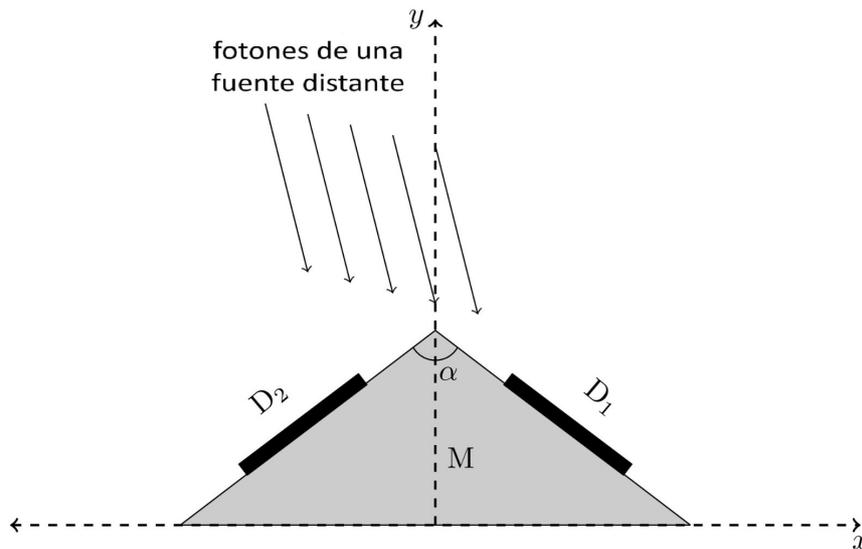


(T01) Misión Daksha

[10 puntos]

“Daksha” es una misión propuesta por la India que consta de dos satélites, S_1 y S_2 , que orbitan la Tierra en la misma órbita circular de radio $r = 7000$ km pero con una diferencia de fase de 180° . Estos satélites observan el universo en el dominio de altas energías (rayos X y rayos γ). Cada uno de los satélites de Daksha utiliza varios detectores planos y rectangulares.

Para entender cómo localizar una fuente en el cielo, emplearemos un modelo simplificado de la misión Daksha. Supondremos que S_1 tiene solo dos detectores idénticos, D_1 y D_2 , cada uno con un área $A = 0.50$ m², montados sobre un soporte opaco M , como se muestra en la figura. Los detectores están situados en un plano perpendicular al plano x - y y forman un ángulo $\alpha = 120^\circ$ entre sí.



(T01.1) Al observar una fuente distante ubicada en el plano x - y , el detector D_1 registra una potencia $P_1 = 2,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ y el detector D_2 registra una potencia $P_2 = 4,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹.

Estime el ángulo η que forma el vector de posición de la fuente con el eje- y positivo, [5] considerándose positivo el ángulo en sentido antihorario.

Considere un solo pulso de una fuente distante (no necesariamente en el plano x - y) registrado por ambos satélites (S_1 y S_2) de Daksha. Los tiempos de los picos de los pulsos registrados por S_1 y S_2 son t_1 y t_2 , respectivamente.

(T01.2) Si se midió que $t_1 - t_2$ era $10,0 \pm 0,1$ ms, determine la fracción, f , de la esfera celeste donde [5] podría estar la fuente.

(T02) Makar-Sankranti

[10 puntos]

El festival “Makar-Sankranti” se celebra en la India cuando el Sol, visto desde la Tierra, parece entrar en la región zodiacal de Capricornio (Makar = Capricornio, Sankranti = Entrada). Actualmente se celebra en torno al 14 de enero de cada año. Hace muchos años, esta festividad también coincidía con el solsticio de invierno en el hemisferio norte, que suponemos que tiene lugar el 21 de diciembre.

(T02.1) Basándose en la información anterior, encuentre el año, y_c , en que la celebración de esta fiesta [3] coincidió por última vez con el Solsticio de Invierno en el hemisferio Norte.

(T02.3) El festival Makar-Sankranti se celebra en un lugar determinado el día de la primera puesta de Sol en la región zodiacal de Capricornio. Puede suponer que la hora local de la puesta del Sol para Mumbai en enero es las 18:30:00 hrs.

Indique la fecha de celebración del festival en cada año entre 2006 y 2013 (marcando la casilla [4] correspondiente en la tabla de la hoja de respuestas con un (✓)).

(T03) Ondas Gravitacionales

[15 puntos]

Los agujeros negros binarios generan ondas gravitacionales. Considere dos agujeros negros en nuestra galaxia con masas $M = 36 M_{\odot}$ y $m = 29 M_{\odot}$, girando en órbitas circulares con frecuencia angular orbital ω alrededor de su centro de masa.

(T03.1) Asumiendo la gravedad newtoniana, derive una expresión para la frecuencia angular, ω_{ini} de las órbitas de los agujeros negros en un momento t_{ini} , cuando la separación entre los agujeros negros es 4.0 veces la suma de cada uno de sus radios de Schwarzschild, solo en términos de M , m , y constantes físicas.

Calcule el valor de ω_{ini} (en rad s^{-1}). [5]

(T03.2) En la teoría general de la relatividad, los agujeros negros en órbita emiten ondas gravitacionales con una frecuencia f_{GW} , tal que $2\pi f_{GW} = \omega_{GW} = 2\omega$. Esto origina que las órbitas de los agujeros negros se reduzcan con el tiempo, lo que a su vez hace que aumente f_{GW} . La tasa de cambio de f_{GW} es

$$\frac{df_{GW}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{chirp}^{\alpha/3} f_{GW}^{\delta/3},$$

donde $M_{chirp} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ se denomina “masa de chirp”.

Encuentra los valores de α , β y δ . [4]

(T03.3) Asuma que las ondas gravitacionales asociadas con el evento se detectaron por primera vez en el momento $t_{ini} = 0$. [6]

Derive una expresión para el tiempo observado de fusión de agujeros negros, t_{merge} , cuando f_{GW} se vuelve muy grande, en términos de ω_{ini} , M_{chirp} , y constantes físicas únicamente. Calcule el valor de t_{merge} (en segundos).

(T04) Decremento de Balmer

[15 puntos]

Considere una estrella de secuencia principal rodeada por una nebulosa. La magnitud observada de la estrella en la banda V es 11,315 mag. La región ionizada de la nebulosa cerca de la estrella emite líneas $H\alpha$ y $H\beta$; sus longitudes de onda son $0,6563 \mu\text{m}$ y $0,4861 \mu\text{m}$, respectivamente. La razón teórica predicha entre los flujos de las líneas $H\alpha$ y $H\beta$ es $f_{H\alpha}/f_{H\beta} = 2,86$. Sin embargo, cuando esta radiación pasa a través de la parte exterior de la nebulosa fría y polvorienta, los flujos de emisión observados de las líneas $H\alpha$ y $H\beta$ son $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ y $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$, respectivamente.

La extinción A_{λ} es una función de la longitud de onda y se expresa como

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(B - V).$$

Donde $\kappa(\lambda)$ es la curva de extinción y $E(B - V)$ denota el exceso de color en las bandas de los filtros B y V. La curva de extinción (con λ en μm) es dada por:

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2,659 \times \left(-1,857 + \frac{1,040}{\lambda}\right) + R_V, & 0,63 \leq \lambda \leq 2,20 \\ 2,659 \times \left(-2,156 + \frac{1,509}{\lambda} - \frac{0,198}{\lambda^2} + \frac{0,011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0,12 \leq \lambda < 0,63 \end{cases}$$

donde $R_V = A_V/E(B - V) = 3,1$ es la razón de la extinción total a la selectiva.

(T04.1) Encuentra los valores de $\kappa(\text{H}\alpha)$ y $\kappa(\text{H}\beta)$. [3]

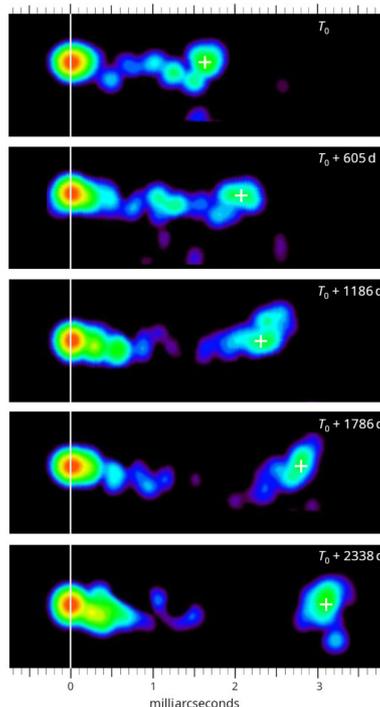
(T04.2) Encuentra el valor de la razón de los excesos de color $\frac{E(\text{H}\beta - \text{H}\alpha)}{E(B - V)}$. [4]

(T04.3) Estima la extinción debida a la nebulosa, $A_{\text{H}\alpha}$ y $A_{\text{H}\beta}$, en las longitudes de onda de $\text{H}\alpha$ y $\text{H}\beta$, respectivamente. [6]

(T04.4) Estime la extinción de la nebulosa, (A_V), y la magnitud aparente de la estrella en la banda V en ausencia de la nebulosa, m_{V0} . [2]

(T05) Quásares [20 marks]

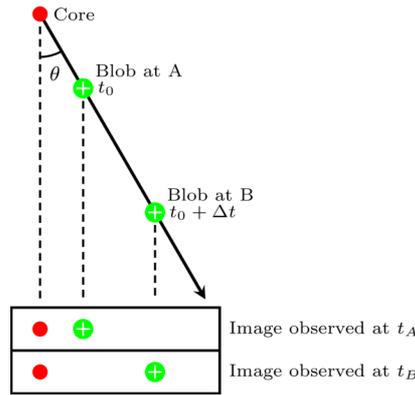
Un quásar es una galaxia activa extremadamente luminosa alimentada por un agujero negro supermasivo que emite jets relativistas. La figura muestra una serie de paneles con imágenes de radio de un quásar (con corrimiento al rojo $z = 0,53$ y distancia de luminosidad $D_L = 1,00 \times 10^{10}$ ly en diferentes momentos. El “núcleo” está alineado con la línea vertical blanca, mientras que un jet, que consiste en un “blob” o “mancha” (marcada en blanco +), se aleja de él con el tiempo. Cada panel muestra el tiempo de observación (comenzando con T_0 para la primera imagen), y la escala angular se indica en la parte superior e inferior de la figura.



- (T05.1) Determine la separación angular del blob, ϕ_{blob} (en milisegundos de arco), y su distancia transversal, l_{blob} (en años luz), desde el núcleo del cuásar para cada observación. Luego, calcule la velocidad aparente (v_{app}) del blob en la dirección transversal como una fracción de la velocidad de la luz, $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$ utilizando observaciones consecutivas. Por lo tanto, calcule la velocidad aparente promedio $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$. [5]

El jet del cuásar en realidad se mueve a una velocidad relativista $v \equiv \beta c$, pero no necesariamente en el plano del cielo. Esto es, forma un ángulo θ (el “ángulo de visión”) con respecto a la línea de visión de un observador distante (indicado por las líneas discontinuas), como se muestra en el siguiente esquema.

Para esta y todas las partes subsiguientes, ignore el corrimiento al rojo del cuásar y cualquier efecto relativista.



- (T05.2) La luz emitida por la mancha en dos momentos diferentes, t_0 (correspondiente a la posición A) y $t_0 + \Delta t$ (correspondiente a la posición B) alcanza al observador en t_A y t_B , respectivamente. Por lo tanto, la diferencia de tiempo observada es $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.

- (T05.2a) Encuentre una expresión para la relación $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ en términos de β y θ . [2]

- (T05.2b) Usando esta relación, exprese β_{app} en términos de β y θ . [2]

- (T05.3) El movimiento es llamado superlumínico si su velocidad aparente excede la de la luz ($\beta_{\text{app}} > 1$), y sublumínico si no lo hace ($\beta_{\text{app}} < 1$).

- (T05.3a) Para $\beta_{\text{app}} = 1$, dibuje una curva suave de β como una función de θ para marcar el límite entre movimientos sublumínicos y superlumínicos. Sombrée la región superlumínica en el gráfico con líneas inclinadas (///). [4]

- (T05.3b) Encuentre la velocidad verdadera del jet más baja ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$) para que ocurra el movimiento superlumínico, y también su ángulo de orientación correspondiente, θ_{low} . [2]

- (T05.4) Encuentre una expresión para el ángulo de visión máximo, θ_{max} , para el cual será posible un valor dado de β_{app} . [2]

El núcleo de un cuásar, su objeto compacto central, presenta variabilidad en su emisión debido a procesos internos que ocurren dentro de una región causalmente conectada. El tamaño (= radio) de esta región se considera típicamente cinco veces el radio de Schwarzschild del núcleo.

- (T05.5) Se ha descubierto que el núcleo de un cuásar varía en escalas de tiempo de aproximadamente 1 h. Obtenga un límite superior, $M_{c, \text{max}}$, para la masa del objeto compacto central, en unidades de masa solar. [3]

(T06) Rotación Galáctica

[20 puntos]

La curva de rotación de nuestra Galaxia se determina utilizando mediciones de velocidad a lo largo de la línea de visión de nubes de hidrógeno neutro (HI) a lo largo de varias longitudes galácticas, observadas a través de la línea de 21 cm de HI. Considere una nube de HI con longitud galáctica l , ubicada a una distancia R del Centro Galáctico (CG) y a una distancia D del Sol. Considere que el Sol está a una distancia $R_0 = 8.5$ kpc del CG. Suponga que tanto el Sol como la nube de HI están en órbitas circulares alrededor del CG en el plano galáctico, con velocidades angulares Ω_0 y Ω , y velocidades de rotación V_0 y V , respectivamente.

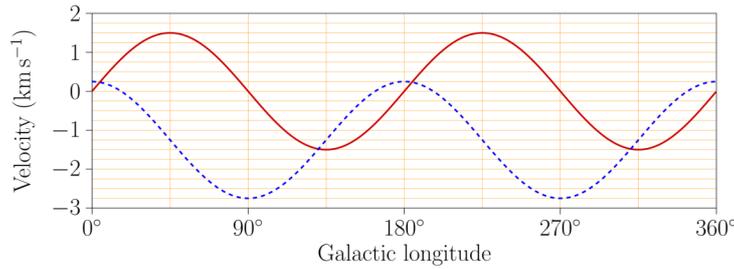
Los componentes de velocidad a lo largo de la línea de visión (V_r) y de velocidad tangencial (V_t) de la nube, observados desde el Sol, pueden expresarse como

$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Visto desde el Polo Norte Galáctico, la rotación galáctica es en sentido de las agujas del reloj. A lo largo de este problema, tomaremos la velocidad a lo largo de la línea de visión como positiva cuando se aleja, y las nubes se tratarán como objetos puntuales.

- (T06.1) En el gráfico proporcionado en la Hoja de Respuestas, dibuja V_r como una función de D desde $D = 0$ hasta $D = 2R_0$ para dos líneas de visión definidas por (i) $l = 45^\circ$ y (ii) $l = 135^\circ$. Nombra cada una de tus líneas/curvas dibujadas con el valor de l . [5]
- (T06.2) El gráfico a continuación muestra los componentes de velocidad radial promedio (curva sólida, roja) y transversal (curva discontinua, azul) de las estrellas a una distancia de 100 pc del Sol, representados en función de la longitud galáctica.



Usando el gráfico, estime el período orbital del Sol (P) alrededor del GC en mega-años (Myr). [3]

- (T06.3) Jan Oort observó que en el vecindario solar ($D \ll R_0$), la diferencia en las velocidades angulares ($\Omega - \Omega_0$) será pequeña, y por lo tanto, encontró la siguiente aproximación de primer orden para los componentes de velocidad en la línea de visión y tangencial:

$$V_r = AD \sin 2l$$

$$V_t = AD \cos 2l + BD$$

donde A y B son conocidas como las constantes de Oort.

Consideremos dos casos:

(I) la curva de rotación observada actual de la Galaxia, y

(II) la curva de rotación es para un escenario hipotético donde la Galaxia carece de materia oscura y se asume que toda la masa de la Galaxia está concentrada en su centro.

- (T06.3a) Derivar expresiones para el gradiente radial de la velocidad de rotación en la ubicación del Sol, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$, para los dos casos. [2]

- (T06.3b) Expresar A y B en términos de V_0 , R_0 , y el gradiente radial de la velocidad de rotación en la ubicación del Sol, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$. [8]

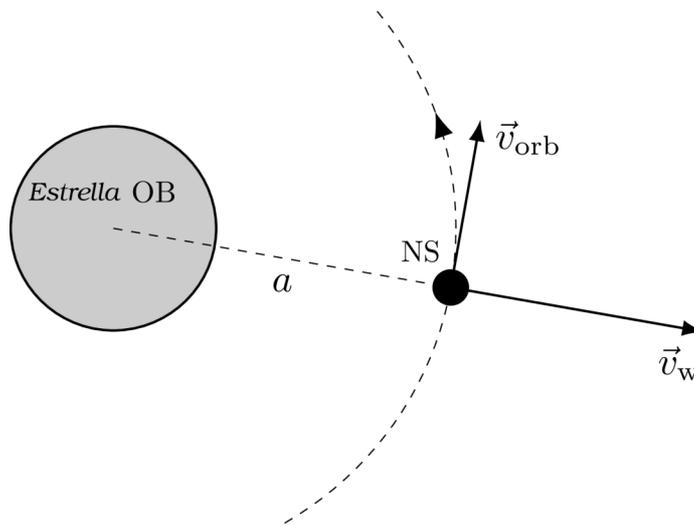
- (T06.3c) La razón (A/B) de las constantes de Oort para los dos casos dados, (I) y (II), se definen como F_I y F_{II} , respectivamente. Determinar F_I y F_{II} . [2]

(T07) Binaria con Estrella de Neutrones

[20 puntos]

En un sistema binario que involucra una estrella compacta, donde la estrella compañera no desborda su lóbulo de Roche, la fuente principal de acreción para la estrella compacta es el viento estelar de la estrella compañera. Esta acreción alimentada por el viento es especialmente significativa en sistemas que incluyen una estrella de tipo temprano (como una estrella O o B, indicada de aquí en adelante como una estrella OB), junto con un objeto compacto como una estrella de neutrones (NS) en una órbita cercana.

Considere un sistema binario, NS-estrella OB, donde una estrella de neutrones de masa $M_{NS} = 2.0 M_{\odot}$ y radio $R_{NS} = 11 \text{ km}$ está orbitando en una órbita circular de radio a alrededor del centro de la estrella OB con velocidad $v_{orb} = 1.5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ (ver la figura debajo). A lo largo de este problema se asume que la pérdida de masa de la estrella OB es esféricamente simétrica, a una tasa de $\dot{M}_{OB} = 1.0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.



- (T07.1) El radio de acreción, R_{acc} , se define como la distancia máxima desde la NS a la cual el viento estelar puede ser capturado por la NS. Si la velocidad del viento estelar a la distancia orbital de la NS es $v_w = 3.0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$, encuentre R_{acc} para el sistema anterior en km, usando el cálculo estándar de velocidad de escape. **[3]**
- (T07.2) Suponiendo que todo el material capturado es acretado por la NS, estime la tasa de acreción de masa, \dot{M}_{acc} , del viento estelar hacia la NS, en unidades de $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, si $a = 0,5 \text{ au}$. Ignore los efectos de la presión de radiación y el tiempo de enfriamiento finito del gas siendo acretado. **[3]**
- (T07.3) Ahora considere una situación en que la velocidad del viento estelar a la distancia orbital a (cerca de la NS) se hace comparable a la velocidad orbital de la NS. La tasa de acreción de masa del viento estelar sobre la NS en este caso estaría dada por una expresión de la forma $\dot{M}_{acc} = \dot{M}_{OB} f(\tan \beta, q)$, donde $q = M_{NS}/M_{OB}$ es la razón de masa del sistema binario y β es el ángulo en el marco de la NS entre la dirección de la velocidad del viento y la dirección radial alejándose de la estrella OB. Obtenga la expresión para $f(\tan \beta, q)$, asumiendo $M_{OB} \gg M_{NS}$. **[6]**

(T07.4) Considere que el material completamente ionizado es acregado radialmente y es obstaculizado debido al fuerte campo magnético \vec{B} de la NS. Este efecto puede modelarse como una presión, dada por $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Supondremos que la NS tiene un campo magnético dipolar, cuya magnitud en el plano ecuatorial varía con la distancia r desde la NS, para $r \gg R_{NS}$, como

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{NS}}{r} \right)^3$$

, donde B_0 es el campo magnético en el ecuador de la NS. Suponga que el eje del dipolo magnético se alinea con el eje de rotación de la NS.

(T07.4a) Obtenga la presión magnética, $P_{eq, mag}$, en el plano ecuatorial en términos de B_0 , R_{NS} , r , y otras constantes convenientes. [1]

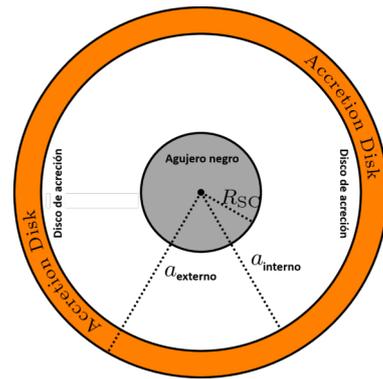
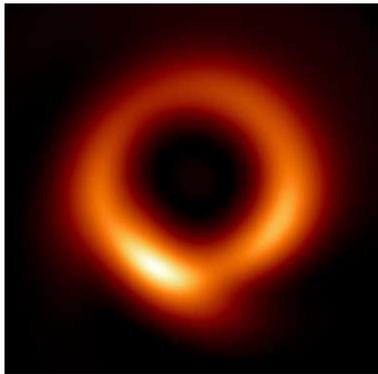
(T07.4b) La distancia máxima donde el flujo de acreción es detenido por el campo magnético en el ecuador se llama el radio magnetosférico R_m . Este flujo de materia ejercerá una presión debido al movimiento relativo entre el viento estelar entrante y la NS. Obtenga una expresión aproximada para el campo magnético crítico $B_{0, c}$ para el cual R_m coincide con R_{acc} y calcule su valor en Teslas. Los efectos magnéticos se desprecian para $r > R_m$ y considere $v_w \gg v_{orb}$. [7]

(T08) Sombra de un agujero negro

[20 puntos]

El Event Horizon Telescope (EHT) ha publicado una imagen del agujero negro supermasivo situado en el centro de la galaxia M87, como se muestra en el panel izquierdo de la siguiente figura.

Para comprender algunas características sencillas de esta imagen, consideraremos un modelo simplificado de un agujero negro no giratorio, estático y esféricamente simétrico de masa $M = 6.5 \times 10^9 M_\odot$, rodeado por un disco de acreción plano, delgado y sin masa, de radios interior y exterior $a_{interno} = 6R_{SC}$ y $a_{externo} = 10R_{SC}$, respectivamente, donde R_{SC} es el radio de Schwarzschild. En el panel derecho de la siguiente figura se muestra un esquema de la vista frontal (la figura no está a escala).



Suponemos que el disco de acreción es la única fuente de luz a considerar. Cada punto del disco emite luz en todas direcciones. Esta luz viaja bajo la influencia del campo gravitatorio del agujero negro. La trayectoria de los rayos de luz se rige por dos ecuaciones dadas a continuación (que son similares a las de un objeto alrededor del Sol):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

donde $r \in (R_{SC}, \infty)$ es la coordenada radial, $\phi \in [0, 2\pi)$ es el ángulo acimutal, y E y L son constantes relacionadas con la energía conservada y el momento angular conservado, respectivamente.

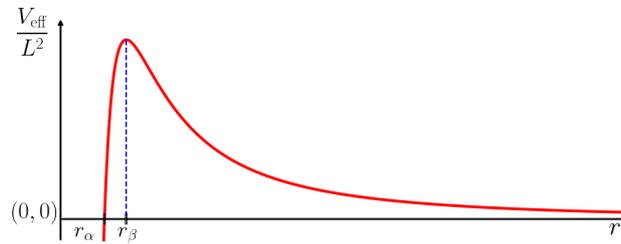
Aquí $v_r \equiv dr/dt$ es la magnitud de la velocidad radial, v_ϕ es la magnitud de la velocidad tangencial, y $\omega \equiv d\phi/dt$ es la velocidad angular. Definimos el parámetro de impacto b para una trayectoria como $b = L/\sqrt{2E}$. En este

problema se desprecia la dilatación del tiempo.

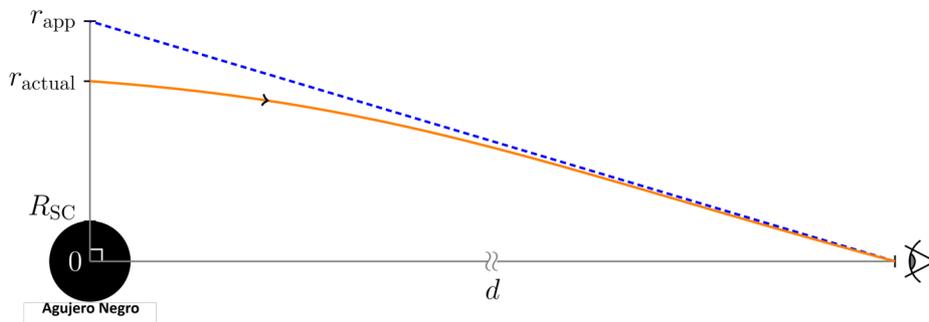
Otra ecuación útil se obtiene diferenciando la primera ecuación:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

- (T08.1) Pueden existir trayectorias circulares de luz alrededor del agujero negro. Encuentre el radio, r_{ph} , y el parámetro de impacto, b_{ph} , para tales trayectorias de fotones, en términos de M y constantes relevantes. [4]
- (T08.2) Calcular el tiempo, en segundos, T_{ph} , necesario para completar una órbita completa de la trayectoria circular de la luz. [2]
- (T08.3) La ecuación de la velocidad radial dada anteriormente (la primera ecuación en esta pregunta) se puede comparar con una ecuación de la forma $\frac{v_r^2}{2} + V_{eff}(r) = E$ para trayectorias de luz. A continuación se muestra un diagrama esquemático de V_{eff}/L^2 en función de r .



- (T08.3a) El gráfico indica dos radios especiales, r_α y r_β . Obtener expresiones para r_α y r_β en términos de M y las constantes pertinentes. [2]
- (T08.3b) Un fotón que viaja hacia el interior desde el disco de acreción hacia el agujero negro todavía puede escapar hacia el infinito en algunos casos. Encuentre la expresión para el valor más pequeño del radio del punto de inflexión, r_t , para tal fotón, en términos de M y las constantes relevantes. Encuentre la expresión para el valor mínimo del parámetro de impacto, b_{min} , para este fotón. [3]
- (T08.4) Un rayo de luz procedente de un radio r_{actual} del centro del sistema en el plano del cielo sufrirá una fuerte curvatura debido a la gravedad del agujero negro, y finalmente alcanzará a un observador (denotado por un ojo) a una gran distancia d del sistema, como se muestra a continuación.

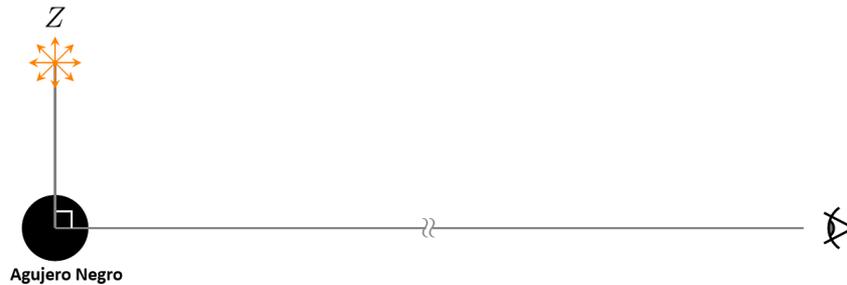


Para este observador, el rayo parecería haberse originado en un punto diferente a una distancia $r_{app} \approx b$ del centro del agujero negro en el plano del cielo, donde b es el parámetro de impacto para esa trayectoria del fotón. Para puntos en el disco de acreción a $r = r_{actual}$, se puede suponer la siguiente relación

$$b(r_{actual}) \approx r_{actual} \left(1 + R_{SC}/r_{actual}\right)^{1/2}$$

Para un observador lejano, como nosotros, con una vista frontal del disco de acreción, la imagen del sistema parecerá circularmente simétrica en el plano del cielo. Determine el radio aparente más exterior, r_{externo} , y el radio aparente más interior, r_{interno} , de la imagen en unidades de UA. [5]

- (T08.5) Consideremos un agujero negro supermasivo aislado de masa $M = 6.5 \times 10^9 M_{\odot}$ sin disco de acreción. Durante 5 s se produce un breve y fuerte estallido de radiación electromagnética en un punto Z situado a una distancia, digamos, $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ del agujero negro, como se muestra en la figura. El estallido en el punto Z emite luz en todas direcciones. Un observador situado en un punto alejado del agujero negro (representado por un ojo en la figura siguiente) toma una imagen de larga exposición de la región que rodea al agujero negro durante 60 s.



Elija la opción correcta para cada una de las afirmaciones siguientes:

- (T08.5a) El número de caminos posibles para que la luz viaje desde Z hasta el observador es [2]
 (A) Como máximo uno (B) Exactamente uno (C) Exactamente dos (D) Mayor que dos.
- (T08.5b) El número de imágenes de la ráfaga EM en Z que se verán en la imagen de larga exposición es [2]
 (A) Como máximo una (B) Exactamente una (C) Exactamente dos (D) Mayor que dos.

(T09) Visión atmosférica

[35 puntos]

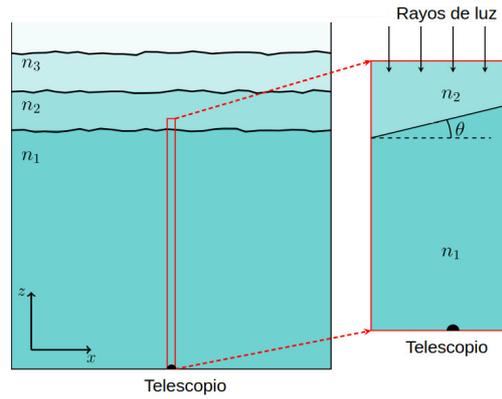
Un telescopio con un objetivo convexo acromático de diámetro $D = 15$ cm y longitud focal $f = 200$ cm se apunta a una estrella en el cenit.

- (T09.1) Encuentra el diámetro (en m), d_{image} , de la imagen de una fuente puntual producida por la lente del objetivo en su plano focal para luz verde ($\lambda = 550$ nm), considerando solo los efectos de difracción. [1]

La imagen de una fuente astronómica también se ve afectada por el llamado “seeing atmosférico”.

Los límites entre las capas de la atmósfera, así como sus índices de refracción, cambian continuamente debido a la turbulencia, las variaciones de temperatura y otros factores. Esto produce pequeños cambios en la posición de la imagen en el plano focal del telescopio, conocidos como “efecto centelleo”. Para el resto del problema, salvo el uso del tamaño finito de la imagen de la estrella, limitado por la difracción (como se mencionó anteriormente), no se considerarán efectos de interferencia.

El panel izquierdo de la figura a continuación muestra una sección transversal vertical de la atmósfera con múltiples capas de diferentes índices de refracción (n_1, n_2, n_3, \dots). El panel derecho muestra la vista ampliada de un segmento vertical delgado de la atmósfera y el límite entre las dos capas atmosféricas más bajas de índices de refracción n_1 y n_2 ($n_1 > n_2$). Consideramos solo estas dos capas y su límite para este problema. Los diagramas no están a escala.

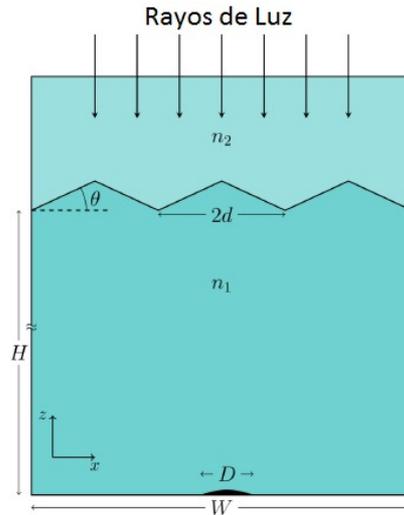


- (T09.2) Sea el límite entre las dos capas a una altura $H = 1$ km directamente sobre el objetivo del telescopio, con una inclinación de $\theta = 30^\circ$ con respecto al plano horizontal. En todas las partes de este problema, θ se considera positivo en sentido antihorario. Para una fuente de luz monocromática, $n_1 = 1,00027$ y $n_2 = 1,00026$. Sea α el desplazamiento angular de la imagen en el plano focal del telescopio para una estrella en el cenit.
- (T09.2a) Dibuje un diagrama de rayos apropiadamente etiquetado en el límite que muestre n_1 , n_2 , θ y α . [2]
- (T09.2b) Determine la expresión para α en términos de θ , n_1 y n_2 . Utiliza las aproximaciones de ángulos pequeños: $\sin \alpha \approx \alpha$ y $\cos \alpha \approx 1$. [2]
- (T09.2c) Calcule el desplazamiento, Δx_θ (en m), en la posición de la imagen si θ aumenta un 1% (manteniendo n_1 y n_2 fijos). [3]
- (T09.2d) Calcule el desplazamiento, Δx_n (en m), en la posición de la imagen si n_2 aumenta un 0,0001% (manteniendo n_1 y θ fijos). [3]
- (T09.3) Para la luz blanca proveniente de una estrella en el cenit, elija cuál de las siguientes opciones describe mejor la forma y el color de la imagen marcando (✓) la casilla correspondiente (solo una) en la Hoja de Respuestas del Resumen. Observe que x aumenta de izquierda a derecha en la figura. [2]

	Color de la imagen	Forma de la imagen	Borde izquierdo	Borde derecho
A	Blanco	Circular		
B	Blanco	Elíptico		
C	Coloreada	Circular	Azul	Rojo
D	Coloreada	Circular	Rojo	Azul
E	Coloreada	Elíptico	Azul	Rojo
F	Coloreada	Elíptico	Rojo	Azul

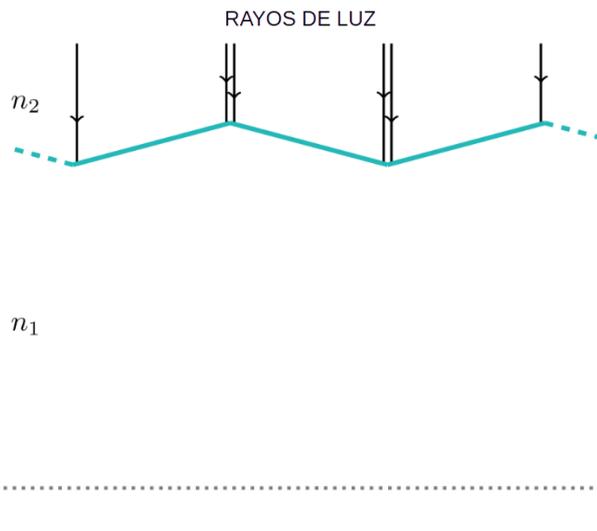
Para todas las partes restantes de esta pregunta, consideraremos luz monocromática de color verde con una longitud de onda $\lambda = 550\text{nm}$. Modelaremos la frontera entre las capas como un conjunto de planos en zigzag infinitos (orientados perpendicularmente al plano de la página), separados por una distancia $d = 10$ cm a lo largo del eje x , con un ángulo $\theta = 10^\circ$ o bien $\theta = -10^\circ$.

La figura mostrada a continuación (no a escala) representa una sección transversal de este modelo de la atmósfera, de ancho W (con $W \ll H$). En telescopios de gran apertura, esta geometría en zigzag de la frontera provoca la formación de *speckles* (patrones de moteado) en el plano focal.



(T09.4) Consideremos una atmósfera modelada como se indica arriba.

(T09.4a) Una sección de la atmósfera con planos en zigzag consecutivos, con los mismos parámetros mencionados anteriormente, se muestra en el diagrama a continuación (no a escala).



En este diagrama, reproducido en la Hoja de Respuestas Resumida, dibuja las trayectorias de los rayos de luz incidentes hasta el plano donde se coloca el objetivo del telescopio, mostrado por la línea de puntos gris.

Marca la(s) región(es), si las hay, con una "X" en el diagrama donde no llegarán rayos de luz. [4]

(T09.4b) Calcula el ancho W_X de dicha(s) región(es). [3]

(T09.4c) Encuentre el diámetro más grande, D_{max} , del objetivo del telescopio con el cual será posible obtener una sola imagen de una estrella, eligiendo apropiadamente la posición del telescopio con respecto a la estructura de la frontera. [4]

(T09.5) Consideremos el caso en el que se permite la forma en zigzag del límite en ambas direcciones x e y (como un campo de pirámides), y $D = 100$ cm (con $f = 200$ cm). [6]

Dibuje el patrón cualitativo de las motas resultantes en el cuadro que figura en la Hoja de respuestas del resumen.

- (T09.6) Para una atmósfera turbulenta, considérese nuevamente la misma forma de zigzag paralela de la capa límite, solo a lo largo de la dirección x , pero ahora el ángulo entre dos planos cambia a una velocidad uniforme de 10° a -10° en 1,0 s. Suponga que esto produce una velocidad uniforme de desplazamiento de la posición de la imagen. [5]

Considere un telescopio con $D = 8$ cm y $f = 1$ m. Calcule el tiempo de exposición máximo t_{\max} permitido para su cámara CCD de modo que se obtenga una sola imagen y cualquier posible desviación en su posición sea inferior al 1% del diámetro de la imagen limitado por difracción.

(T10) Nucleosíntesis del Big Bang

[35 puntos]

Durante la era dominada por la radiación en el Universo temprano, el factor de escala del Universo $a \propto t^{1/2}$, donde t es el tiempo desde el Big Bang. Durante la mayor parte de esta era, los neutrones (n) y protones (p) permanecen en equilibrio térmico entre sí a través de interacciones débiles. La densidad numérica (N) de neutrones o protones libres está relacionada con la temperatura T y con sus masas correspondientes m de tal manera que

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

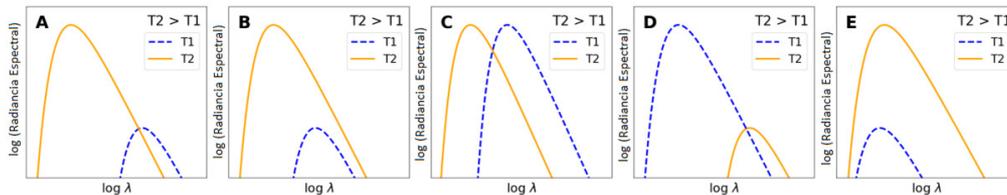
siempre que el tiempo $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70$ s, cuando $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV. Después de t_{wk} , las interacciones débiles ya no pueden mantener tal equilibrio, y los neutrones libres decaen a protones con un tiempo de vida medio de 610,4 s.

- (T10.1) Sea la densidad numérica de protones N_p , y la de neutrones N_n . Calcule la abundancia relativa de neutrones dada por la razón $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ en el tiempo t_{wk} . [4]

- (T10.2) Los fotones mantienen el equilibrio térmico y conservan un espectro de cuerpo negro en todas las épocas.

- (T10.2a) Encuentra el índice β , tal que $T(a) \propto a^\beta$. [2]

- (T10.2b) Identifica cuál de los siguientes gráficos muestra el comportamiento correcto de la densidad espectral de energía para dos temperaturas T_1 y T_2 . Marca (\checkmark) la opción correcta en la Hoja de Respuestas. [2]



- (T10.3) Después de t_{wk} , el proceso de formación de deuterio a partir de protones y neutrones está gobernado por la ecuación de Saha, dada por el físico indio Prof. Meghnad Saha, que puede simplificarse como

$$\frac{N_D}{N_n} = 6,5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T}\right).$$

Aquí, la razón de bariones a fotones η es 6.1×10^{-10} , y N_D es la densidad numérica de deuterio.

- (T10.3a) Grafique la relación N_D/N_n en la cuadrícula de la Hoja de Respuestas, para al menos 4 valores de temperatura razonablemente espaciados que se encuentren en el dominio $k_B T = [60, 70]$ keV, y dibuje una curva suave que pase por estos puntos. [5]

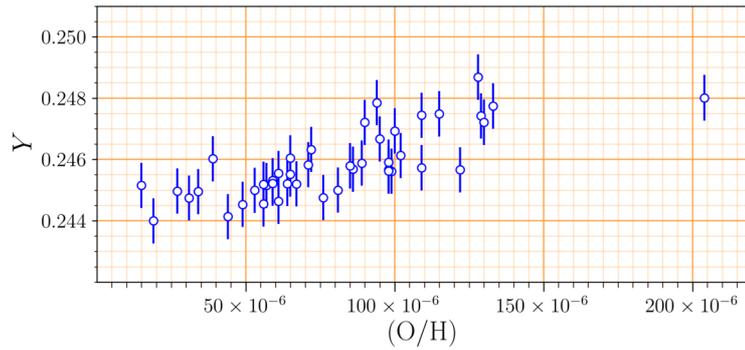
(T10.3b) A partir de la gráfica, encuentre $k_B T_{\text{nuc}}$ (en keV), donde $N_D = N_n$. [1]

(T10.3c) En cambio, ahora asuma que todos los neutrones libres se combinan instantáneamente con los protones en $k_B T_{\text{nuc}}$ para formar deuterio, todo el cual se convierte inmediatamente en helio (${}^4_2\text{He}$). Calcule la época o tiempo correspondiente de nucleosíntesis, t_{nuc} (en s), para la formación de helio. [4]

(T10.4) Calcule el valor de $X_{n, \text{nuc}}$ inmediatamente antes de t_{nuc} . [5]

(T10.5) La abundancia primordial de helio, Y_{prim} , se define como la fracción de la masa total en el Universo que está en forma de helio justo después de t_{nuc} . Obtenga una estimación teórica para el valor de Y_{prim} . Para el único propósito de este cálculo, asuma $m_p \approx m_n$ y que la masa del helio $m_{\text{He}} \approx 4m_n$. [3]

(T10.6) La abundancia primordial de helio es muy difícil de medir, ya que las estrellas convierten continuamente hidrógeno en helio en el Universo. La cantidad de procesamiento por las estrellas en una galaxia se caracteriza por la densidad numérica relativa de oxígeno (que solo es producido por estrellas) a hidrógeno, denotada como (O/H), en la galaxia. Una compilación de las mediciones de (O/H) y la abundancia de Helio, Y , para diferentes galaxias se muestra a continuación.



Utiliza todos los puntos en este gráfico (que se reproduce en la Hoja de Respuestas) para responder lo siguiente.

(T10.6a) Estima Y para una galaxia enana compacta azul con un valor de $(\text{O}/\text{H})=1,75 \times 10^{-4}$. [2]

(T10.6b) Obtenga la pendiente $dY/d(\text{O}/\text{H})$ del ajuste lineal a los datos anteriores. [2]

(T10.6c) Estime la abundancia primordial de helio, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, basada en las observaciones anteriores. [2]

(T10.7) La desviación entre Y_{prim} y $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ puede reconciliarse cambiando la razón de bariones a fotones η . Cuando η se disminuye, como se indica por \downarrow en la Hoja de Respuestas, indique el aumento (\uparrow) o disminución (\downarrow) en $N_D/N_n(T)$, T_{nuc} (cuando $N_D = N_n$), t_{nuc} , $X_{n, \text{nuc}}$, y Y_{prim} en los cuadros proporcionados en la Hoja de Respuestas. [3]

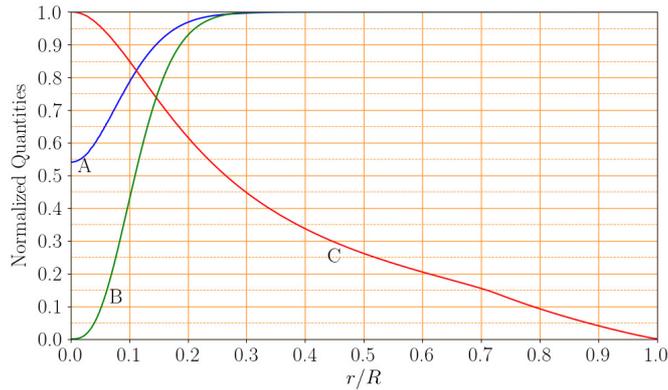
(T11) Estrellas a través de gráficos [50 puntos]

Las estrellas pueden aproximarse bien como objetos esféricamente simétricos y, por lo tanto, la distancia radial r desde el centro puede ser elegida como la única variable independiente al modelar interiores estelares. La masa contenida dentro de una esfera de radio r se denota por $m(r)$. La luminosidad $l(r)$ se define como la energía neta que fluye hacia el exterior a través de una superficie esférica de radio r por unidad de tiempo. Otras cantidades de interés, por ejemplo, la densidad $\rho(r)$, la temperatura $T(r)$, la fracción de masa de hidrógeno $X(r)$, la fracción de

masa de helio $Y(r)$, y la energía nuclear generada por unidad de masa por unidad de tiempo $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, se toman como funciones de r . A lo largo de este problema despreciaremos los efectos de la difusión y la sedimentación gravitatoria de los elementos en el interior de la estrella. El símbolo "log" se refiere al logaritmo en base 10. El problema consiste en tres partes independientes.

(T11.1) Parte 1: Dentro de una estrella

El gráfico a continuación muestra la variación de tres cantidades estructurales, A, B y C, como funciones del radio fraccional r/R en un modelo estelar de masa $1 M_{\odot}$ y edad 4 GYr, donde R es el radio fotosférico de la estrella. Los valores de la fracción de masa de helio en la superficie (fotosférica), Y_s , y la metalicidad (fracción de masa de todos los elementos más pesados que el helio) en la superficie (fotosférica), Z_s , de la estrella están dados por $(Y_s, Z_s) = (0.28, 0.02)$. Todas las cantidades mostradas en el gráfico están normalizadas por sus valores máximos respectivos.



(T11.1a) Identifique las tres cantidades A, B y C únicamente de entre las cinco posibilidades: [6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Escriba A/B/C en las casillas junto a las cantidades apropiadas en las Hojas de Respuestas Resumidas. No es necesario justificar su respuesta).

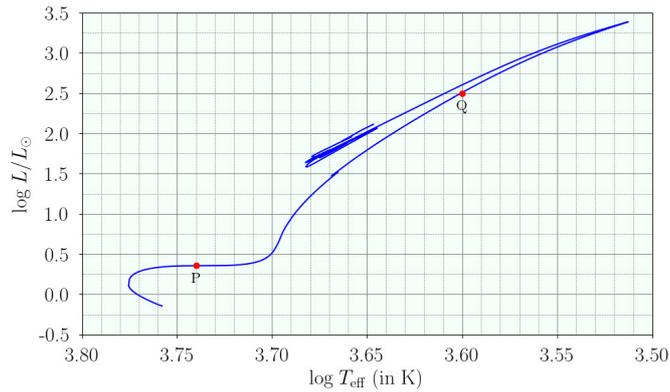
(T11.1b) ¿Cuál es la fracción de masa de helio en el centro, Y_c , de la estrella? [3]

(T11.1c) Dibuje las dos cantidades restantes de la lista de cinco (que no fueron identificadas como curvas A, B o C) dadas en (T11.1a), como funciones de r/R en el mismo gráfico de las Hojas de Respuestas Resumidas, y etiquételas con sus cantidades respectivas. [5]

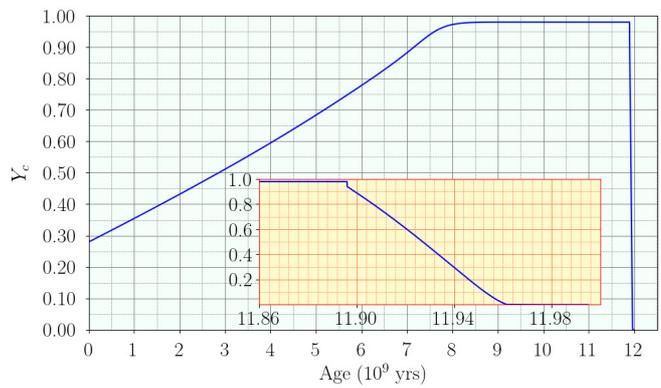
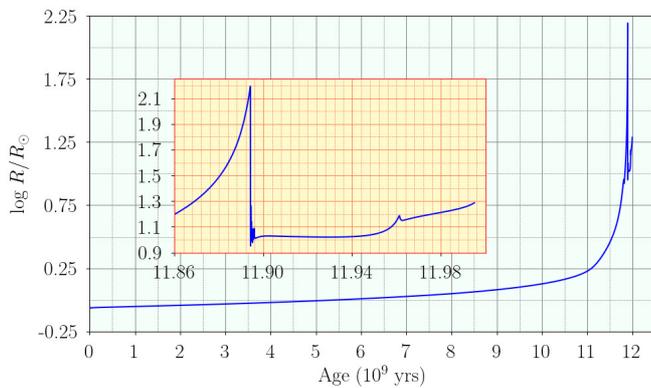
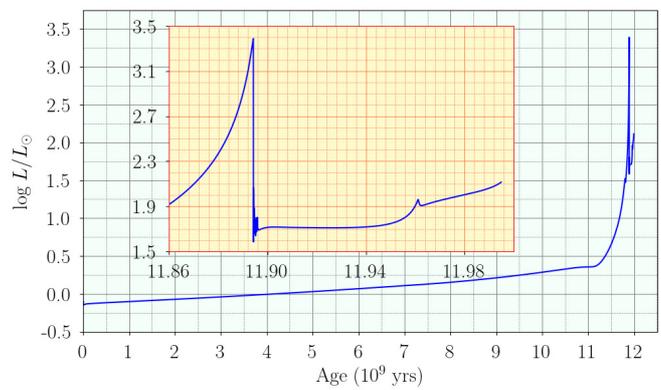
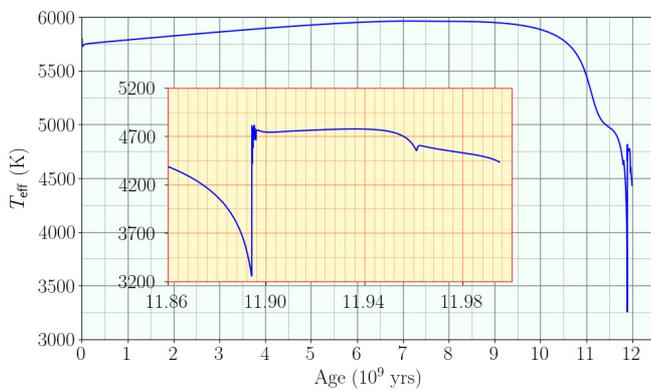
(T11.2) Parte 2: Estrellas en evolución

Consideremos la evolución de una estrella de $1M_{\odot}$ cuya composición uniforme inicial viene dada por las fracciones de masa de helio, $Y_0 = 0.28$, y metales, $Z_0 = 0.02$. Las siguientes figuras muestran la variación de diferentes cantidades globales de esta estrella a medida que evoluciona de ZAMS (Zero Age Main Sequence, Secuencia Principal de Edad Cero) hasta el final de la combustión de helio en su núcleo.

El siguiente gráfico muestra la trayectoria evolutiva de la estrella en el diagrama HR (diagrama de $\log L/L_{\odot}$ vs $\log T_{\text{eff}}$, donde L es la luminosidad superficial y T_{eff} es la temperatura efectiva).



La siguiente figura tiene cuatro gráficos que muestran la variación de T_{eff} (en K), L (representado como $\log L/L_{\odot}$), R (representado como $\log R/R_{\odot}$), y Y_c con la edad (en 10^9 yr) de la misma estrella. En cada uno de estos cuatro gráficos, los recuadros internos muestran en detalle las variaciones de las cantidades respectivas entre las edades de 11.86×10^9 años y 12.00×10^9 años para mayor claridad.



Utilice estos gráficos para responder a las siguientes preguntas.

- (T11.2a) ¿Cuál es el tiempo de vida aproximada de la estrella en la secuencia principal, t_{MS} (en años)? [1]
- (T11.2b) ¿Cuál es la duración aproximada, Δt_{He} (en años), durante la cual la estrella quema helio en su núcleo? [1]
- (T11.2c) ¿Qué fracción, f_{H} , del hidrógeno original en su centro ha sido quemada cuando la luminosidad de la estrella es $1 L_{\odot}$? [3]
- (T11.2d) ¿Cuál es el radio de la estrella, R_1 (en unidades de R_{\odot}) cuando se ha quemado 60% de la cantidad inicial de hidrógeno en su centro? [3]

(T11.2e) ¿Cuáles son los radios de la estrella, R_P y R_Q (en unidades de R_\odot), correspondientes a sus posiciones P y Q, respectivamente, como están marcadas en el diagrama HR? **[4]**

(T11.3) Parte 3: Distribución de masa dentro de una estrella

La ecuación que gobierna la distribución de masa dentro de una estrella está dada por

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Sería conveniente expresar esta ecuación en términos de tres variables adimensionales que son la masa fraccionaria, q , el radio fraccionario, x , y la densidad relativa, σ , que definimos como

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

donde M y R son la masa total y el radio de la estrella, respectivamente, y $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ es la densidad promedio de la estrella. Para la estrella particular que consideraremos en esta parte, se da la siguiente información:

- La densidad central $\rho(x = 0) = 80\bar{\rho}$
- La mitad de la masa de la estrella está contenida dentro del 25% interior de su radio total, y el 70% de su masa está contenida dentro del 35% interior de su radio total.

En todas las partes subsiguientes de esta pregunta, será suficiente redondear todos los coeficientes numéricos derivados dentro de 0.005.

(T11.3a) Exprese la ecuación anterior que describe la dependencia de la masa con el radio en términos de x , $\frac{dq(x)}{dx}$ y $\sigma(x)$. **[2]**

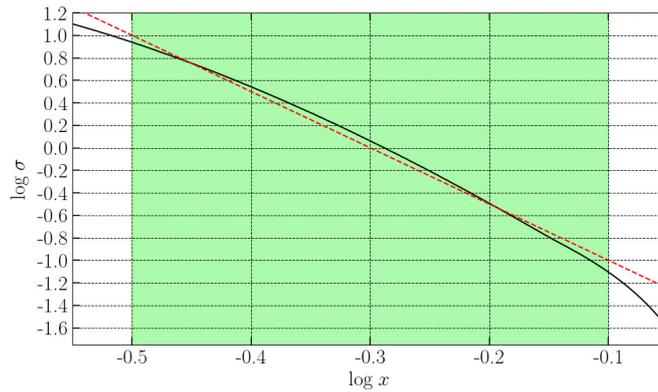
Para obtener la distribución de la masa con el radio, necesitamos conocer el perfil de densidad en el interior de la estrella. Para el propósito de este problema, describiremos la variación de la densidad con el radio mediante formas aproximadas en dos dominios de x :

- la parte interior de la estrella $0 \leq x \leq 0.32$
- la parte media de la estrella $0.32 < x < 0.80$

No hacemos ninguna aproximación para la parte más externa, es decir, $0.80 \leq x \leq 1.00$.

(T11.3b) Aproximación para la parte central:

La variación de $\log \sigma$, en función de $\log x$ en la parte media de la estrella se muestra (mediante la curva negra) en el gráfico siguiente. Vamos a realizar una aproximación lineal (mostrada como una línea discontinua roja en el gráfico) para $\log \sigma$ como una función de $\log x$ en el dominio $-0.5 < \log x < -0.1$, es decir, $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (mostrado por el dominio sombreado verde). Además, vamos a aproximar la pendiente de esta línea por el número entero más cercano.



Use esta aproximación para escribir una expresión para $\sigma(x)$ como una función de x [4]
en el dominio $0.32 < x < 0.80$.

(T11.3c) Use el resultado de (T11.3b) para derivar una expresión para $q(x)$ en el dominio [6]
 $0.32 < x < 0.80$.

(T11.3d) **Aproximación para la parte interior:**

En la parte interior de la estrella ($0 \leq x \leq 0.32$), la densidad puede aproximarse como [8]
una función lineal del radio, es decir, $\sigma(x) = Ax + B$, donde A, B son constantes.
Determine A y B , y entonces obtenga una expresión para $q(x)$ en el dominio
 $0 \leq x \leq 0.32$. Note que las aproximaciones adoptadas en la parte anterior y en esta
parte pueden conducir a pequeñas discontinuidades en densidad o masa en $x = 0.32$.

(T11.3e) Las expresiones para $q(x)$ obtenidas en las partes (T11.3c) y (T11.3d) son [4]
aproximaciones que describen bastante bien la variación de la masa con el radio, pero
solo en regiones específicas de la estrella. Para el dominio $0.80 \leq x \leq 1$ (para el que
no se ha derivado ninguna expresión), es posible utilizar una extrapolación apropiada
de la región vecina. Utilice estas expresiones aproximadas y los datos dados para trazar
una curva suave (sin discontinuidades ni en $q(x)$ ni en su derivada) para $q(x)$ vs x
para toda la estrella ($0 \leq x \leq 1$) que represente la variación de la masa con el radio.

(T12) Radiación de Hawking de los Agujeros Negros

[50 puntos]

(T12.1) Un agujero negro (BH, por sus siglas en inglés) típicamente se forma por el colapso gravitacional de
una estrella masiva al final de su ciclo de vida hasta un punto llamado singularidad. Debido a la
gravedad extrema de tal objeto, nada que ingrese en el llamado horizonte de eventos (una
superficie esférica con $r = R_{SC}$, donde r es la distancia desde la singularidad) puede escapar de él.
Aquí, R_{SC} se refiere al radio de Schwarzschild.

(T12.1a) **Modelando el origen de la radiación de Hawking:** Considere un par de partículas, cada
una con masa m , producidas a ambos lados del horizonte del BH. Una partícula está
ligeramente fuera del horizonte en $r \approx R_{SC}$, mientras que la otra partícula está dentro
del horizonte en $r = \kappa R_{SC}$. Suponga que la energía total de una partícula es la suma de
su energía de masa en reposo mc^2 y la energía potencial gravitatoria debido al BH.

Determine el valor de κ para el cual el par de partículas tiene energía total cero. [4]

(T12.1b) **Temperatura de un agujero negro:** Si la partícula producida fuera del horizonte en el
proceso anterior tiene suficiente energía cinética, puede escapar del BH en un proceso
llamado radiación de Hawking. La que está dentro del horizonte, que tiene energía
negativa, es absorbida y disminuye la masa del BH.

Supongamos que toda la radiación de Hawking está compuesta de fotones con un
espectro de cuerpo negro que alcanza su pico en la longitud de onda $\lambda_{bb} \approx 16R_{SC}$. Se
sabe que para un BH de masa solar, $R_{SC, \odot} = 2.952$ km.

Obtenga una expresión para la temperatura, T_{bh} , del BH correspondiente a esta radiación de cuerpo negro, en términos de su masa M_{bh} y constantes físicas. Calcule el radio de Schwarzschild, $R_{SC, 10\odot}$, y la temperatura, $T_{bh, 10\odot}$, para un BH con masa $10 M_{\odot}$. [4]

(T12.1c) **Pérdida de masa de un agujero negro:** Suponga que la radiación de Hawking es emitida desde el horizonte de eventos.

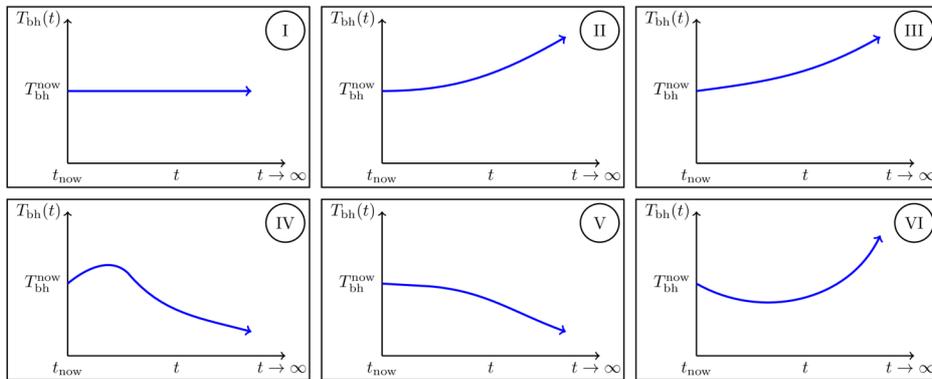
Usando la equivalencia masa-energía, obtenga una expresión para la tasa de pérdida de masa, $dM_{bh}(t)/dt$, en términos de la masa $M_{bh}(t)$ del BH y constantes físicas.

A partir de esto obtenga una expresión para $M_{bh}(t)$ para un BH con masa inicial M_0 . [8]
Dibuje $M_{bh}(t)$ como una función de t desde $M_{bh} = M_0$ hasta $M_{bh} = 0$.

(T12.1d) **Tiempo de vida de un agujero negro:** Obtén una expresión para el tiempo de vida τ_{BH} en la que un agujero negro con masa inicial M_0 se evapora completamente debido a la radiación de Hawking en términos de M_0 y constantes físicas. Calcule el tiempo de vida $\tau_{bh, 10\odot}$ (en segundos) para un agujero negro con $M_0 = 10 M_{\odot}$. [3]

(T12.1e) **Agujero negro en un baño de radiación cósmica de fondo (CMB, por sus siglas en inglés):** Considere un agujero negro aislado en el espacio, lejos de otros cuerpos, con una temperatura actual T_{bh}^{now} , rodeado por el CMB con una temperatura actual $T_{cmb}^{now} = 2.7$ K. El agujero negro puede aumentar su masa absorbiendo radiación CMB y perder su masa por radiación de Hawking.

Teniendo en cuenta la expansión acelerada del Universo, identifique cuál de las siguientes figuras muestra la evolución en el tiempo de T_{bh} en los siguientes tres casos: (X) $T_{bh}^{now} > T_{cmb}^{now}$, (Y) $T_{bh}^{now} = T_{cmb}^{now}$, (Z) $T_{bh}^{now} < T_{cmb}^{now}$.



Indique su respuesta marcando la casilla correspondiente (solo una) para cada caso X, Y y Z en la Tabla dada en la Hoja de Respuestas Resumida, al número de figura apropiado. [6]

(T12.2) Los agujeros negros primordiales (PBHs, por sus siglas en inglés) de masas mucho más pequeñas pudieron haberse formado en el Universo temprano. Todas las siguientes preguntas están relacionadas con los PBHs y puede ignorar cualquier proceso que pueda generar el aumento de la masa del agujero negro.

(T12.2a) **PBH evaporándose en la época actual:** Como habrá notado en las respuestas a las preguntas anteriores, los agujeros negros de masa solar tardarían mucho tiempo en evaporarse. Sin embargo, dado que los PBHs pueden tener una masa mucho menor, podríamos verlos evaporarse en tiempos actuales.

Encuentre la masa inicial $M_{0, \text{PBH}}$ (en kg), el radio de Schwarzschild $R_{\text{SC, PBH}}$ (en m) [4] y la temperatura T_{PBH} (en K) de un agujero negro que podría estar evaporándose completamente en la época actual, es decir, aquellos con una vida útil de $\tau_{\text{PBH}} = 14$ mil millones de años.

(T12.2b) **Formación de un PBH:** En el Universo temprano dominado por la radiación, el factor de escala varía en el tiempo de acuerdo a $a(t) \sim t^{1/2}$. En esta era, los PBH se forman debido al colapso de toda la energía contenida en una región de tamaño físico ct , donde t es la edad del Universo en ese momento.

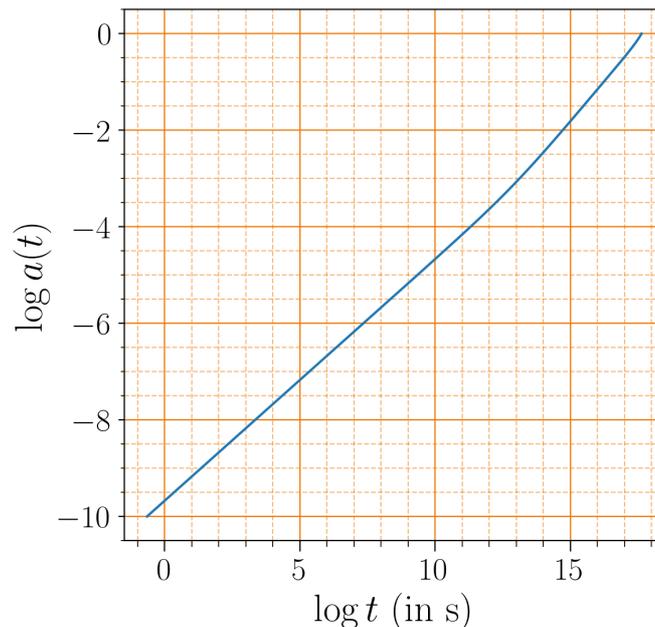
Un PBH con una masa de 1×10^{12} kg se forma cuando la edad del Universo es de [6] aproximadamente 1×10^{-23} s. Calcule la edad del Universo, t_{20} , cuando se forma un PBH de masa 1×10^{20} kg.

(T12.2c) **Espectro observado de la radiación de Hawking de un PBH:** Considere un PBH de masa inicial 1×10^{10} kg que se evapora completamente al final de su tiempo de vida τ_{PBH} . Para esta parte, asuma por simplicidad que la mayor parte de la radiación de Hawking se emite en este momento, con una temperatura correspondiente a su masa inicial. Además, considere que el factor de escala del Universo evoluciona como $a(t) \sim t^{2/3}$.

Calcule la longitud de onda correspondiente al pico de esta radiación de Hawking [5] observada en la Tierra, λ_{earth} en la época actual (en $t = 14$ mil millones de años).

(T12.2d) **Radiación cósmica de alta energía de PBH:** Ahora suponga que la radiación de Hawking emitida en un momento dado t corresponde a fotones emitidos con una energía $k_B T_{\text{bh}}(t)$. Además, la temperatura más alta posible para un agujero negro es la temperatura de Planck T_{Planck} , donde $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV.

La evolución del factor de escala en escalas de tiempo relevantes se muestra en la siguiente figura. El factor de escala hoy es igual a uno. $t(s)$ en el eje del tiempo representa la edad del Universo en segundos.



Si se observa un fotón con una energía de $E_{\text{det}} = 3,0 \times 10^{20}$ eV en la Tierra, determine [10]
los valores más grande y más pequeño posibles de la masa inicial del PBH (M_0^{max} y
 M_0^{min} , respectivamente) que podrían ser responsables de la emisión de este fotón.