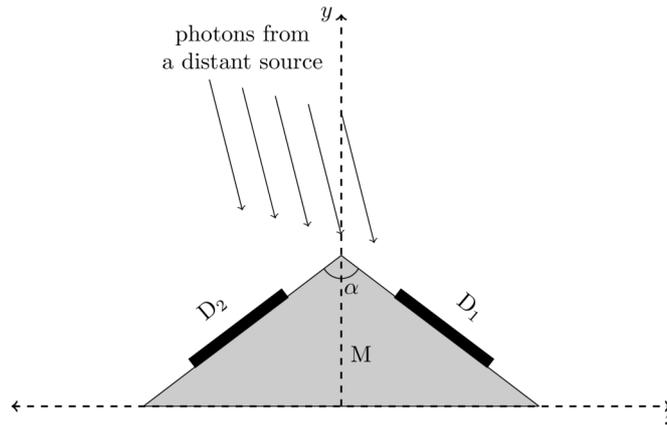


**(T01) Missão Daksha**

**[10 pontos]**

“Daksha” é uma proposta de missão indiana que consiste em dois satélites  $S_1$  e  $S_2$  orbitando a Terra na mesma órbita circular de raio  $r = 7000$  km, mas com diferença de fase de  $180^\circ$ . Esses satélites observam o universo nas bandas de alta energia (raios X e  $\gamma$ ). Cada um dos satélites da Daksha usa vários detectores planos e retangulares.

Para entender como localizar uma fonte no céu, usaremos um modelo simplificado da missão Daksha. Assuma que  $S_1$  possui apenas dois detectores idênticos  $D_1$  e  $D_2$ , cada um com área  $A = 0,50$  m<sup>2</sup>, anexados a um suporte opaco  $M$ , como mostrado na figura abaixo. Os detectores estão dispostos simetricamente em torno do eixo  $y$  em planos perpendiculares ao plano  $x-y$  e formam um ângulo  $\alpha = 120^\circ$  entre si.



(T01.1) Ao observar uma fonte distante localizada no plano  $x-y$ , o detector  $D_1$  registra uma potência  $P_1 = 2,70 \times 10^{-10}$  J s<sup>-1</sup> e o detector  $D_2$  registra uma potência  $P_2 = 4,70 \times 10^{-10}$  J s<sup>-1</sup>.

Estime o ângulo  $\eta$  que parte do eixo  $y$  até o vetor posição da fonte, contado positivo no sentido anti-horário. **[5]**

Considere um único pulso de uma fonte distante (não necessariamente no plano  $x-y$ ), registrado por ambos os satélites ( $S_1$  e  $S_2$ ) de Daksha. Os tempos dos picos dos pulsos registrados por  $S_1$  e  $S_2$  são  $t_1$  e  $t_2$ , respectivamente.

(T01.2) Se  $t_1 - t_2$  foi medido como  $10,0 \pm 0,1$  ms, então determine a fração  $f$  da esfera celeste onde a fonte pode estar localizada. **[5]**

**(T02) Makar-Sankranti**

**[10 pontos]**

O festival “Makar-Sankranti” é celebrado na Índia quando o Sol aparenta entrar em Capricórnio (Makar = Capricórnio, Sankranti = Entrada), quando visto da Terra. Atualmente, é celebrado por volta de 14 de janeiro todos os anos. Muitos anos atrás, este festival também coincidia com o Solstício de Inverno do hemisfério norte, que assumimos ocorrer em 21 de dezembro.

(T02.1) Com base nas informações acima, encontre o ano,  $y_c$  da última vez em que a celebração desse festival coincidiu com o Solstício de Inverno do hemisfério norte. **[3]**

(T02.2) Se o Sol pareceu entrar em Capricórnio em um horário local de 11 h 50 min 13 s em 14 de janeiro de 2006 em Mumbai, calcule a data,  $D_{\text{enter}}$ , e o horário local,  $t_{\text{enter}}$ , de sua entrada em Capricórnio no ano de 2013. **[3]**

(T02.3) O festival Makar-Sankranti é celebrado em um determinado local no dia do primeiro pôr do sol em Capricórnio. Você pode assumir que o horário local do pôr do sol em Mumbai em janeiro é 18 h 30 min 00 s.

Indique a data de celebração do festival em cada ano entre 2006 e 2013 (marcando (✓) nos respectivos espaços fornecidos na Folha de Respostas Resumidas). **[4]**

**(T03) Ondas Gravitacionais**

**[15 pontos]**

Sistemas binários de buracos negros geram ondas gravitacionais. Considere dois buracos negros, em nossa Galáxia, com massas  $M = 36 M_{\odot}$  e  $m = 29 M_{\odot}$ , girando em órbitas circulares com frequência angular orbital  $\omega$  em torno de seu centro de massa.

(T03.1) Assumindo a formulação Newtoniana para a gravidade, deduza uma expressão para a frequência angular,  $\omega_{ini}$ , das órbitas dos buracos negros em um instante,  $t_{ini}$ , quando a separação entre eles era 4,0 vezes a soma de seus raios de Schwarzschild, em termos apenas de  $M$ ,  $m$ , e constantes físicas.

Calcule o valor de  $\omega_{ini}$  (em  $\text{rad s}^{-1}$ ).

**[5]**

(T03.2) Na relatividade geral, buracos negros em órbita emitem ondas gravitacionais com frequência  $f_{GW}$ , tal que  $2\pi f_{GW} = \omega_{GW} = 2\omega$ . Isso encolhe as órbitas dos buracos negros, o que, por sua vez, aumenta  $f_{GW}$ . A taxa de variação de  $f_{GW}$  é

$$\frac{df_{GW}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{GW}^{\delta/3},$$

onde  $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$  é chamada de “massa chirp”; em português, “massa de chilro”.

Encontre os valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ .

**[4]**

(T03.3) Assuma que as ondas gravitacionais associadas ao evento foram detectadas pela primeira vez no instante  $t_{ini} = 0$ .

Deduza uma expressão do tempo observado para fusão dos buracos negros,  $t_{\text{merge}}$ , quando  $f_{GW}$  se torna muito grande, em termos de  $\omega_{ini}$ ,  $M_{\text{chirp}}$  e apenas constantes físicas.

Calcule o valor de  $t_{\text{merge}}$  (em segundos).

**(T04) Decremento de Balmer**

**[15 pontos]**

Considere uma estrela de sequência principal cercada por uma nebulosa. A magnitude observada na banda V desta estrela é 11,315 mag. A região ionizada da nebulosa próxima à estrela emite as linhas  $H\alpha$  e  $H\beta$ ; seus comprimentos de onda são  $0,6563 \mu\text{m}$  e  $0,4861 \mu\text{m}$ , respectivamente. A razão teoricamente prevista dos fluxos nas linhas  $H\alpha$  para  $H\beta$  é  $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2,86$ . No entanto, quando essa radiação passa pela porção externa da nebulosa fria e empoeirada, os fluxos de emissão observados das linhas  $H\alpha$  e  $H\beta$  são  $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$  e  $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ , respectivamente.

A extinção  $A_{\lambda}$  é uma função do comprimento de onda e é expressa como

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Aqui,  $\kappa(\lambda)$  é a curva de extinção e  $E(B - V)$  denota o excesso de cor nas bandas de filtro B e V. A curva de extinção (com  $\lambda$  em  $\mu\text{m}$ ) é dada como segue.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2,659 \times \left(-1,857 + \frac{1,040}{\lambda}\right) + R_V, & 0,63 \leq \lambda \leq 2,20 \\ 2,659 \times \left(-2,156 + \frac{1,509}{\lambda} - \frac{0,198}{\lambda^2} + \frac{0,011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0,12 \leq \lambda < 0,63 \end{cases}$$

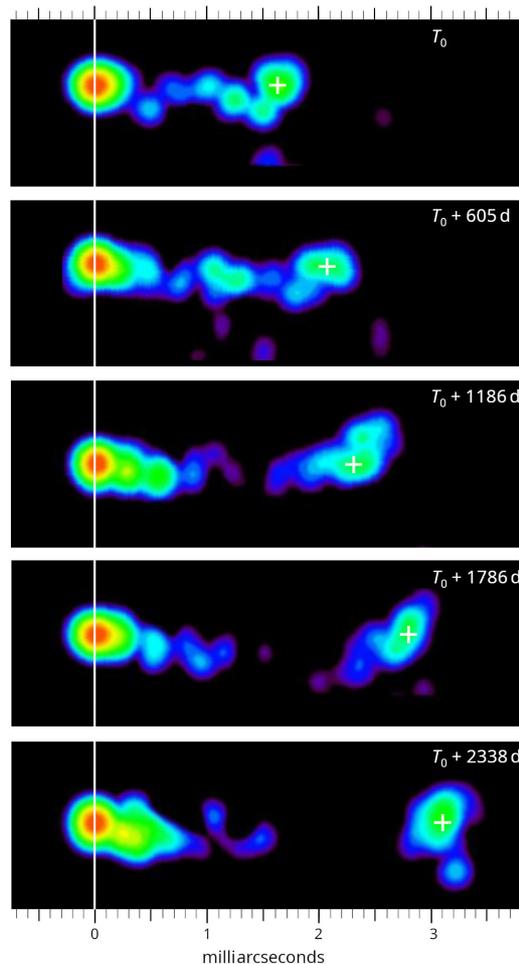
onde  $R_V = A_V/E(B - V) = 3,1$  é a razão entre extinção total e extinção seletiva.

- (T04.1) Encontre os valores de  $\kappa(H\alpha)$  e  $\kappa(H\beta)$ . [3]
- (T04.2) Encontre o valor da razão entre os excessos de cor  $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(B - V)}$ . [4]
- (T04.3) Estime as extinções devido à nebulosa,  $A_{H\alpha}$  e  $A_{H\beta}$ , nos comprimentos de onda  $H\alpha$  e  $H\beta$ , respectivamente. [6]
- (T04.4) Estime a extinção da nebulosa ( $A_V$ ) e a magnitude aparente da estrela na banda V,  $m_{V0}$ , na ausência da nebulosa. [2]

**(T05) Quasares**

**[20 pontos]**

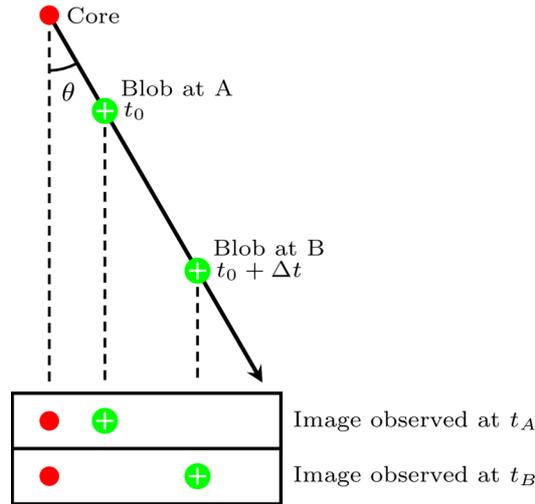
Um quasar é o núcleo de uma galáxia ativa extremamente luminosa, alimentado por um buraco negro supermassivo, que emite jatos relativísticos. A figura mostra uma série de imagens em rádio de um quasar (com desvio para o vermelho  $z = 0,53$  e distância de luminosidade  $D_L = 1,00 \times 10^{10}$  anos-luz), em diferentes instantes. O “núcleo” alinha-se com a linha branca vertical, enquanto um jato, consistindo de uma “bolha” (marcada com + branco) se afasta dele ao longo do tempo. Cada painel mostra o tempo de observação (começando com  $T_0$  para a primeira imagem), e a escala angular é indicada tanto acima quanto abaixo da figura.



- (T05.1) Determine a separação angular da “bolha”,  $\phi_{\text{blob}}$  (em milissegundos de arco), e sua distância transversal,  $l_{\text{blob}}$  (em anos-luz), ambos em relação ao núcleo do quasar, para cada observação. Em seguida, calcule a fração  $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$  associada à velocidade aparente da “bolha” na direção transversal ( $v_{\text{app}}$ ), para cada par de observações consecutivas. Por fim, calcule a fração associada à velocidade aparente média  $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$  para o período observado. [5]

O jato do quasar se move a uma velocidade relativística  $v \equiv \beta c$ , mas não necessariamente no plano do céu; por exemplo, ele faz um ângulo  $\theta$  (o “ângulo de visada”) em relação à linha de visada de um observador distante (indicado pelas linhas tracejadas), como mostrado na figura abaixo.

Para esta e todas as partes subsequentes, ignore o desvio para o vermelho do quasar e efeitos relativísticos.



- (T05.2) A luz emitida pela “bolha” em dois instantes diferentes  $t_0$  (correspondente à posição A) e  $t_0 + \Delta t$  (correspondente à posição B) chega ao observador em  $t_A$  e  $t_B$ , respectivamente. Assim, a diferença de tempo observada é  $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$ .

- (T05.2a) Encontre uma expressão para a razão  $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$  em termos de  $\beta$  e  $\theta$ . [2]

- (T05.2b) Usando essa razão, expresse  $\beta_{\text{app}}$  em termos de  $\beta$  e  $\theta$ . [2]

- (T05.3) O movimento é chamado de superluminal se a velocidade aparente exceder a da luz ( $\beta_{\text{app}} > 1$ ), e subluminal se não exceder ( $\beta_{\text{app}} < 1$ ).

- (T05.3a) Para  $\beta_{\text{app}} = 1$ , trace uma curva suave de  $\beta$  como uma função de  $\theta$  para marcar a fronteira entre movimentos subluminais e superluminais. Destaque a região superluminal no gráfico com um padrão de linhas inclinadas (///). [4]

- (T05.3b) Encontre a menor velocidade verdadeira do jato ( $\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$ ) para que o movimento superluminal ocorra, e encontre o ângulo de visada correspondente  $\theta_{\text{low}}$ . [2]

- (T05.4) Encontre uma expressão para o ângulo de visada máximo,  $\theta_{\text{max}}$ , para o qual um dado valor fixo  $\beta_{\text{app}}$  seja possível. [2]

O núcleo de um quasar, seu centro compacto, exibe variabilidade de emissão devido a uma conexão de processos internos com causalidade, que ocorrem dentro de uma região. O tamanho (= raio) dessa região é tipicamente considerado cerca de cinco vezes o raio de Schwarzschild do núcleo.

- (T05.5) Verifica-se que o núcleo de um certo quasar varia em escalas de tempo de cerca de 1 h. Obtenha um limite superior,  $M_{c, \text{max}}$ , da massa do objeto compacto central, em unidades de massa solar. [3]

**(T06) Rotação Galáctica**

**[20 pontos]**

A curva de rotação da nossa Galáxia é determinada usando medições de velocidades ao longo da linha de visada de nuvens de hidrogênio neutro (HI) para várias longitudes galácticas, observadas através da linha de 21 cm de HI. Considere uma nuvem de HI com longitude galáctica  $l$ , localizada a uma distância  $R$  do Centro Galáctico (CG) e a uma distância  $D$  do Sol. Considere o Sol a uma distância  $R_0 = 8,5$  kpc do CG. Assuma que tanto o Sol quanto a nuvem de HI estão em órbitas circulares ao redor do CG no plano Galáctico, com velocidades angulares  $\Omega_0$  e  $\Omega$ , e velocidades rotacionais  $V_0$  e  $V$ , respectivamente.

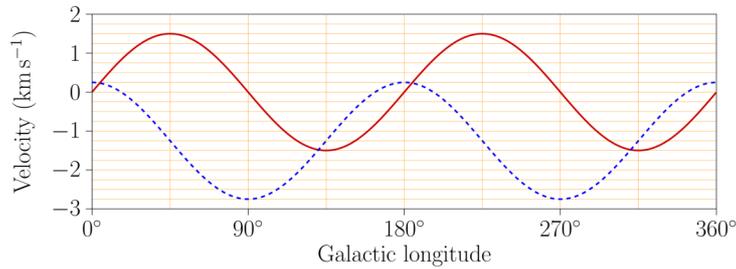
As componentes de velocidade radial ( $V_r$ ) e transversal ( $V_t$ ) da nuvem, conforme observadas do Sol, podem ser expressas como

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Visto do Polo Norte Galáctico, a rotação galáctica é no sentido horário. Ao longo deste problema, consideraremos a velocidade na linha de visada como positiva quando em afastamento, e as nuvens serão tratadas como objetos pontuais.

- (T06.1) No gráfico fornecido na Folha de Respostas Resumidas, esboce  $V_r$  como uma função de  $D$ , desde  $D = 0$  até  $D = 2R_0$ , para duas linhas de visada definidas por (i)  $l = 45^\circ$  e (ii)  $l = 135^\circ$ . Identifique cada uma de suas curvas com o valor de  $l$ . **[5]**
- (T06.2) O gráfico abaixo mostra os componentes de velocidade radial média (curva sólida, vermelha) e transversal (curva tracejada, azul) das estrelas a uma distância de 100 pc do Sol, plotados em função da longitude Galáctica.



Usando o gráfico, estime o período orbital do Sol ( $P$ ) ao redor do GC, em milhões de anos (Myr). **[3]**

- (T06.3) Jan Oort observou que, na vizinhança solar ( $D \ll R_0$ ), a diferença  $(\Omega - \Omega_0)$  nas velocidades angulares será pequena e, portanto, determinou a seguinte aproximação de primeira ordem para os componentes de velocidades na linha de visada e transversal:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

onde  $A$  e  $B$  são conhecidos como constantes de Oort.

Vamos considerar dois casos:

(I) a curva de rotação real da galáxia, e

(II) a curva de rotação para um cenário hipotético onde a galáxia não apresenta matéria escura e toda sua massa é concentrada em seu centro.

- (T06.3a) Deduza expressões para a variação da velocidade de rotação em função da distância radial, na vizinhança do Sol,  $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ , para ambos os casos. **[2]**

- (T06.3b) Expresse  $A$  e  $B$  em termos de  $V_0$ ,  $R_0$ , e a variação da velocidade de rotação,  $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ . **[8]**

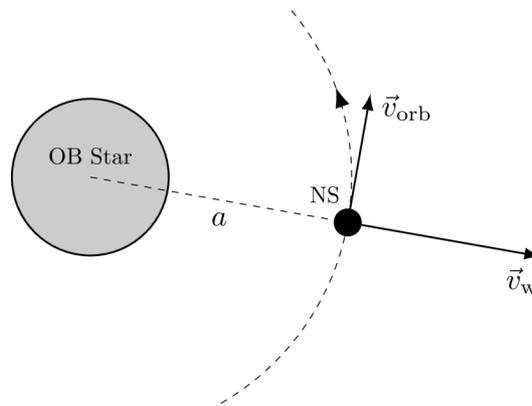
- (T06.3c) A razão ( $A/B$ ) das constantes de Oort para os dois casos dados, (I) e (II), são definidas [2] como  $F_I$  e  $F_{II}$ , respectivamente. Determine  $F_I$  e  $F_{II}$ .

**(T07) Binário com Estrela de Nêutrons**

[20 pontos]

Em um sistema binário envolvendo uma estrela compacta, se a estrela companheira não ultrapassa o limite de Roche, então a principal fonte de acreção para a estrela compacta é o vento estelar da estrela companheira. Esta acreção alimentada por vento estelar é especialmente significativa em sistemas compostos por uma gigante azul (como uma estrela O ou B, indicada doravante como uma estrela OB) juntamente a um objeto compacto, como uma estrela de nêutrons (NS), em uma órbita próxima.

Considere tal sistema binário, NS-estrela OB, onde uma estrela de nêutrons de massa  $M_{NS} = 2,0 M_{\odot}$  e raio  $R_{NS} = 11 \text{ km}$  está orbitando em uma órbita circular de raio  $a$  ao redor do centro da estrela OB com velocidade  $v_{orb} = 1,5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$  (veja a figura abaixo). Ao longo deste problema, a perda de massa da estrela OB é assumida como isotrópica e à taxa  $\dot{M}_{OB} = 1,0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ .



- (T07.1) O raio de acreção,  $R_{acc}$ , é definido como a distância máxima da NS na qual o vento estelar pode ser capturado por ela. Se a velocidade do vento estelar na distância orbital da NS é  $v_w = 3,0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ , encontre  $R_{acc}$  para o sistema acima, em km, usando o cálculo padrão de velocidade de escape. [3]
- (T07.2) Supondo que todo o material capturado do vento estelar seja acrecido pela NS, estime sua taxa de acreção de massa,  $\dot{M}_{acc}$ , em unidades de  $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ , se  $a = 0,5 \text{ au}$ . Desconsidere os efeitos da pressão de radiação e do tempo de resfriamento do gás acrecido. [3]
- (T07.3) Agora considere a situação em que a velocidade do vento estelar na distância orbital  $a$  (próxima à NS) torna-se comparável à velocidade orbital da NS. A taxa de acreção de massa do vento estelar sobre a NS, neste caso, seria dada por uma expressão da forma  $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$ , onde  $q = M_{NS}/M_{OB}$  é a razão de massa do binário e  $\beta$  é o ângulo, no referencial da NS, entre a direção da velocidade do vento e a direção oposta à estrela OB. Obtenha a expressão para  $f(\tan \beta, q)$  assumindo  $M_{OB} \gg M_{NS}$ . [6]
- (T07.4) Considere que a matéria totalmente ionizada é acretada radialmente e contida devido ao forte campo magnético  $\vec{B}$  da NS. Este efeito pode ser modelado como uma pressão, dada por  $\frac{B^2}{2\mu_0}$ . Vamos assumir que a NS tem um campo magnético de dipolo cuja magnitude no plano equatorial varia com a distância  $r$  da NS para  $r \gg R_{NS}$  como

$$B(r) = B_0 \left( \frac{R_{NS}}{r} \right)^3$$

onde  $B_0$  é o campo magnético no equador da NS. Assuma que o eixo do dipolo magnético está alinhado com o eixo de rotação da NS.

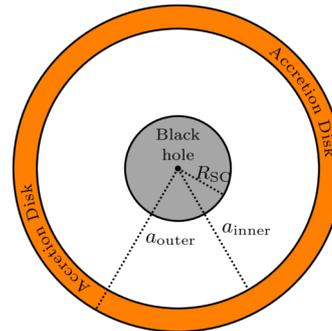
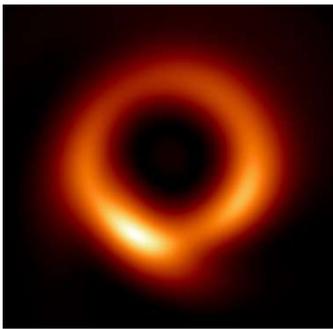
- (T07.4a) Obtenha a pressão magnética,  $P_{\text{eq, mag}}$ , no plano equatorial em termos de  $B_0$ ,  $R_{\text{NS}}$ ,  $r$ , e [1]  
outras constantes adequadas.
- (T07.4b) A distância máxima onde o fluxo de acreção é interrompido pelo campo magnético no equador é chamada de raio magnetosférico  $R_m$ . Este fluxo de matéria exercerá uma pressão devido ao movimento relativo entre o vento estelar e a NS. Obtenha uma expressão aproximada para o campo magnético crítico  $B_{0, c}$ , para o qual  $R_m$  coincide com  $R_{\text{acc}}$ , e calcule seu valor em Tesla. Efeitos magnéticos são negligenciados para  $r > R_m$  e considere  $v_w \gg v_{\text{orb}}$ . [7]

**(T08) Sombra de um buraco negro**

[20 pontos]

O "Event Horizon Telescope" (EHT) divulgou uma imagem do buraco negro supermassivo no centro da galáxia M87, como mostrado no lado esquerdo da figura abaixo.

Para entender algumas características dessa imagem, consideraremos um modelo simplificado de um buraco negro não rotativo, estático e isotrópico  $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$ , rodeado por um disco de acreção plano, fino e sem massa, com raios interno e externo,  $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$  e  $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$ , respectivamente, onde  $R_{\text{SC}}$  é o raio de Schwarzschild. Um esboço visto de cima é mostrado no lado direito da figura abaixo (fora de escala).



Assumimos que o disco de acreção é a única fonte de luz a ser considerada. Cada ponto no disco emite luz em todas as direções. Essa luz viaja sob a influência do campo gravitacional do buraco negro. A trajetória dos raios de luz é governada pelas duas equações dadas abaixo (que são semelhantes às de um objeto ao redor do Sol):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

onde  $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$  é a coordenada radial,  $\phi \in [0, 2\pi)$  é o ângulo azimutal, e  $E$  e  $L$  são constantes relacionadas à conservação de energia e momento angular, respectivamente.

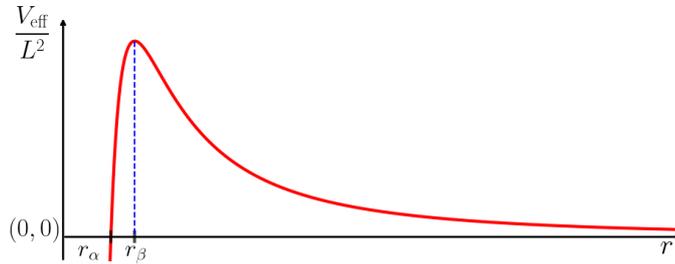
Aqui  $v_r \equiv dr/dt$  é a magnitude da velocidade radial,  $v_\phi$  é a magnitude da velocidade tangencial, e  $\omega \equiv d\phi/dt$  é a velocidade angular. Definimos o parâmetro de impacto  $b$  de uma trajetória como  $b = L/\sqrt{2E}$ . A dilatação do tempo é negligenciada neste problema.

Outra equação útil é obtida diferenciando a primeira equação:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

- (T08.1) Trajetórias circulares de fótons podem existir ao redor do buraco negro. Encontre o raio,  $r_{\text{ph}}$ , e o parâmetro de impacto,  $b_{\text{ph}}$ , para tais trajetórias de fótons, em termos de  $M$  e constantes relevantes. [4]
- (T08.2) Calcule o tempo,  $T_{\text{ph}}$ , em segundos, necessário para um fóton completar uma órbita de sua trajetória circular. [2]

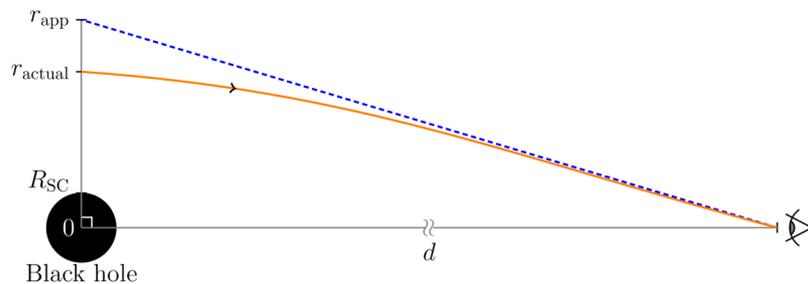
(T08.3) A equação de velocidade radial, fornecida anteriormente (primeira equação nessa questão), pode ser comparada com uma equação da forma  $\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$  para trajetórias de fótons. Um gráfico esquemático de  $V_{\text{eff}}/L^2$  em função de  $r$  é dado abaixo.



(T08.3a) O gráfico indica duas distâncias especiais,  $r_\alpha$  e  $r_\beta$ . Obtenha expressões para  $r_\alpha$  e  $r_\beta$ , em termos de  $M$  e constantes relevantes. [2]

(T08.3b) Um fóton viajando para dentro, a partir do disco de acreção em direção ao buraco negro, ainda pode escapar para o infinito em alguns casos. Determine a menor distância a partir da qual não é mais possível o retorno,  $r_t$ , em termos de  $M$  e constantes relevantes. Determine o valor mínimo do parâmetro de impacto,  $b_{\text{min}}$  para este fóton. [3]

(T08.4) Considere um raio de luz que parte do plano do céu, e seja  $r_{\text{actual}}$  a distância real entre sua trajetória e o centro do buraco negro. Esse raio sofrerá uma forte curvatura devido à gravidade do buraco negro e, eventualmente, alcançará um observador (denotado por um olho) a uma grande distância  $d$  do sistema, como mostrado abaixo.



Para este observador, o raio aparenta surgir num ponto diferente do plano, a uma distância  $r_{\text{app}} \approx b$  do centro do buraco negro, onde  $b$  é o parâmetro de impacto. Para pontos no disco de acreção em  $r = r_{\text{actual}}$ , pode-se assumir a seguinte relação:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

Para observadores distantes, como nós, com uma visão frontal do disco de acreção, a imagem do sistema parecerá ser simetricamente circular no plano do céu. Determine o raio aparente mais externo,  $r_{\text{outer}}$ , e o raio aparente mais interno,  $r_{\text{inner}}$ , da imagem em unidades de  $a_u$ . [5]

(T08.5) Considere um buraco negro supermassivo isolado, de massa  $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$ , sem nenhum disco de acreção. Um breve e forte surto ("burst") de radiação eletromagnética ocorre por 5 s em um ponto Z a uma distância  $r_Z = 6R_{\text{SC}}$  do buraco negro, como mostra a figura. O surto no ponto Z emite luz em todas as direções. Um observador em um ponto distante do buraco negro (denotado por um olho) obtém uma imagem de longa exposição da vizinhança do buraco negro por 60 s.



Escolha a opção correta para cada uma das afirmações abaixo:

- (T08.5a) O número de caminhos possíveis para a luz viajar de Z até o observador é [2]  
 (A) No máximo um (B) Exatamente um (C) Exatamente dois (D) Maior que dois.
- (T08.5b) O número de imagens do surto eletromagnético em Z que serão vistas na imagem de longa exposição é [2]  
 (A) No máximo uma (B) Exatamente uma (C) Exatamente duas (D) Mais de duas.

**(T09) Seeing Atmosférico**

**[35 pontos]**

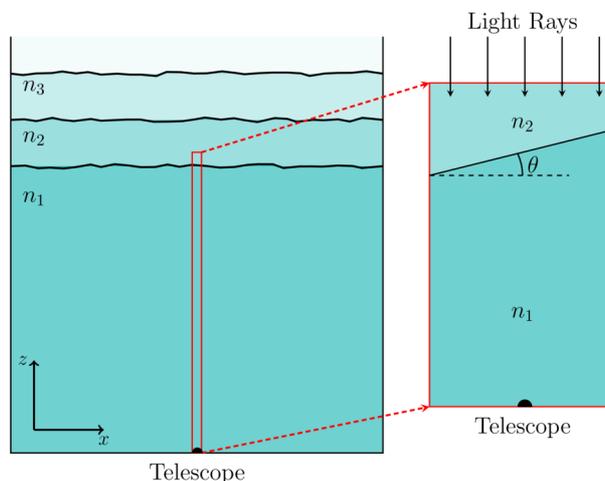
Um telescópio com uma lente objetiva convexa acromática de diâmetro  $D = 15$  cm e distância focal  $f = 200$  cm está apontado para uma estrela no zênite.

- (T09.1) Encontre o diâmetro (em m),  $d_{\text{image}}$ , da imagem de uma fonte pontual produzida pela lente objetiva em seu plano focal, para luz verde ( $\lambda = 550$  nm), considerando apenas os efeitos da difração. [1]

A imagem de uma fonte astronômica também é afetada pelo chamado “seeing atmosférico”.

Os limites entre as camadas na atmosfera, bem como os índices de refração das camadas, mudam continuamente devido à turbulência, variação de temperatura, entre outros fatores. Isso leva a pequenas mudanças na posição da imagem no plano focal do telescópio, conhecido como o “efeito de cintilação”. Para o restante do problema, além de usar o tamanho aparente da estrela limitado pela difração (como usado acima), nenhum outro efeito de interferência será considerado.

Na figura abaixo, a imagem à esquerda mostra uma seção transversal vertical da atmosfera com múltiplas camadas de diferentes índices de refração ( $n_1, n_2, n_3, \dots$ ). A imagem à direita mostra a visão ampliada de um segmento vertical fino da atmosfera e a fronteira entre as duas camadas atmosféricas mais baixas de índices de refração  $n_1$  e  $n_2$  ( $n_1 > n_2$ ). Para este problema, consideramos apenas essas duas camadas e sua fronteira. Os diagramas não estão em escala.

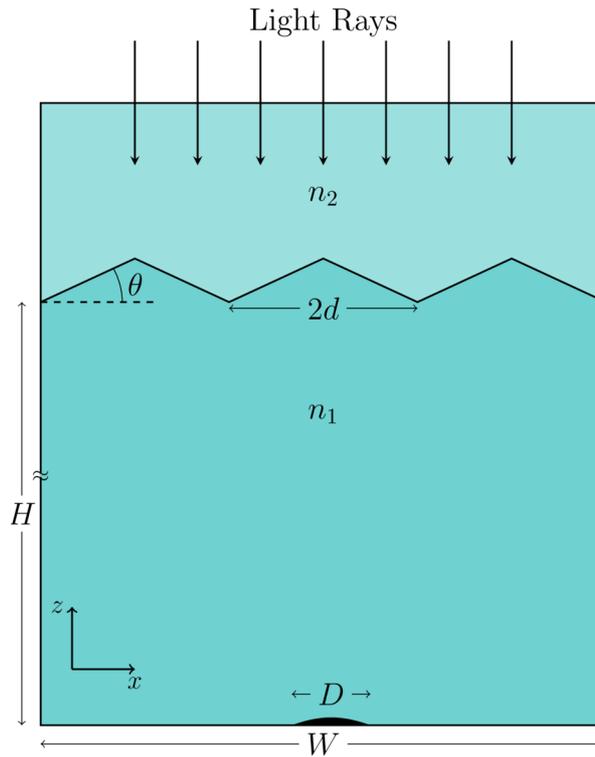


- (T09.2) Considere que a fronteira entre as duas camadas esteja a uma altura  $H = 1$  km, diretamente acima da objetiva do telescópio, com uma inclinação de  $\theta = 30^\circ$  em relação ao plano horizontal. Em todas as partes dessa questão,  $\theta$  é considerado positivo na direção anti-horária. Para uma fonte de luz monocromática,  $n_1 = 1,00027$  e  $n_2 = 1,00026$ . Considere que o deslocamento angular da imagem no plano focal do telescópio para uma estrela no zênite seja  $\alpha$ .
- (T09.2a) Desenhe um diagrama de raios na interface, com identificação adequada, mostrando  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $\theta$  e  $\alpha$ . [2]
- (T09.2b) Encontre a expressão para  $\alpha$  em termos de  $\theta$ ,  $n_1$  e  $n_2$ . Use as aproximações para ângulos pequenos:  $\sin \alpha \approx \alpha$  e  $\cos \alpha \approx 1$ . [2]
- (T09.2c) Calcule o deslocamento  $\Delta x_\theta$ , em metros, na posição da imagem, se  $\theta$  aumentar em 1% (mantendo  $n_1$  e  $n_2$  fixos). [3]
- (T09.2d) Calcule o deslocamento  $\Delta x_{n_2}$ , em metros, na posição da imagem se  $n_2$  aumentar em 0,0001% (mantendo  $n_1$  e  $\theta$  fixos). [3]
- (T09.3) Para a luz branca vinda de uma estrela no zênite, escolha qual das seguintes opções melhor descreve a forma e a cor da imagem, marcando ( $\checkmark$ ) na caixa apropriada (apenas uma) na Folha de Respostas Resumidas. Note que  $x$  aumenta da esquerda para a direita na figura. [2]

	Cor da imagem	Forma da imagem	Borda esquerda	Borda direita
A	Branca	Circular		
B	Branca	Elíptica		
C	Colorida	Circular	Azul	Vermelha
D	Colorida	Circular	Vermelha	Azul
E	Colorida	Elíptica	Azul	Vermelha
F	Colorida	Elíptica	Vermelha	Azul

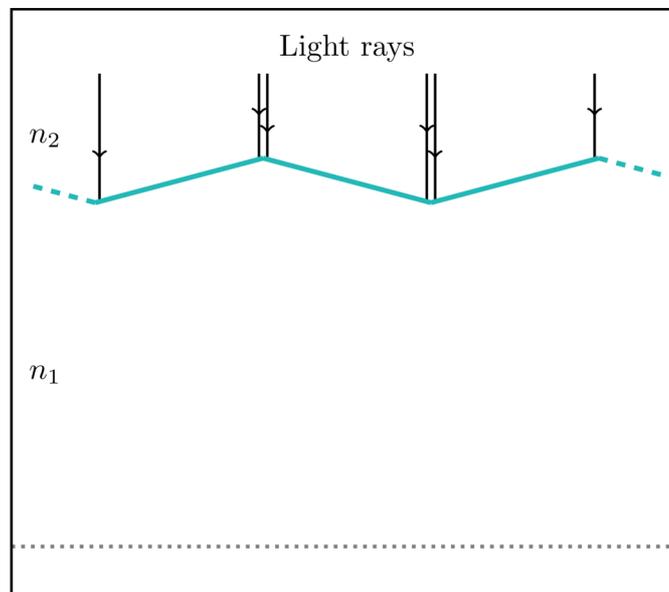
Para todas as partes restantes dessa questão, consideramos luz verde monocromática com  $\lambda = 550$  nm. Modelamos a interface entre as camadas como um conjunto de planos em zigue-zague infinitos (orientados perpendicularmente ao plano da página) separados por  $d = 10$  cm ao longo do eixo  $x$ , com  $\theta = 10^\circ$  ou  $\theta = -10^\circ$ .

A figura abaixo (fora de escala) mostra uma seção transversal deste modelo da atmosfera com largura  $W$  ( $W \ll H$ ). Para telescópios com grande abertura, essa natureza em zigue-zague da interface resulta na formação de manchas ("speckles") no plano focal.



(T09.4) Considere uma atmosfera modelada conforme a descrição acima.

(T09.4a) Uma seção da atmosfera com planos em zigue-zague consecutivos, com os mesmos parâmetros mencionados acima, é mostrada no diagrama abaixo (fora de escala).



Neste diagrama, reproduzido na Folha de Respostas Resumidas, desenhe os caminhos dos raios de luz incidentes até o plano onde está colocada a objetiva do telescópio, mostrado pela linha pontilhada cinza.

Marque com "X" no diagrama a(s) região(ões), se houver, onde nenhum raio de luz irá alcançar. [4]

(T09.4b) Calcule a largura  $W_X$  de tal(is) região(ões). [3]

(T09.4c) Encontre o maior diâmetro,  $D_{\max}$ , da objetiva do telescópio com a qual será possível obter uma única imagem de uma estrela, escolhendo apropriadamente a localização do telescópio em relação à estrutura da interface. **[4]**

(T09.5) Considere o caso em que a forma em zigue-zague da interface é permitida nas direções  $x$  e  $y$  (como um campo de pirâmides) e  $D = 100$  cm, com  $f = 200$  cm. **[6]**

No espaço fornecido na Folha de Respostas Resumidas, esboce o padrão qualitativo das manchas ("speckles") resultantes.

(T09.6) Para uma atmosfera turbulenta, considere novamente a mesma forma de zigue-zague entre a interface das camadas, mas correndo apenas ao longo da direção  $x$ , e com o ângulo entre os dois planos mudando a uma taxa uniforme de  $10^\circ$  para  $-10^\circ$  em 1,0 s. Aproxime que isso ocasiona uma taxa uniforme de deslocamento da posição da imagem. **[5]**

Considere um telescópio com  $D = 8$  cm e  $f = 1$  m. Estime o maior tempo de exposição  $t_{\max}$  permitido para a câmera CCD de modo que se obtenha apenas uma única imagem do objeto, e qualquer possível desvio em sua posição permaneça inferior a 1% do diâmetro limitado por difração da imagem.

**(T10) Nucleossíntese do Big Bang**

**[35 pontos]**

No início do Universo, durante a era dominada pela radiação, o fator de escala do Universo varia como  $a(t) \sim t^{1/2}$ , onde  $t$  é o tempo desde o Big Bang. Durante a maior parte dessa era, nêutrons (n) e prótons (p) permanecem em equilíbrio térmico entre si por meio de interações fracas. A densidade numérica ( $N$ ) de nêutrons ou prótons livres está relacionada à temperatura  $T$  e suas massas correspondentes  $m$  de tal forma que

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

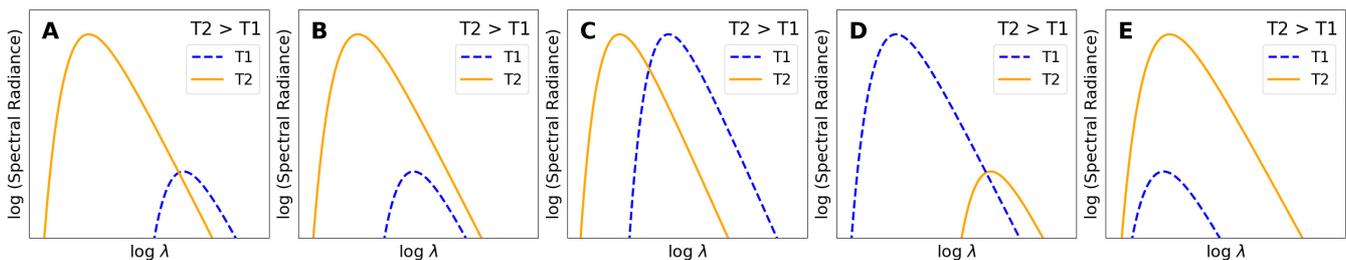
enquanto o tempo  $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70$  s, quando  $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$  keV. Após  $t_{\text{wk}}$ , as interações fracas não conseguem mais manter tal equilíbrio, e nêutrons livres decaem em prótons com um tempo de meia-vida de 610,4 s.

(T10.1) Seja a densidade numérica de prótons  $N_p$  e a de nêutrons  $N_n$ . Calcule a abundância relativa de nêutrons dada pela razão  $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$  no tempo  $t_{\text{wk}}$ . **[4]**

(T10.2) Fótons mantêm o equilíbrio térmico e retêm um espectro de corpo negro em todas as épocas.

(T10.2a) Encontre o índice  $\beta$ , tal que  $T(a) \propto a^\beta$ . **[2]**

(T10.2b) Identifique qual dos gráficos a seguir mostra o comportamento correto da densidade de energia espectral para duas temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ . Marque ( $\checkmark$ ) na opção correta na Folha de Respostas Resumidas. **[2]**



(T10.3) Após  $t_{\text{wk}}$ , o processo de formação de deutério a partir de prótons e nêutrons é regido pela equação de Saha, dada pelo físico indiano Prof. Meghnad Saha, que pode ser simplificada para

$$\frac{N_D}{N_n} = 6,5\eta \left( \frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

Aqui, a razão de bárions para fótons  $\eta$  é  $6,1 \times 10^{-10}$ , e  $N_D$  é a densidade numérica de deutério.

(T10.3a) Plote a razão  $N_D/N_n$  no gabarito que está na Folha de Respostas Resumidas, para pelo menos 4 valores de temperatura razoavelmente espaçados, que estejam no domínio  $k_B T = [60, 70]$  keV, e desenhe uma curva suave passando por esses pontos. [5]

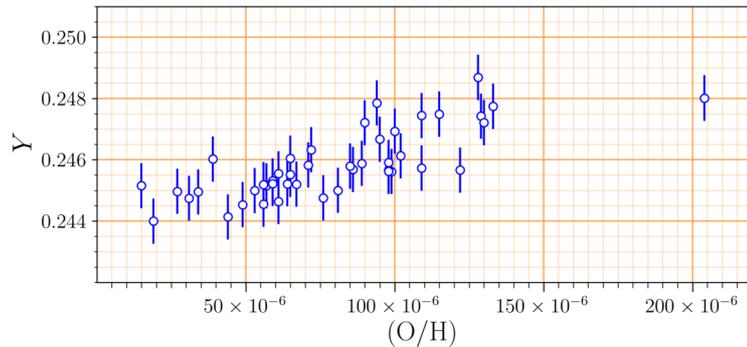
(T10.3b) A partir do gráfico, encontre  $k_B T_{\text{nuc}}$  (em keV) quando  $N_D = N_n$ . [1]

(T10.3c) Em vez disso, agora assuma que todos os nêutrons livres se combinam instantaneamente com os prótons em  $k_B T_{\text{nuc}}$  para formar Deutério, e todos eles são imediatamente convertidos em Hélio ( ${}^4_2\text{He}$ ). Calcule a época ou tempo correspondente de nucleossíntese,  $t_{\text{nuc}}$  (em s), para a formação de Hélio. [4]

(T10.4) Calcule o valor de  $X_{n, \text{nuc}}$  imediatamente antes de  $t_{\text{nuc}}$ . [5]

(T10.5) A abundância primordial de Hélio,  $Y_{\text{prim}}$ , é definida como a fração da massa bariônica total no Universo que está ligada em Hélio logo após  $t_{\text{nuc}}$ . Obtenha uma estimativa teórica para o valor de  $Y_{\text{prim}}$ . Para o propósito deste cálculo apenas, assuma  $m_p \approx m_n$  e que a massa do Hélio,  $m_{\text{He}} \approx 4m_n$ . [3]

(T10.6) A abundância primordial de Hélio é muito difícil de medir, pois as estrelas continuamente convertem Hidrogênio em Hélio no Universo. A contaminação de Hélio por estrelas em uma galáxia pode ser caracterizada pela densidade numérica, em relação ao Hidrogênio, de Oxigênio (que é produzido apenas por estrelas), denotada como (O/H). Uma compilação das medições de (O/H) e da abundância de Hélio,  $Y$ , para diferentes galáxias é plotada abaixo.



Use todos os pontos neste gráfico (que é reproduzido na Folha de Respostas Resumidas) para responder ao seguinte.

(T10.6a) Estime  $Y$  para uma galáxia anã azul compacta com um valor de  $(\text{O}/\text{H}) = 1,75 \times 10^{-4}$ . [2]

(T10.6b) Obtenha a inclinação  $dY/d(\text{O}/\text{H})$  do ajuste de linha reta aos dados acima. [2]

(T10.6c) Estime a abundância primordial de Hélio,  $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ , com base nas observações acima. [2]

(T10.7) A diferença entre  $Y_{\text{prim}}$  e  $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$  pode ser reconciliada alterando a razão bárion-fóton  $\eta$ . Quando  $\eta$  é diminuída, conforme indicado por  $\downarrow$  na Folha de Respostas Resumidas, indique o aumento ( $\uparrow$ ) ou diminuição ( $\downarrow$ ) em  $N_D/N_n(T)$ ,  $T_{\text{nuc}}$  (quando  $N_D = N_n$ ),  $t_{\text{nuc}}$ ,  $X_{n, \text{nuc}}$ , e  $Y_{\text{prim}}$  nos espaços correspondentes na Folha de Respostas Resumidas. [3]

**(T11) Estrelas através de gráficos**

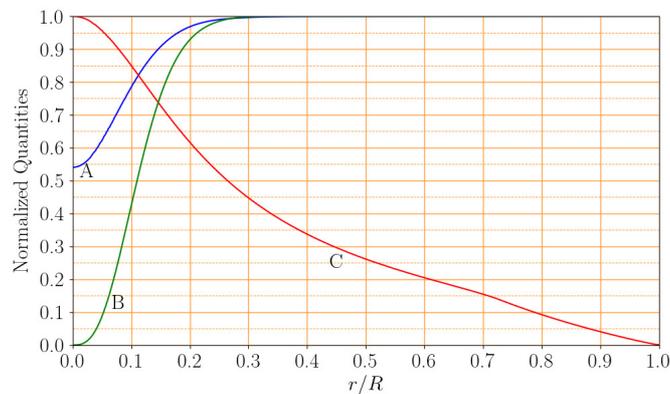
**[50 pontos]**

As estrelas podem ser bem aproximadas como objetos esfericamente simétricos, e, portanto, a distância radial  $r$  a partir do centro pode ser escolhida como a única variável independente na modelagem dos interiores estelares. A massa contida dentro de uma esfera de raio  $r$  é denotada por  $m(r)$ . A luminosidade  $l(r)$  é definida como a energia líquida que flui para fora através de uma superfície esférica de raio  $r$  por unidade de tempo. Outras quantidades de interesse, por exemplo, a densidade  $\rho(r)$ , temperatura  $T(r)$ , fração de massa de hidrogênio  $X(r)$ , fração de massa de hélio  $Y(r)$ , e a energia nuclear gerada por unidade de massa por unidade de tempo  $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$ , são consideradas funções de  $r$ . Ao longo deste problema, vamos negligenciar os efeitos de difusão e sedimentação gravitacional dos elementos dentro da estrela.

O símbolo "log" refere-se ao logaritmo na base 10. O problema consiste em três partes independentes.

**(T11.1) Parte 1: Dentro de uma estrela**

O gráfico abaixo mostra a variação de três quantidades estruturais, A, B e C, como funções da razão entre os raios  $r/R$  em um modelo estelar de massa  $1 M_{\odot}$  e idade 4 GYr, onde  $R$  é o raio fotosférico da estrela. Os valores da fração de massa de hélio na superfície (fotosférica),  $Y_s$ , e da metalicidade (fração de massa de todos os elementos mais pesados que o hélio) na superfície (fotosférica),  $Z_s$ , da estrela são dados por  $(Y_s; Z_s) = (0,28; 0,02)$ . Todas as quantidades mostradas nos gráficos são normalizadas por seus respectivos valores máximos.



(T11.1a) Identifique, de maneira única, as três quantidades A, B e C entre as cinco [6] possibilidades:

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Escreva A/B/C nas caixas ao lado das quantidades apropriadas na Folha de Respostas Resumidas. Não é necessário justificar sua resposta.)

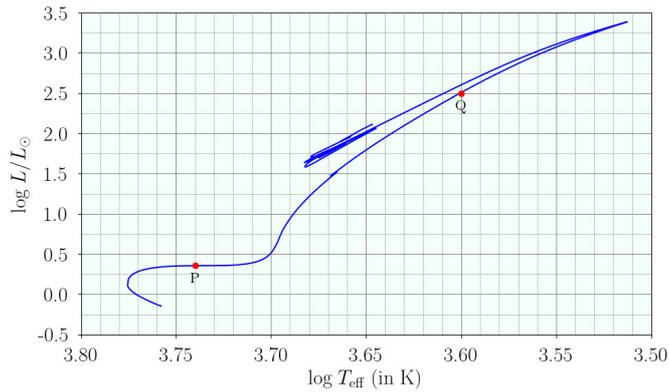
(T11.1b) Qual é a fração de massa de hélio no centro,  $Y_c$ , da estrela? [3]

(T11.1c) Esboce as duas quantidades restantes da lista de cinco (que não foram identificadas como curvas A, B ou C) dadas em (T11.1a), como funções de  $r/R$  no mesmo gráfico na Folha de Respostas Resumidas, e rotule com suas respectivas quantidades. [5]

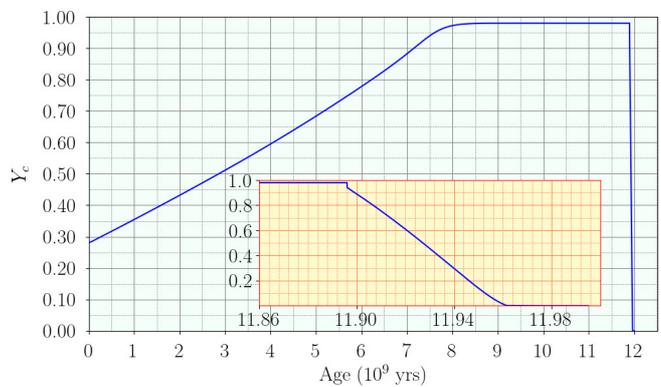
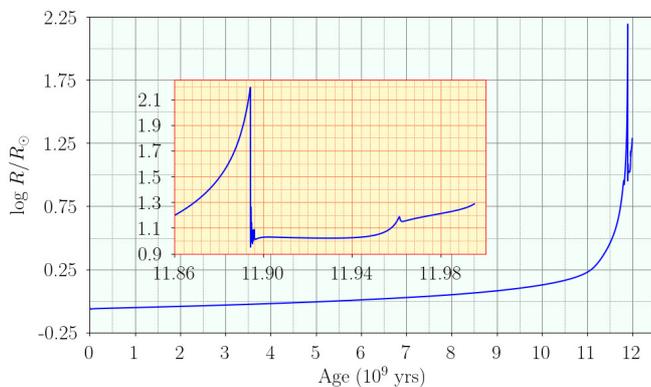
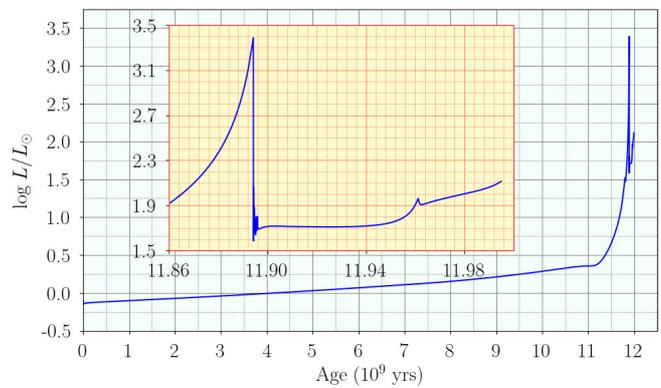
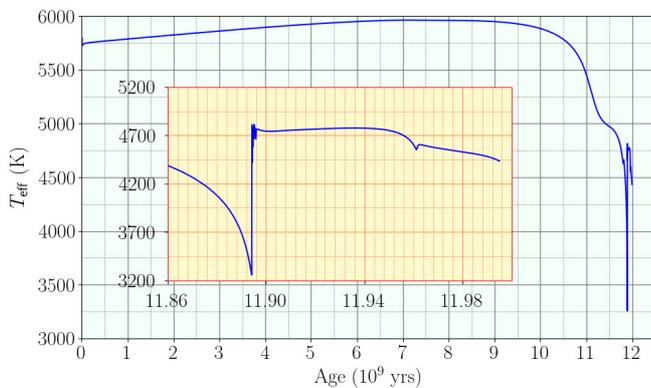
**(T11.2) Parte 2: Estrelas em evolução**

Considere a evolução de uma estrela de  $1M_{\odot}$  cuja composição inicial uniforme é dada pelas frações de massa de hélio,  $Y_0 = 0,28$ , e metais,  $Z_0 = 0,02$ . As figuras abaixo mostram a variação de diferentes quantidades globais dessa estrela à medida que ela evolui desde a ZAMS (Sequência Principal de Idade Zero) até o final da queima de hélio em seu núcleo.

O gráfico abaixo mostra a trajetória evolutiva da estrela no diagrama HR (gráfico de  $\log L/L_{\odot}$  vs  $\log T_{\text{eff}}$ , onde  $L$  é a luminosidade superficial e  $T_{\text{eff}}$  é a temperatura efetiva).



A figura abaixo possui quatro gráficos que mostram a variação de  $T_{\text{eff}}$  (em K),  $L$  (plotado como  $\log L/L_{\odot}$ ),  $R$  (plotado como  $\log R/R_{\odot}$ ), e  $Y_c$  com a idade (em  $10^9$  anos) da mesma estrela. Em cada um desses quatro gráficos, os detalhes mostram as variações das respectivas quantidades entre as idades de  $11,86 \times 10^9$  anos a  $12,00 \times 10^9$  anos, para maior clareza.



Use esses gráficos para responder às perguntas abaixo.

- (T11.2a) Qual é o tempo aproximado de vida na sequência principal,  $t_{\text{MS}}$  (em anos), da estrela? [1]
- (T11.2b) Qual é a duração aproximada,  $\Delta t_{\text{He}}$  (em anos), durante a qual a estrela queima hélio em seu núcleo? [1]
- (T11.2c) Qual fração,  $f_{\text{H}}$ , da quantidade inicial de hidrogênio em seu centro foi queimada quando a luminosidade da estrela é  $1 L_{\odot}$ ? [3]
- (T11.2d) Qual é o raio da estrela,  $R_1$  (em unidades de  $R_{\odot}$ ) quando 60% da quantidade inicial de hidrogênio em seu centro foi queimada? [3]
- (T11.2e) Quais são os raios da estrela,  $R_P$  e  $R_Q$  (em unidades de  $R_{\odot}$ ), correspondentes às suas posições P e Q, respectivamente, conforme marcado no diagrama HR? [4]

**(T11.3) Parte 3: Distribuição de massa dentro de uma estrela**

A equação que governa a distribuição de massa dentro de uma estrela é dada por

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Seria conveniente expressar esta equação em termos de três variáveis adimensionais a saber: a massa fracionária,  $q$ , o raio fracionário,  $x$ , e a densidade relativa,  $\sigma$ , que definimos como

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

onde  $M$  e  $R$  são a massa total e o raio da estrela, respectivamente, e  $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$  é a densidade média da estrela. Para a estrela específica que consideraremos nesta parte, as seguintes informações são fornecidas:

- A densidade central  $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$
- Metade da massa da estrela está contida dentro dos 25% internos de seu raio total, e 70% de sua massa está contida dentro dos 35% internos de seu raio total.

Em todas as partes subsequentes desta questão, será suficiente arredondar todos os coeficientes numéricos derivados para dentro de 0,005.

(T11.3a) Expresse a equação acima, que descreve a dependência da massa em relação ao raio, [2] em termos de  $x$ ,  $\frac{dq(x)}{dx}$  e  $\sigma(x)$ .

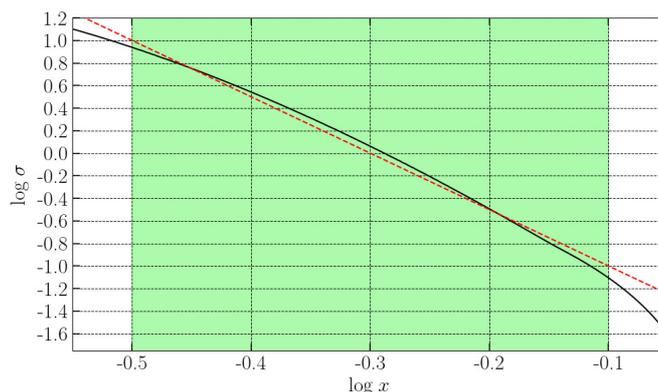
Para obter a distribuição de massa com o raio, precisamos conhecer o perfil de densidade dentro da estrela. Para o propósito deste problema, descreveremos a variação da densidade com o raio por formas aproximadas em dois domínios de  $x$ :

- a parte interna da estrela:  $0 \leq x \leq 0,32$
- a parte intermediária da estrela:  $0,32 < x < 0,80$

Não fazemos nenhuma aproximação para a parte mais externa, ou seja,  $0,80 \leq x \leq 1,00$ .

**(T11.3b) Aproximação para a parte intermediária:**

A variação de  $\log \sigma$ , como uma função de  $\log x$  na parte intermediária da estrela é mostrada (pela curva preta) no gráfico abaixo. Faremos uma aproximação linear (mostrada como uma linha vermelha tracejada no gráfico) para  $\log \sigma$  como uma função de  $\log x$  no domínio  $-0,5 < \log x < -0,1$ , ou seja,  $0,32 \lesssim x \lesssim 0,80$  (mostrado pelo domínio sombreado em verde). Além disso, aproximaremos a inclinação desta linha pelo inteiro mais próximo.



Use esta aproximação para escrever uma expressão para  $\sigma(x)$  como uma função de  $x$  [4]  
no domínio  $0,32 < x < 0,80$ .

(T11.3c) Use o resultado de (T11.3b) para derivar uma expressão para  $q(x)$  no domínio [6]  
 $0,32 < x < 0,80$ .

(T11.3d) **Aproximação para a parte interna:**

Na parte interna da estrela ( $0 \leq x \leq 0,32$ ), a densidade pode ser aproximada como [8]  
uma função linear do raio, ou seja,  $\sigma(x) = Ax + B$ , onde  $A, B$  são constantes.  
Determine  $A$  e  $B$ , e assim obtenha uma expressão para  $q(x)$  no domínio  $0 \leq x \leq 0,32$ .  
Note que as aproximações adotadas na parte anterior e nesta parte podem levar a  
pequenas descontinuidades na densidade ou massa em  $x = 0,32$ .

(T11.3e) As expressões para  $q(x)$  obtidas nas partes (T11.3c) e (T11.3d) são aproximações que [4]  
descrevem muito bem a variação da massa com o raio, mas apenas em regiões  
específicas da estrela. Para o domínio  $0,80 \leq x \leq 1$  (para o qual não derivamos  
nenhuma expressão), é possível usar extrapolação apropriada da região vizinha. Use  
essas expressões aproximadas e os dados fornecidos para esboçar uma curva suave  
(sem descontinuidades em  $q(x)$  ou em sua derivada) para  $q(x)$  vs  $x$  para toda a estrela  
( $0 \leq x \leq 1$ ) que represente a variação da massa com o raio.

**(T12) Radiação de Hawking de Buracos Negros**

**[50 pontos]**

(T12.1) Um buraco negro (BH) tipicamente se forma pelo colapso gravitacional de uma estrela massiva no  
final de seu ciclo de vida até um ponto chamado singularidade. Devido à gravidade extrema de tal  
objeto, nada que entre no chamado horizonte de eventos (uma superfície esférica com  $r = R_{SC}$ ,  
onde  $r$  é a distância à singularidade) é capaz de escapar dele. Aqui,  $R_{SC}$  é referido como o raio de  
Schwarzschild.

(T12.1a) **Modelando a origem da radiação de Hawking:** Considere um par de partículas, cada uma  
com massa  $m$ , produzidas em cada lado do horizonte do BH. Uma partícula está  
ligeiramente fora do horizonte em  $r \approx R_{SC}$ , enquanto a outra partícula está dentro do  
horizonte em  $r = \kappa R_{SC}$ . Assuma que a energia total de uma partícula é a soma de sua  
energia de massa de repouso  $mc^2$  e a energia potencial gravitacional devido ao BH.

Determine o valor de  $\kappa$  para o qual o par de partículas tem energia total zero. [4]

(T12.1b) **Temperatura de um buraco negro:** Se a partícula produzida fora do horizonte no processo  
acima tiver energia cinética suficiente, ela pode escapar do BH em um processo chamado  
radiação de Hawking. A que está dentro do horizonte, que tem energia negativa, é  
absorvida e diminui a massa do BH.

Assuma que toda a radiação de Hawking é composta por fótons com um espectro de  
corpo negro que atinge o pico no comprimento de onda  $\lambda_{bb} \approx 16R_{SC}$ . Sabe-se que, para  
um BH de uma massa solar,  $R_{SC, \odot} = 2,952$  km.

Obtenha uma expressão para a temperatura,  $T_{bh}$ , do BH correspondente a essa [4]  
radiação de corpo negro, em termos de sua massa  $M_{bh}$  e constantes físicas. Calcule o  
raio de Schwarzschild,  $R_{SC, 10\odot}$ , e a temperatura,  $T_{bh, 10\odot}$ , para um BH com massa  $10$   
 $M_{\odot}$ .

(T12.1c) **Perda de massa de um buraco negro:** Assuma que a radiação de Hawking é emitida a  
partir do horizonte de eventos.

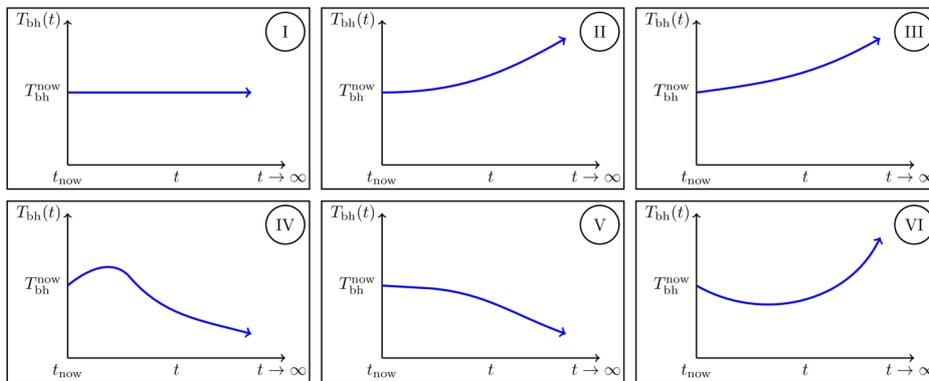
Usando a equivalência massa-energia, obtenha uma expressão para a taxa de perda de  
massa,  $dM_{bh}(t)/dt$ , em termos da massa  $M_{bh}(t)$  do BH e constantes físicas.

Assim, obtenha uma expressão para  $M_{bh}(t)$  para um BH com massa inicial  $M_0$ . [8]  
 Esboce  $M_{bh}(t)$  como uma função de  $t$  de  $M_{bh} = M_0$  a  $M_{bh} = 0$ .

(T12.1d) **Tempo de vida de um buraco negro:** Obtenha uma expressão para o tempo de vida  $\tau_{BH}$  [3]  
 em que um buraco negro com massa inicial  $M_0$  evapora completamente devido à radiação de Hawking, em termos de  $M_0$  e constantes físicas. Calcule o tempo de vida  $\tau_{BH,10\odot}$  (em segundos) para um buraco negro com  $M_0 = 10 M_{\odot}$ .

(T12.1e) **Buraco negro em um banho de radiação CMB:** Considere um buraco negro isolado no espaço, longe de outros corpos, com uma temperatura atual  $T_{bh}^{now}$ , cercado pela radiação cósmica de fundo de micro-ondas (CMB) com uma temperatura atual  $T_{cmb}^{now} = 2,7$  K. O buraco negro pode aumentar sua massa ao absorver a radiação CMB e perder sua massa por radiação de Hawking.

Levando em conta a expansão acelerada do Universo, identifique qual das seguintes figuras mostra a evolução temporal a longo prazo de  $T_{bh}$  nos três casos seguintes:  
 (X)  $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$ , (Y)  $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$ , (Z)  $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$ .



Indique sua resposta marcando a caixa apropriada (apenas uma) para cada caso X, Y [6]  
 ou Z na Tabela fornecida na Folha de Respostas Resumidas correspondente ao número da figura apropriada.

(T12.2) Buracos negros primordiais (PBHs) de massas muito menores podem se formar no Universo muito primitivo. Todas as perguntas a seguir estão relacionadas aos PBHs. Aqui, quaisquer processos que aumentem a massa do buraco negro podem ser negligenciados.

(T12.2a) **PBH evaporando na época atual:** Como você pode ter notado pelas respostas às perguntas anteriores, buracos negros de massa solar levariam muito tempo para evaporar. No entanto, como os PBHs podem ter uma massa muito menor, podemos ser capazes de vê-los evaporando nos tempos atuais.

Encontre a massa inicial  $M_{0, PBH}$  (em kg), o raio de Schwarzschild  $R_{SC, PBH}$  (em m) e a [4]  
 temperatura  $T_{PBH}$  (em K) de um buraco negro que pode estar evaporando completamente na época atual, ou seja, aqueles com tempo de vida  $\tau_{PBH} = 14$  bilhões de anos.

(T12.2b) **Formação de um PBH:** No início do Universo dominado por radiação, o fator de escala varia como  $a(t) \sim t^{1/2}$ . Nesta era, PBHs se formam devido ao colapso de toda a energia contida em uma região de tamanho físico  $ct$ , onde  $t$  é a idade do Universo naquele momento.

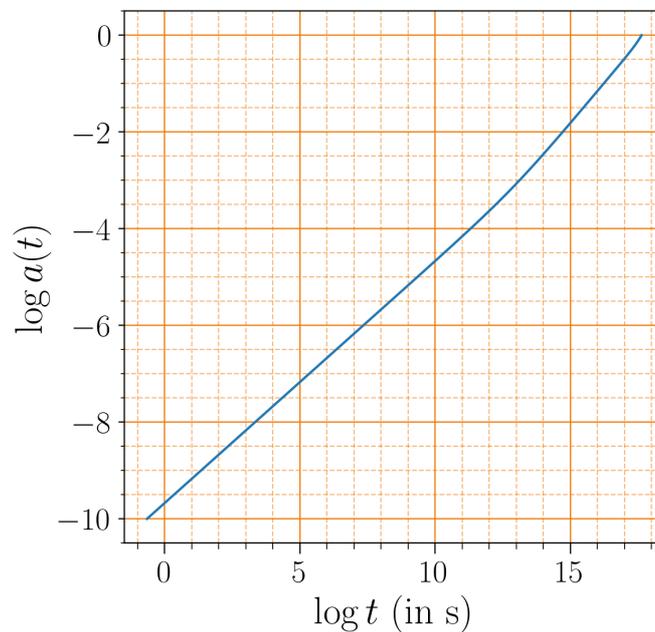
Um PBH com massa de  $1 \times 10^{12}$  kg se forma quando a idade do Universo é cerca de [6]  
 $1 \times 10^{-23}$  s. Calcule a idade do Universo,  $t_{20}$ , quando um PBH de massa  $1 \times 10^{20}$  kg se forma.

- (T12.2c) **Espectro observado da radiação de Hawking de PBH:** Considere um PBH de massa inicial  $1 \times 10^{10}$  kg que evapora completamente ao final de sua vida útil  $\tau_{\text{PBH}}$ . Para esta parte, assuma, para simplificar, que a maior parte da radiação de Hawking é emitida nesse momento, com uma temperatura correspondente à sua massa inicial. Além disso, considere que o fator de escala do Universo está evoluindo como  $a(t) \sim t^{2/3}$ .

Calcule o comprimento de onda de pico dessa radiação de Hawking conforme [5] observado na Terra,  $\lambda_{\text{earth}}$ , na época atual (em  $t = 14$  bilhões de anos).

- (T12.2d) **Radiação cósmica de alta energia de PBH:** Agora assuma que a radiação de Hawking emitida em um dado momento  $t$  corresponde a fótons emitidos com uma energia  $k_B T_{\text{bh}}(t)$ . Além disso, a temperatura mais alta possível para um buraco negro é a temperatura de Planck,  $T_{\text{Planck}}$ , onde  $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$  GeV.

A evolução do fator de escala ao longo de escalas de tempo relevantes é dada na figura a seguir. O fator de escala hoje é definido como unidade.  $t$  (s) no eixo do tempo representa a idade do universo em segundos.



- Se um fóton com uma energia de  $E_{\text{det}} = 3,0 \times 10^{20}$  eV for observado na Terra, [10] determine os maiores e menores valores possíveis da massa inicial do PBH ( $M_0^{\text{max}}$  e  $M_0^{\text{min}}$ , respectivamente) que poderiam ser responsáveis por este fóton.