не може да излезе от него. Тук R_{SC} се нарича радиус на Шварцшилд.

- (T12.1a) **Моделиране на произхода на излъчването на Хокинг:** Разгледайте двойка частици, всяка с маса m , образувани от двете страни на хоризонта на черната дупка. Едната частица е малко извън хоризонта при $r \approx R_{SC}$, докато другата частица е вътре в хоризонта като $r = \kappa R_{SC}$. Приемете, че общата енергия на частицата е сумата от енергията на покой mc^2 и гравитационната потенциална енергия, дължаща се на черната дупка.

Определете стойността на κ , за която двойката частици има нулева обща енергия. [4]

- (T12.1b) **Температура на черна дупка:** Ако частицата, произведена извън хоризонта в горния процес, има достатъчно голяма кинетична енергия, тя може да избяга от черната дупка. Този процес се нарича излъчване на Хокинг. Частицата вътре в хоризонта, която има отрицателна енергия, се поглъща и намаля масата на черната дупка.

Приемете, че цялото излъчване на Хокинг се състои от фотони с чернотелен спектър, с максимум на излъчването при дължина на вълната $\lambda_{bb} \approx 16R_{SC}$. Известно е, че за черна дупка с маса колкото Слънцето, $R_{SC, \odot} = 2.952$ км.

Получете израз за температурата, T_{bh} , на черната дупка, съответстваща на това чернотелно излъчване, изразена чрез нейната маса M_{bh} и физични константи. Изчислете радиуса на Шварцшилд, $R_{SC, 10\odot}$, и температурата, $T_{bh, 10\odot}$, за черна дупка с маса $10 M_{\odot}$. [4]

- (T12.1c) **Загуба на маса на черна дупка:** Приемете, че излъчването на Хокинг се излъчва от хоризонта на събитията.

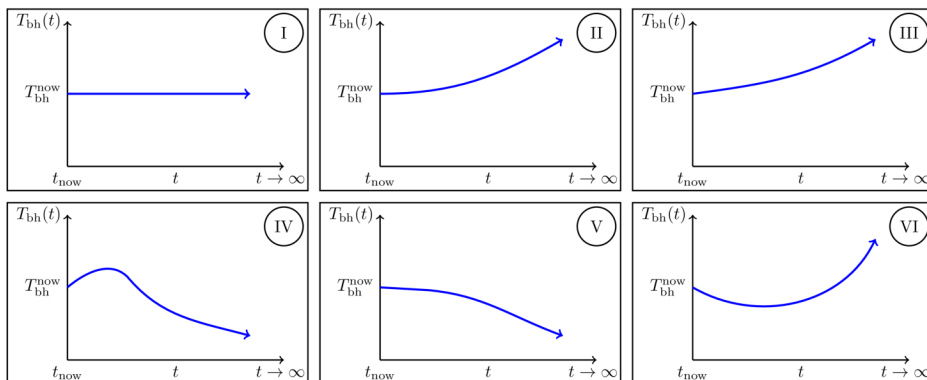
Използвайки еквивалентността на масата и енергията, получите израз за темпа на загуба на маса, $dM_{bh}(t)/dt$, като функция на масата $M_{bh}(t)$ на черната дупка и физически константи.

След това, получите израз за $M_{bh}(t)$ за черна дупка с начална маса M_0 . [8]
Начертайте схематично $M_{bh}(t)$ като функция на t от $M_{bh} = M_0$ до $M_{bh} = 0$.

- (T12.1d) **Живот на черна дупка:** Получете израз за продължителността на интервала от време τ_{BH} за който черна дупка с начална маса M_0 напълно се изпарява поради излъчването на Хокинг (като функция на M_0 и физични константи). Изчислете продължителността на живота $\tau_{bh, 10\odot}$ (в секунди) за черна дупка с $M_0 = 10 M_{\odot}$. [3]

- (T12.1e) **Черна дупка в лъчението на космическия микровълнов фон:** Разгледайте изолирана черна дупка в космоса, далеч от други тела, с настояща температура T_{bh}^{now} , заобиколена от космическия микровълнов фон (СМВ), чиято температура в момента е $T_{cmb}^{now} = 2.7$ К. Черната дупка може да увеличава масата си чрез поглъщане на лъчението от СМВ и да губи маса чрез излъчване на Хокинг.

Отчитайки ускоряващото се разширение на Вселената, определете коя от следните фигури показва дългосрочната еволюция на T_{bh} с времето в следните три случая: (X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Посочете вашия отговор, като отбележите съответното квадратче (само едно) за [6]
всеки случай X, Y или Z в Таблицата, дадена в Листа за крайни отговори.

(T12.2) Първични черни дупки (PBHs) с много по-малки маси могат да се формират в много ранната Вселена. Всички въпроси оттук нататък са свързани с тях. Тук всички процеси, които увеличават масата на черната дупка, могат да бъдат пренебрегнати.

(T12.2a) **Първични черни дупки, изпаряващи се в настоящата епоха:** Както може би сте забелязали от отговорите на предишните въпроси, на черните дупки със слънчева маса би им отнело много време, за да се изпарят. Въпреки това, тъй като PBH могат да имат много по-малка маса, може да сме в състояние да ги видим как се изпаряват в настоящето време.

Намерете началната маса $M_{0, \text{PBH}}$ (в kg), радиуса на Шварцшилд $R_{\text{SC, PBH}}$ (в m) и [4]
температурата T_{PBH} (в K) на черна дупка, която може да се изпарява в настоящата епоха, т.е. тези с продължителност на живота $\tau_{\text{PBH}} = 14$ милиарда години.

(T12.2b) **Формиране на PBH:** В доминираната от лъчение ранна Вселена мащабният фактор се променя с времето като $a(t) \sim t^{1/2}$. В тази епоха, PBH се формират поради колапса на цялата енергия, съдържаща се в регион с физически размер ct , където t е възрастта на Вселената в този момент.

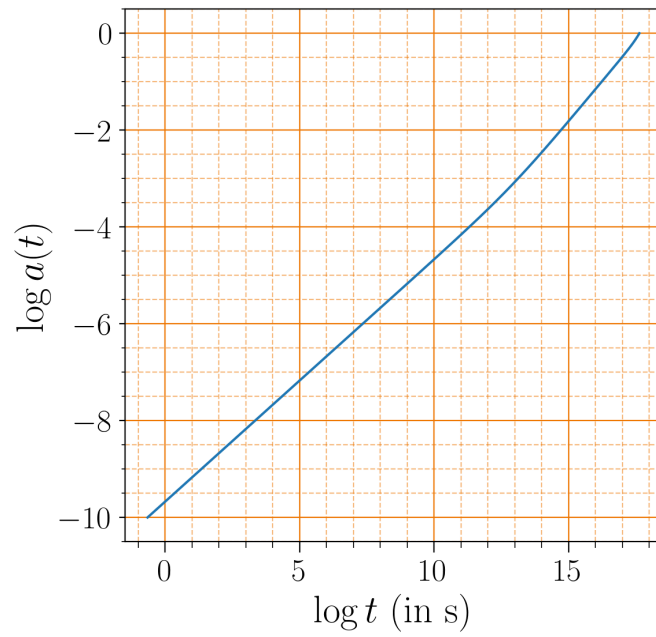
PBH с маса от 1×10^{12} kg се формира, когато възрастта на Вселената е около $1 \times$ [6]
 10^{-23} s. Изчислете възрастта на Вселената, t_{20} , в момента, когато се формира PBH с маса 1×10^{20} kg.

(T12.2c) **Наблюдаван спектър на излъчването на Хокинг от PBH:** Разгледайте първична черна дупка с начална маса 1×10^{10} kg, която напълно се изпарява в края на своя живот τ_{PBH} . За тази част приемете за простота, че по-голямата част от лъчението на Хокинг се излъчва именно тогава, с температура, съответстваща на дадената началната маса. Също така, приемете, че мащабният фактор на Вселената зависи от времето като $a(t) \sim t^{2/3}$.

Изчислете дължина на вълната на максимума на това излъчване на Хокинг, [5]
наблюдавано на Земята, λ_{earth} , в настоящата епоха (при $t = 14$ милиарда години).

(T12.2d) **Високоенергийно космическо излъчване от PBH:** Сега приемете, че излъчването на Хокинг, излъчено в даден момент t , съответства на фотони, имащи енергия $k_B T_{\text{bh}}(t)$. Също, най-високата възможна температура за черна дупка е температурата на Планк T_{Planck} , където $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

Еволюцията на мащабния фактор спрямо времето е показана на следващата фигура. Мащабният фактор в днешно време се приема за единица. $t(s)$ по времевата ос е възрастта на Вселената в секунди.



Ако фотон с енергия $E_{\text{det}} = 3.0 \times 10^{20}$ eV се наблюдава от Земята, определете [10]
най-голямата и най-малката възможна стойност на първоначалната маса на РВН
(M_0^{max} и M_0^{min} , съответно), която би могла да бъде източник на този фотон.