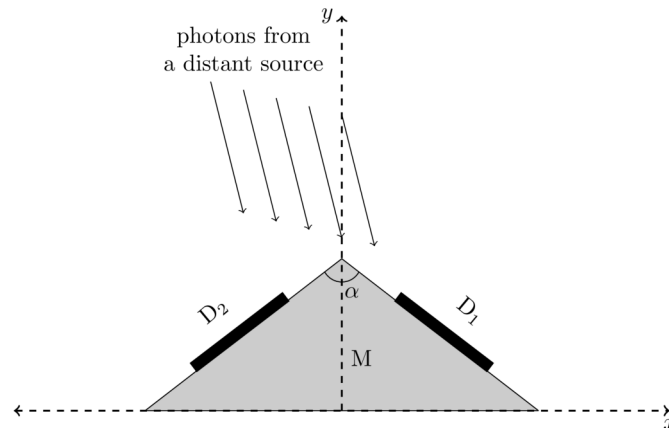


(T01) Daksha-Mission
(10 Punkte)

"Daksha" ist eine vorgeschlagene indische Mission, die aus zwei Satelliten S_1 und S_2 besteht, die die Erde auf derselben kreisförmigen Bahn mit einem Radius von $r = 7000$ km, aber mit einem Phasenunterschied von 180° umkreisen. Diese Satelliten beobachten das Universum im Hochenergiebereich (Röntgenstrahlen und γ -Strahlen). Jeder der Daksha-Satelliten verwendet mehrere flache, rechteckige Detektoren.

Um zu verstehen, wie eine Quelle am Himmel lokalisiert werden kann, werden wir ein vereinfachtes Modell der Daksha-Mission verwenden. Nehmen wir an, dass S_1 nur zwei identische Detektoren D_1 und D_2 hat, jeder mit einer Fläche $A = 0,50$ m², die an einer undurchsichtigen Halterung M befestigt sind, wie in der Abbildung unten gezeigt. Die Detektoren liegen symmetrisch um die y -Achse in Ebenen senkrecht zur x - y -Ebene und bilden einen Winkel $\alpha = 120^\circ$ miteinander.



- (T01.1) Bei der Beobachtung einer weit entfernten Quelle, die sich in der x - y Ebene befindet, zeichnet der Detektor D_1 eine Leistung $P_1 = 2,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ und der Detektor D_2 eine Leistung $P_2 = 4,70 \times 10^{-10}$ J s⁻¹ auf.

Schätzen Sie den Winkel η , den der Positionsvektor der Quelle mit der positiven y -Achse bildet, [5]
wobei ein Winkel entgegen dem Uhrzeigersinn von der positiven y -Achse als positiv gilt.

Betrachten Sie einen einzelnen Puls von einer entfernten Quelle (nicht notwendigerweise in der x - y Ebene), der von beiden Daksha-Satelliten (S_1 und S_2) aufgezeichnet wurde. Die Zeitpunkte der Spitzenwerte der von S_1 und S_2 aufgezeichneten Pulse sind t_1 bzw. t_2 .

- (T01.2) Im Fall, dass $t_1 - t_2$ als $10,0 \pm 0,1$ ms gemessen wurde, bestimmen Sie den Anteil f der [5]
Himmelskugel, in dem die Quelle liegen könnte.

(T02) Makar-Sankranti
(10 Punkte)

Das Fest "Makar-Sankranti" wird in Indien gefeiert, wenn die Sonne von der Erde aus gesehen in den Tierkreisbereich des Steinbocks eintritt (Makar = Steinbock, Sankranti = Eintritt). Derzeit wird es jedes Jahr um den 14. Januar herum gefeiert. Vor vielen Jahren fiel dieses Fest auch mit der Wintersonnenwende in der nördlichen Hemisphäre zusammen, von der wir annehmen, dass sie am 21. Dezember stattfindet.

- (T02.1) Ermitteln Sie anhand der obigen Informationen das Jahr y_c , in dem die Feier dieses Festes zuletzt [3]
mit der Wintersonnenwende auf der Nordhalbkugel zusammenfiel.

- (T02.2) Wenn die Sonne am 14. Januar 2006 in Mumbai um 11:50:13 Uhr Ortszeit in den Tierkreis des [3]
Steinbocks eingetreten zu sein scheint, berechnen Sie das Datum D_{enter} und die Ortszeit t_{enter} ihres Eintritts in den Steinbock im Jahr 2013.

- (T02.3) Das Makar-Sankranti-Fest wird am Tag des ersten Sonnenuntergangs im Tierkreiszeichen Steinbock gefeiert. Man kann davon ausgehen, dass die lokale Sonnenuntergangszeit in Mumbai im Januar 18:30 Uhr ist.

Geben Sie das Datum der Feier des Festivals für jedes Jahr zwischen 2006 und 2013 an (indem Sie das entsprechende Kästchen in der Tabelle im zusammenfassenden Antwortbogen ankreuzen (✓)). [4]

(T03) Gravitationswellen

(15 Punkte)

Sich umkreisende binäre schwarze Löcher erzeugen Gravitationswellen. Betrachten Sie zwei Schwarze Löcher in unserer Galaxie mit den Massen $M = 36 M_{\odot}$ und $m = 29 M_{\odot}$, die sich auf kreisförmigen Bahnen mit einer Bahnwinkelfrequenz ω um ihr Massenzentrum drehen.

- (T03.1) Leiten Sie unter der Annahme der Newtonschen Gravitation einen Ausdruck für die Winkelfrequenz ω_{ini} der Bahnen der Schwarzen Löcher zu einem Zeitpunkt t_{ini} her, zu dem der Abstand zwischen den Schwarzen Löchern das 4,0-fache der Summe ihrer Schwarzschild-Radien beträgt, als Funktion nur von M , m und physikalischen Konstanten.

Berechnen Sie den Wert von ω_{ini} (in rad s^{-1}).

[5]

- (T03.2) In der allgemeinen Relativitätstheorie senden Schwarze Löcher auf ihrer Umlaufbahn Gravitationswellen mit einer Frequenz f_{GW} aus, sodass $2\pi f_{\text{GW}} = \omega_{\text{GW}} = 2\omega$. Dadurch schrumpfen die Bahnen der Schwarzen Löcher, was wiederum f_{GW} vergrößert. Die Änderungsrate von f_{GW} ist

$$\frac{df_{\text{GW}}}{dt} = \frac{96\pi^{8/3}}{5} G^{5/3} c^{\beta} M_{\text{chirp}}^{\alpha/3} f_{\text{GW}}^{\delta/3},$$

wobei $M_{\text{chirp}} = \frac{(mM)^{3/5}}{(m+M)^{1/5}}$ die "Chirp-Masse" genannt wird.

Ermitteln Sie die Werte von α , β und δ .

[4]

- (T03.3) Nehmen wir an, dass die mit dem Ereignis verbundenen Gravitationswellen zum ersten Mal zum Zeitpunkt $t_{\text{ini}} = 0$ nachgewiesen wurden. [6]

Leiten Sie einen Ausdruck für den beobachteten Zeitpunkt der Verschmelzung der Schwarzen Löcher, t_{merge} , her, wenn f_{GW} sehr groß wird, als Funktion nur von ω_{ini} , M_{chirp} und physikalischen Konstanten.

Berechnen Sie den Wert von t_{merge} (in Sekunden).

(T04) Balmer-Dekrement

[15 Punkte]

Betrachten wir einen Hauptreihenstern, der von einem Nebel umgeben ist. Die beobachtete V-Band-Helligkeit des Sterns beträgt 11,315 mag. Der ionisierte Bereich des Nebels in der Nähe des Sterns emittiert $\text{H}\alpha$ - und $\text{H}\beta$ -Linien; ihre Wellenlängen betragen $0,6563 \mu\text{m}$ bzw. $0,4861 \mu\text{m}$. Das theoretisch vorhergesagte Verhältnis der Flüsse in $\text{H}\alpha$ - zu $\text{H}\beta$ Linien beträgt $f_{\text{H}\alpha}/f_{\text{H}\beta} = 2,86$. Wenn diese Strahlung jedoch durch den äußeren Teil des kalten Staubnebels hindurchgeht, betragen die beobachteten Emissionsflüsse der Linien $\text{H}\alpha$ und $\text{H}\beta$ $6,80 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$ bzw. $1,06 \times 10^{-15} \text{ W m}^{-2}$.

Die Extinktion A_{λ} ist eine Funktion der Wellenlänge und wird wie folgt ausgedrückt

$$A_{\lambda} = \kappa(\lambda)E(BV).$$

Dabei ist $\kappa(\lambda)$ die Extinktionskurve und $E(BV)$ bezeichnet den Farbüberschuss in den Filterbändern B und V. Die Extinktionskurve (mit λ in μm) ergibt sich wie folgt.

$$\kappa(\lambda) = \begin{cases} 2.659 \times \left(-1.857 + \frac{1.040}{\lambda}\right) + R_V, & 0.63 \leq \lambda \leq 2.20 \\ 2.659 \times \left(-2.156 + \frac{1.509}{\lambda} - \frac{0.198}{\lambda^2} + \frac{0.011}{\lambda^3}\right) + R_V, & 0.12 \leq \lambda < 0.63 \end{cases}$$

wobei $R_V = A_V / E(BV) = 3.1$ das Verhältnis von totaler zu selektiver Extinktion ist.

(T04.1) Ermitteln Sie die Werte von $\kappa(H\alpha)$ und $\kappa(H\beta)$. [3]

(T04.2) Ermitteln Sie den Wert des Farbüberschussverhältnisses $\frac{E(H\beta - H\alpha)}{E(BV)}$. [4]

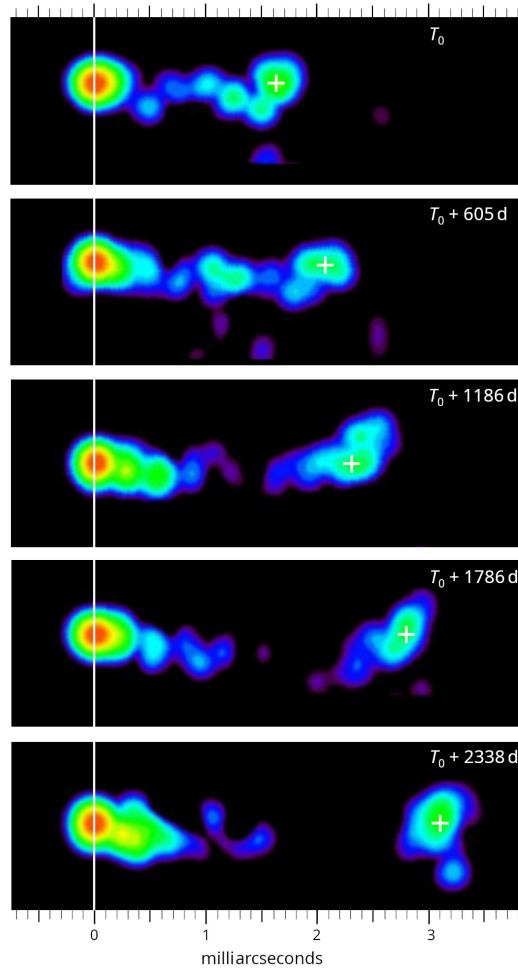
(T04.3) Schätzen Sie die Extinktion aufgrund der Nebel $A_{H\alpha}$ und $A_{H\beta}$ bei den Wellenlängen $H\alpha$ bzw. $H\beta$. [6]

(T04.4) Schätzen Sie die Extinktion des Nebels (A_V) und die scheinbare Helligkeit des Sterns im V-Band, m_{V0} , in Abwesenheit des Nebels. [2]

(T05) Quasare

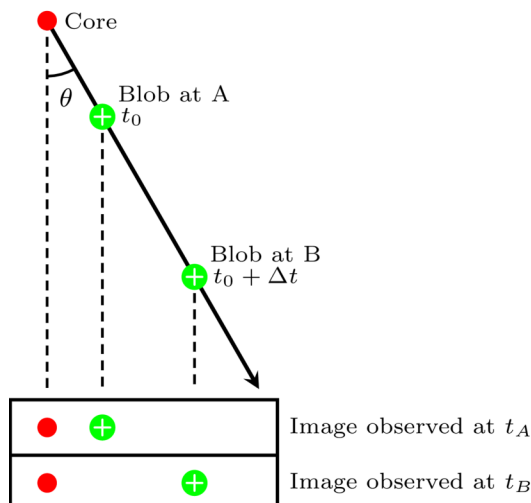
(20 Mark)

Ein Quasar ist eine extrem helle aktive Galaxie, die von einem supermassereichen schwarzen Loch angetrieben wird, das relativistische Jets aussendet. Die Abbildung zeigt eine Reihe von Radiobildern eines Quasars (mit Rotverschiebung $z = 0,53$ und Helligkeitsabstand $D_L = 1,00 \times 10^{10}$ ly) zu verschiedenen Zeiten. Der "Kern" ist anhand der vertikalen weißen Linie ausgerichtet, während sich ein Jet, bestehend aus einem "Blob" (weiß markiertes +), im Laufe der Zeit davon wegbewegt. Jedes Feld zeigt die Beobachtungszeit (beginnend mit T_0 für das erste Bild), und eine oben und unten angegebene Winkelskala.



- (T05.1) Bestimmen Sie für jede Beobachtung den Winkelabstand des Blobs, ϕ_{blob} (in [5] Millibogensekunden), und seine transversale Entfernung, l_{blob} (in Lichtjahren), vom Quasarkern. Berechnen Sie anschließend die scheinbare Geschwindigkeit des Blobs in transversaler Richtung (v_{app}) als Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit, $\beta_{\text{app}} (= v_{\text{app}}/c)$, anhand aufeinanderfolgender Beobachtungen. Berechnen Sie außerdem die durchschnittliche scheinbare Geschwindigkeit $\beta_{\text{app}}^{\text{ave}}$ über die gesamte Beobachtungsdauer.

Der Quasarjet bewegt sich tatsächlich mit einer relativistischen Geschwindigkeit $v \equiv \beta c$, aber nicht unbedingt in der Himmelsebene; er bildet beispielsweise einen Winkel θ (den „Betrachtungswinkel“) in Bezug auf die Sichtlinie eines entfernten Beobachters (angezeigt durch die gestrichelten Linien), wie in der Skizze unten gezeigt. Ignorieren Sie für diesen und alle folgenden Teile die Rotverschiebung des Quasars und alle relativistischen Effekte.



- (T05.2) Das vom Blob zu zwei verschiedenen Zeitpunkten t_0 (entsprechend Position A) und $t_0 + \Delta t$ (entsprechend Position B) emittierte Licht erreicht den Beobachter jeweils zu t_A und t_B . Somit beträgt die beobachtete Zeitdifferenz $\Delta t_{\text{app}} = t_B - t_A$.
- (T05.2a) Finden Sie einen Ausdruck für das Verhältnis $\frac{\Delta t_{\text{app}}}{\Delta t}$ als Funktion von β und θ . [2]
- (T05.2b) Drücken Sie β_{app} mithilfe dieses Verhältnisses als Funktion von β und θ aus. [2]
- (T05.3) Eine Bewegung wird als überlichtschnell bezeichnet, wenn die scheinbare Geschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit überschreitet ($\beta_{\text{app}} > 1$), und als unterlichtschnell, wenn dies nicht der Fall ist ($\beta_{\text{app}} < 1$).
- (T05.3a) Für $\beta_{\text{app}} = 1$ zeichnen Sie eine glatte Kurve von β als Funktion von θ , um die Grenze zwischen unterlichtschnellen und überlichtschnellen Bewegungen zu markieren. Schattieren Sie den überlichtschnellen Bereich im Diagramm mit schrägen Linien (///). [4]
- (T05.3b) Ermitteln Sie die niedrigste wahre Jetgeschwindigkeit ($\beta_{\text{low}} = v_{\text{low}}/c$), bei der die überlichtschnelle Bewegung auftritt, sowie den entsprechenden Orientierungswinkel θ_{low} . [2]
- (T05.4) Finden Sie einen Ausdruck für den maximalen Betrachtungswinkel θ_{max} , für den ein bestimmter Wert von β_{app} möglich ist. [2]
- Der Kern eines Quasars, sein zentrales kompaktes Objekt, weist aufgrund interner Prozesse innerhalb einer kausal verbundenen Region eine Variabilität in der Emission auf. Die Größe (= Radius) dieser Region wird typischerweise auf etwa das Fünffache des Schwarzschildradius des Kerns geschätzt.
- (T05.5) Es wurde festgestellt, dass der Kern eines bestimmten Quasars auf Zeitskalen von etwa 1 Stunde variiert. Ermitteln Sie eine Obergrenze $M_{\text{c, max}}$ für die Masse des zentralen kompakten Objekts in Einheiten der Sonnenmasse. [3]

(T06) Galaktische Rotation

[20 Punkte]

Die Rotationskurve unserer Galaxie wird mithilfe von Sichtlinien-Geschwindigkeitsmessungen von neutralen Wasserstoffwolken (HI) entlang verschiedener galaktischer Längengrade bestimmt, beobachtet durch die 21 cm HI-Linie. Betrachten Sie eine HI-Wolke mit galaktischer Länge l , die sich in einem Abstand R vom galaktischen Zentrum (GC) und einem Abstand D von der Sonne befindet. Nehmen Sie an, dass sich die Sonne in einem Abstand $R_0 = 8,5$ kpc vom GC befindet. Nehmen Sie an, dass sich sowohl die Sonne als auch die HI-Wolke auf Kreisbahnen um das GC in der galaktischen Ebene befinden, mit Winkelgeschwindigkeiten Ω_0 und Ω und Rotationsgeschwindigkeiten V_0 bzw. V .

Die Sichtliniengeschwindigkeitskomponenten (V_r) und Transversalsgeschwindigkeitskomponenten (V_t) der Wolke, wie sie von der Sonne aus beobachtet werden, können wie folgt ausgedrückt werden:

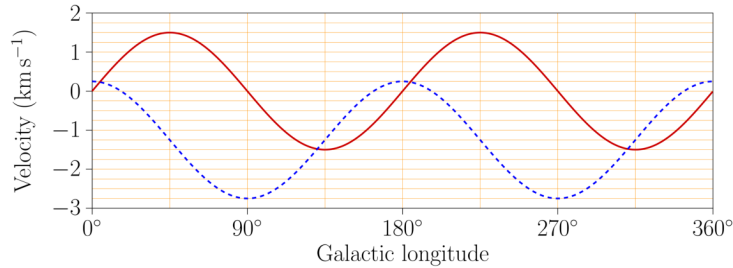
$$V_r = (\Omega - \Omega_0)R_0 \sin l$$

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega D$$

Vom galaktischen Nordpol aus gesehen, rotiert die Galaxie im Uhrzeigersinn. In dieser Aufgabe gehen wir davon aus, dass die Sichtliniengeschwindigkeit beim Entfernen positiv ist und dass Wolken als Punktobjekte behandelt werden.

- (T06.1) Skizzieren Sie in der Grafik auf dem zusammenfassenden Antwortbogen V_r als Funktion von D von $D = 0$ bis $D = 2R_0$ für zwei Sichtlinien, die durch (i) $l = 45^\circ$ und (ii) $l = 135^\circ$ definiert sind. Beschriften Sie jede Ihrer Linien/Kurven mit dem Wert von l . [5]

- (T06.2) Die folgende Grafik zeigt die durchschnittlichen radialen (durchgezogene, rote Kurve) und transversalen (gestrichelte, blaue Kurve) Geschwindigkeitskomponenten von Sternen in einer Entfernung von 100 pc von der Sonne, aufgetragen als Funktion der galaktischen Länge.



Schätzen Sie anhand der Grafik die Umlaufzeit der Sonne (P) um den GC in Megajahren (Myr). [3]

- (T06.3) Jan Oort stellte fest, dass in der Sonnenumgebung ($D \ll R_0$) der Unterschied in den Winkelgeschwindigkeiten ($\Omega - \Omega_0$) gering sein wird, und leitete daher die folgende Näherung erster Ordnung für die Sichtlinien- und Transversalgeschwindigkeitskomponenten ab:

$$\begin{aligned} V_r &= AD \sin 2l \\ V_t &= AD \cos 2l + BD \end{aligned}$$

wobei A und B als Oortsche Konstanten bekannt sind.

Betrachten wir zwei Fälle:

- (I) Die tatsächlich beobachtete Rotationskurve der Galaxie.
(II) Die Rotationskurve gilt für ein hypothetisches Szenario, in dem die Galaxie keine dunkle Materie enthält und die gesamte Masse der Galaxie in ihrem Zentrum konzentriert sein soll.

- (T06.3a) Leiten Sie Ausdrücke für den radialen Gradienten der Rotationsgeschwindigkeit an der Stelle der Sonne, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$, für die beiden Fälle her. [2]

- (T06.3b) Drücken Sie A und B in Abhängigkeit von V_0 , R_0 und den radialen Gradienten der Rotationsgeschwindigkeit am Standort der Sonne, $\left. \frac{dV}{dR} \right|_{R=R_0}$ aus. [8]

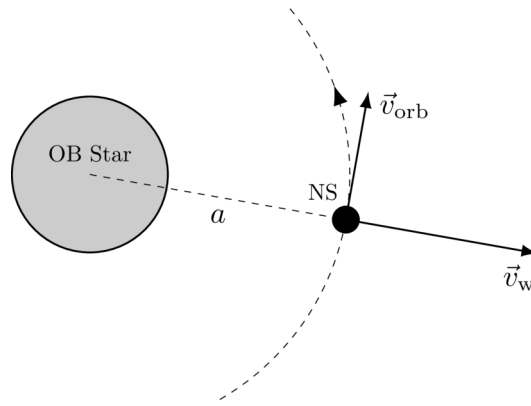
- (T06.3c) Das Verhältnis (A/B) der Oortschen Konstanten für die beiden gegebenen Fälle (I) und (II) wird als F_I bzw. F_{II} definiert. Bestimmen Sie F_I und F_{II} . [2]

(T07) Neutronenstern-Binär

(20 Punkte)

In einem Doppelsternsystem mit einem kompakten Stern, bei dem der Begleitstern seinen Roche-Lappen nicht überläuft, ist die Hauptquelle der Akkretion für den kompakten Stern der Sternwind des Begleitsterns. Diese windgespeiste Akkretion ist besonders wichtig in Systemen, die einen Stern des frühen Typs (wie einen O- oder B-Stern, im Folgenden als OB-Stern bezeichnet) neben einem kompakten Objekt wie einem Neutronenstern (NS) in einer engen Umlaufbahn enthalten.

Betrachten wir ein solches NS-OB-Stern-Binärsystem, in dem ein Neutronenstern der Masse $M_{\text{NS}} = 2,0 M_{\odot}$ und des Radius $R_{\text{NS}} = 11 \text{ km}$ auf einer Kreisbahn mit dem Radius a um das Zentrum des OB-Sterns mit einer Geschwindigkeit $v_{\text{orb}} = 1,5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ kreist (siehe Abbildung unten). In diesem Problem wird angenommen, dass der Massenverlust des OB-Sterns sphärisch symmetrisch ist und die Geschwindigkeit $\dot{M}_{\text{OB}} = 1,0 \times 10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ beträgt.



- (T07.1) Der Akkretionsradius R_{acc} ist definiert als die maximale Entfernung von dem NS, bei der der Sternwind von dem NS eingefangen werden kann. Im Fall, dass die Sternwindgeschwindigkeit in der Umlaufbahntfernung des NS $v_w = 3,0 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$ beträgt, ermitteln Sie R_{acc} für das obige System in km mithilfe der Standardberechnung für die Fluchtgeschwindigkeit. [3]
- (T07.2) Unter der Annahme, dass das gesamte eingefangene Material von dem NS akkretiert wird, schätzen Sie die Massenakkretionsrate $\dot{M}_{\text{acc}}$ vom Sternwind auf den NS in Einheiten von $M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ wenn $a = 0,5 \text{ AE}$ ab. Vernachlässigen Sie die Auswirkungen des Strahlungsdrucks und der begrenzten Abkühlzeit des akkretierenden Gases. [3]
- (T07.3) Betrachten Sie nun die Situation, in der die Geschwindigkeit des Sternwindes in der Umlaufbahntfernung a (nahe dem NS) mit der Umlaufbahngeschwindigkeit des NS vergleichbar wird. Die Massenakkretionsrate des Sternwindes auf den NS kann in diesem Fall durch einen Ausdruck der Form $\dot{M}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{OB}} f(\tan \beta, q)$ gegeben werden, wobei $q = M_{\text{NS}}/M_{\text{OB}}$ das Massenverhältnis des Doppelsternsystems und β der Winkel im Bezugssystem des NS zwischen der Windgeschwindigkeitsrichtung und der radialen Richtung weg vom OB-Stern ist. Bestimmen Sie den Ausdruck für $f(\tan \beta, q)$ unter der Annahme $M_{\text{OB}} \gg M_{\text{NS}}$. [6]
- (T07.4) Nehmen Sie in Betracht, dass das vollständig ionisierte Material radial akkretiert und durch das starke Magnetfeld $\vec{B}$ des NS behindert wird. Dieser Effekt kann als Druck modelliert werden, der durch $\frac{B^2}{2\mu_0}$ gegeben ist. Wir nehmen an, dass der NS ein magnetisches Dipolfeld besitzt, dessen Stärke in der Äquatorebene mit dem Abstand r von dem NS für $r \gg R_{\text{NS}}$ variiert als

$$B(r) = B_0 \left(\frac{R_{\text{NS}}}{r} \right)^3$$

wobei B_0 das Magnetfeld am Äquator der NS ist. Nehmen Sie an, dass die Achse des magnetischen Dipols mit der Rotationsachse der NS übereinstimmt.

- (T07.4a) Ermitteln Sie den magnetischen Druck $P_{\text{eq, mag}}$, in der Äquatorebene als Funktion von B_0 , R_{NS} , r und anderen geeigneten Konstanten. [1]

- (T07.4b) [7]

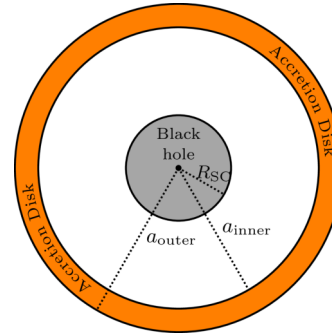
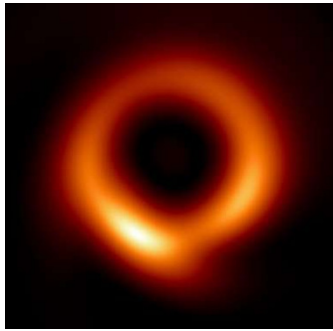
Die maximale Distanz, bei der der Akkretionsfluss durch das Magnetfeld am Äquator gestoppt wird, wird als Magnetosphärenradius R_m bezeichnet. Dieser Materiefluss übt aufgrund der Relativbewegung zwischen dem einfallenden Sternwind und dem NS einen Druck aus. Finden Sie eine Abschätzung für das kritische Magnetfeld $B_{0,c}$ bei dem R_m mit R_{acc} übereinstimmt, und berechnen Sie dessen Wert in Tesla. Magnetische Effekte werden für $r > R_m$ vernachlässigt. Berücksichtigen Sie außerdem $v_w \gg v_{\text{orb}}$.

(T08) Schatten eines Schwarzen Lochs

[20 Punkte]

Das Event Horizon Telescope (EHT) hat ein Bild des supermassiven Schwarzen Lochs im Zentrum der Galaxie M87 veröffentlicht, wie im linken Bereich der Abbildung unten gezeigt.

Um einige einfache Merkmale dieses Bildes zu verstehen, betrachten wir ein vereinfachtes Modell eines nicht rotierenden, statischen, kugelsymmetrischen Schwarzen Lochs mit der Masse $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$, umgeben von einer masselosen, dünnen, ebenen Akkretionsscheibe mit den Innen- und Außenradien $a_{\text{inner}} = 6R_{\text{SC}}$ bzw. $a_{\text{outer}} = 10R_{\text{SC}}$, wobei R_{SC} der Schwarzschild-Radius ist. Eine Skizze der Frontalansicht ist im rechten Bereich der folgenden Abbildung dargestellt (Abbildung ist nicht maßstabsgetreu).



Wir gehen davon aus, dass die Akkretionsscheibe die einzige Lichtquelle ist. Jeder Punkt auf der Scheibe sendet Licht in alle Richtungen aus. Dieses Licht bewegt sich unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes des Schwarzen Lochs. Der Weg der Lichtstrahlen wird durch zwei Gleichungen bestimmt (ähnlich denen eines Objekts um die Sonne):

$$\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = E \quad ; \quad v_\phi = r\omega = \frac{L}{r}$$

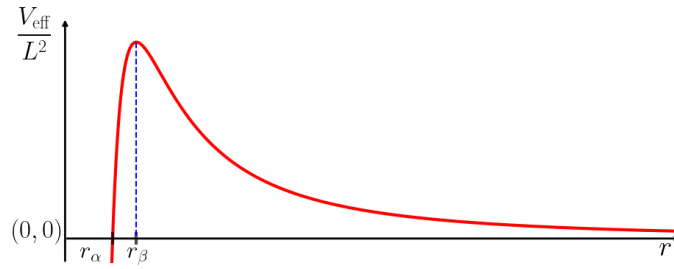
wobei $r \in (R_{\text{SC}}, \infty)$ die radiale Koordinate ist, $\phi \in [0, 2\pi)$ der Azimutwinkel ist und E und L Konstanten sind, die sich jeweils auf die erhaltene Energie und den erhaltenen Drehimpuls beziehen.

Dabei ist $v_r \equiv dr/dt$ der Betrag der Radialgeschwindigkeit, v_ϕ der Betrag der Tangentialgeschwindigkeit und $\omega \equiv d\phi/dt$ die Winkelgeschwindigkeit. Der Stoßparameter b für eine Trajektorie wird als $b = L/\sqrt{2E}$ definiert. Die Zeitdilatation wird in diesem Problem vernachlässigt.

Eine weitere nützliche Gleichung erhält man durch Differenzieren der ersten Gleichung:

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3GML^2}{c^2 r^4} = 0$$

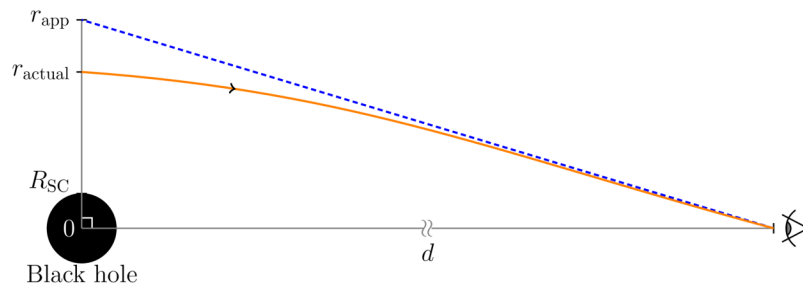
- (T08.1) Kreisförmige Lichtbahnen um das Schwarze Loch herum können existieren. Bestimmen Sie den Radius r_{ph} und den Stoßparameter b_{ph} für solche Photonenbahnen in Abhängigkeit von M und relevanten Konstanten. [4]
- (T08.2) Berechnen Sie die Zeit T_{ph} , die für eine vollständige Umrundung der kreisförmigen Lichtbahn in Sekunden benötigt wird. [2]
- (T08.3) Die oben angegebene Gleichung für die Radialgeschwindigkeit (die erste Gleichung in dieser Aufgabe) kann mit einer Gleichung der Form $\frac{v_r^2}{2} + V_{\text{eff}}(r) = E$ für Lichtbahnen verglichen werden. Eine schematische Darstellung von V_{eff}/L^2 als Funktion von r ist unten angegeben.



(T08.3a) Der Plot ist durch zwei spezielle Radien, r_α und r_β gekennzeichnet. Ermitteln Sie Ausdrücke für r_α und r_β in Bezug auf M und relevante Konstanten. [2]

(T08.3b) Ein Photon, das sich von der Akkretionsscheibe nach innen in Richtung des Schwarzen Lochs bewegt, kann in manchen Fällen immer noch bis ins Unendliche entkommen. Bestimmen Sie den kleinsten Wert des Wendepunktradius r_t für ein solches Photon in Abhängigkeit von M und relevanten Konstanten. Bestimmen Sie den kleinsten Wert des Stoßparameters $b_{\min}$ für dieses Photon. [3]

(T08.4) Ein Lichtstrahl, der aus einem Radius r_{actual} vom Zentrum des Systems in der Himmelsebene kommt, wird aufgrund der Schwerkraft des Schwarzen Lochs stark abgelenkt und erreicht schließlich einen Beobachter (gekennzeichnet durch ein Auge) in einer großen Entfernung d vom System, wie unten gezeigt.

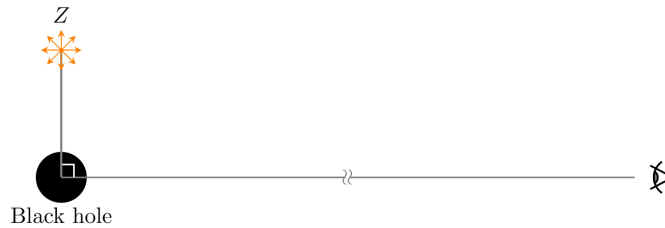


Für diesen Beobachter scheint der Strahl von einem anderen Punkt in der Himmelsebene in einer Entfernung $r_{\text{app}} \approx b$ vom Zentrum des Schwarzen Lochs zu stammen, wobei b der Stoßparameter für die Flugbahn des Photons ist. Für Punkte auf der Akkretionsscheibe bei $r = r_{\text{actual}}$ kann man die folgende Beziehung annehmen:

$$b(r_{\text{actual}}) \approx r_{\text{actual}}(1 + R_{\text{SC}}/r_{\text{actual}})^{1/2}$$

Für einen entfernten Beobachter wie uns, der die Akkretionsscheibe von vorne betrachtet, erscheint das Bild des Systems in der Himmelsebene kreisförmig symmetrisch. Bestimmen Sie den äußersten scheinbaren Radius r_{outer} und den innersten scheinbaren Radius r_{inner} des Bildes in Einheiten von AE. [5]

(T08.5) Betrachten wir ein isoliertes supermassives Schwarzes Loch mit der Masse $M = 6,5 \times 10^9 M_\odot$ ohne Akkretionsscheibe. Ein kurzer, starker Ausbruch elektromagnetischer Strahlung tritt für 5 s an einem Punkt Z in einer Entfernung von beispielsweise $r_Z = 6R_{\text{SC}}$ vom Schwarzen Loch auf, wie in der Abbildung dargestellt. Der Ausbruch am Punkt Z strahlt Licht in alle Richtungen aus. Ein Beobachter an einem weit vom Schwarzen Loch entfernten Punkt (in der Abbildung unten durch ein Auge gekennzeichnet) nimmt eine Langzeitbelichtung der Region um das Schwarze Loch für 60 s auf.



Wählen Sie für jede der folgenden Aussagen die richtige Option:

- (T08.5a) Die Anzahl der möglichen Wege, die das Licht von Z zum Beobachter zurücklegen kann, ist [2]
(A) Höchstens eins (B) Genau eins (C) Genau zwei (D) Größer als zwei.
- (T08.5b) Die Anzahl der Bilder des EM-Bursts bei Z, die im Langzeitbelichtungsbild zu sehen sind, beträgt [2]
(A) Höchstens eins (B) Genau eins (C) Genau zwei (D) Größer als zwei.

(T09) Atmosphärisches Sehen

[35 Punkte]

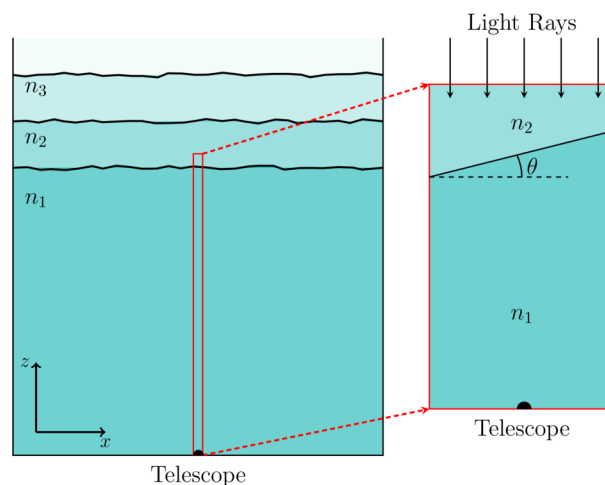
Ein Teleskop mit einer achromatischen konvexen Objektivlinse mit einem Durchmesser von $D = 15$ cm und einer Brennweite $f = 200$ cm ist auf einen Stern im Zenit gerichtet.

- (T09.1) Berechnen Sie den Durchmesser (in m), d_{image} , des Bildes einer Punktquelle, wie es von der Objektivlinse in ihrer Brennebene für grünes Licht ($\lambda = 550$ nm) erzeugt wird, wobei nur die Effekte der Beugung berücksichtigt werden. [1]

Das Bild einer astronomischen Quelle wird auch durch das sogenannte „atmosphärische Seeing“ beeinflusst.

Die Grenzen zwischen den Schichten in der Atmosphäre sowie deren Brechungsindizes verändern sich ständig aufgrund von Turbulenzen, Temperaturschwankungen und anderen Einflüssen. Dies führt zu winzigen Änderungen der Bildposition in der Brennebene des Teleskops, dem sogenannten „Funkeleffekt“. Für den Rest des Problems werden, abgesehen von der beugungsbegrenzten endlichen Größe des Sternbildes (wie oben verwendet), keine Interferenzeffekte berücksichtigt.

Der linke Teil der Abbildung unten zeigt einen vertikalen Querschnitt der Atmosphäre mit mehreren Schichten unterschiedlicher Brechungsindizes ($n_1, n_2, n_3, \dots$). Der rechte Teil zeigt die vergrößerte Ansicht eines dünnen vertikalen Segments der Atmosphäre und die Grenze zwischen den beiden untersten atmosphärischen Schichten mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 ($n_1 > n_2$). Wir betrachten für dieses Problem nur diese beiden Schichten und ihre Grenze. Die Diagramme sind nicht maßstabsgetreu.

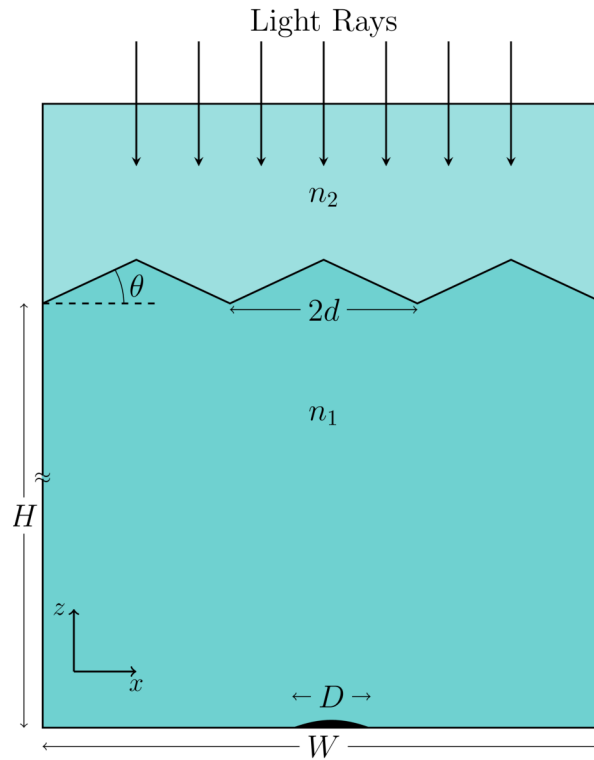


- (T09.2) Die Grenze zwischen den beiden Schichten liege in einer Höhe $H = 1$ km direkt über dem Teleskopobjektiv, mit einer Neigung von $\theta = 30^\circ$ zur Horizontalen. In allen Teilen dieser Aufgabe wird θ entgegen dem Uhrzeigersinn als positiv angenommen. Für eine monochromatische Lichtquelle ist $n_1 = 1,00027$ und $n_2 = 1,00026$. Die Winkelverschiebung des Bildes in der Brennebene des Teleskops für einen Stern im Zenit sei α .
- (T09.2a) Zeichnen Sie an der Grenze ein entsprechend beschriftetes Strahlendiagramm n_1, n_2 , θ und α zeigt. [2]
- (T09.2b) Finden Sie den Ausdruck für α in Bezug auf θ, n_1 und n_2 . Verwenden Sie die Kleinwinkelnäherungen: $\sin \alpha \approx \alpha$ und $\cos \alpha \approx 1$. [2]
- (T09.2c) Berechnen Sie die Verschiebung Δx_θ (in m) in der Position des Bildes, wenn θ um 1 % zunimmt (wobei n_1 und n_2 unverändert bleiben). [3]
- (T09.2d) Berechnen Sie die Verschiebung Δx_n (in m) in der Position des Bildes, wenn n_2 um 0,0001 % zunimmt (wobei n_1 und θ unverändert bleiben). [3]
- (T09.3) Wählen Sie für weißes Licht, das von einem Stern im Zenit ausgeht, diejenige der folgenden Aussagen aus, die die Form und Farbe des Bildes am besten beschreibt, indem Sie das entsprechende Kästchen (nur eins) im Antwortbogen zur Zusammenfassung ankreuzen (✓). Beachten Sie, dass x in der Abbildung von links nach rechts zunimmt. [2]

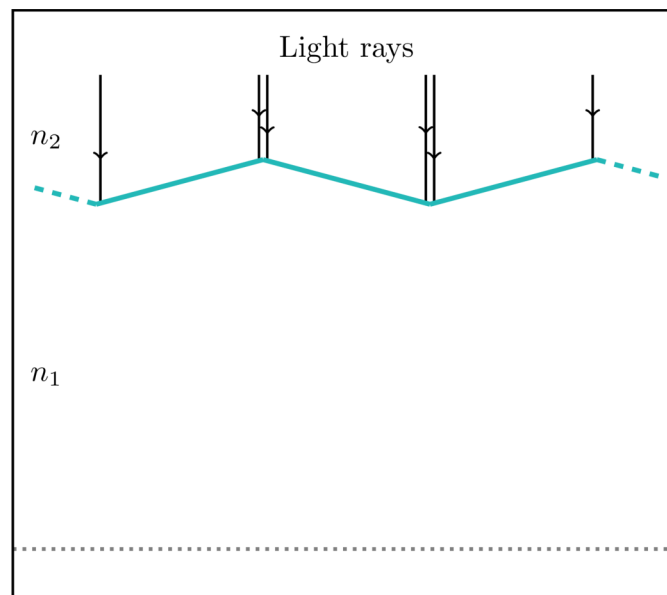
	Bildfarbe	Bildform	Linke Kante	Rechte Kante
A	Weiß	Kreisförmig		
B	Weiß	Elliptisch		
C	Farbig	Kreisförmig	Blau	Rot
D	Farbig	Kreisförmig	Rot	Blau
E	Farbig	Elliptisch	Blau	Rot
F	Farbig	Elliptisch	Rot	Blau

Für alle verbleibenden Unteraufgaben betrachten wir monochromatisches grünes Licht mit $\lambda = 550$ nm. Wir modellieren die Grenze zwischen den Schichten als eine Reihe unendlicher Zickzack-Ebenen (senkrecht zur Seitenebene verlaufend), die entlang der x Achse durch $d = 10$ cm getrennt sind, mit entweder $\theta = 10^\circ$ oder $\theta = -10^\circ$.

Die folgende Abbildung (nicht maßstabsgetreu) zeigt einen Querschnitt dieses Atmosphärenmodells mit der Breite W ($W \ll H$). Bei Teleskopen mit großer Öffnung führt diese Zickzack-Form der Grenze zur Bildung von Flecken in der Brennebene.



- (T09.4a) Ein Abschnitt der Atmosphäre mit aufeinanderfolgenden Zickzack-Ebenen und denselben Parametern wie oben angegeben ist im folgenden Diagramm dargestellt (nicht maßstabsgetreu).



Zeichnen Sie in diesem Diagramm, das im Antwortblatt wiedergegeben ist, die Wege der einfallenden Lichtstrahlen bis zu der Ebene ein, auf der das Teleskopobjektiv platziert ist, dargestellt durch die graue gepunktete Linie.

Markieren Sie im Diagramm gegebenenfalls die Bereiche mit einem „X“, in die keine Lichtstrahlen gelangen. [4]

- (T09.4b) Berechnen Sie die Breite W_X dieser Region(en). [3]

- (T09.4c) Bestimmen Sie den größten Durchmesser $D_{\max}$ des Teleskopobjektivs, mit dem es möglich ist, ein einzelnes Bild eines Sterns zu erhalten, indem Sie die Position des Teleskops im Verhältnis zur Struktur der Grenze entsprechend wählen. [4]

- (T09.5) Betrachten Sie den Fall, in dem die Zickzackform der Grenze sowohl in x als auch in y Richtung zulässig ist (wie ein Pyramidenfeld) und $D = 100$ cm (mit $f = 200$ cm). [6]

Zeichnen Sie das qualitative Muster der resultierenden Sprenkel in das Kästchen im Antwortbogen.

- (T09.6) Betrachten wir für eine turbulente Atmosphäre wieder die gleiche parallel verlaufende Zickzackform der Grenzschicht, nur eben entlang x Richtung, wobei sich nun der Winkel zwischen den beiden Ebenen gleichmäßig von 10° auf -10° in $1,0$ s ändert. Nehmen wir an, dass dies zu einer gleichmäßigen Bewegung der Bildposition führt. [5]

Betrachten Sie ein Teleskop mit $D = 8$ cm und $f = 1$ m. Schätzen Sie die längste Belichtungszeit $t_{\max}$ die für seine CCD-Kamera zulässig ist, damit man nur ein einziges Bild erhält und jede mögliche Abweichung in seiner Position weniger als 1 % des beugungsbegrenzten Durchmessers des Bildes beträgt.

(T10) Nukleotidsynthese im Urknall

[35 Punkte]

Während der strahlungsdominierten Ära im frühen Universum betrug der Skalenfaktor des Universums $a \propto t^{1/2}$, wobei t die Zeit seit dem Urknall ist. Während des größten Teils dieser Ära bleiben Neutronen (n) und Protonen (p) durch schwache Wechselwirkungen im thermischen Gleichgewicht miteinander. Die Anzahldichte (N) freier Neutronen oder Protonen hängt mit der Temperatur T und ihren entsprechenden Massen m zusammen, sodass

$$N \propto m^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{k_B T}\right),$$

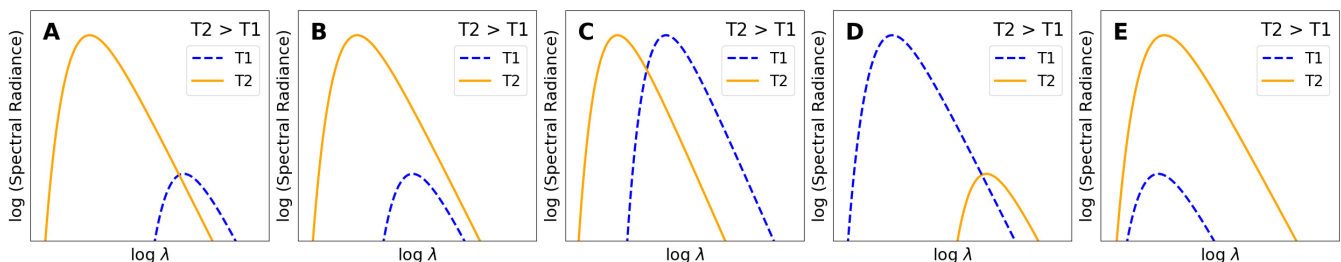
gilt, solange $t \leq t_{\text{wk}} = 1,70$ s ist, wenn $k_B T \geq k_B T_{\text{wk}} = 800$ keV ist. Nach t_{wk} können die schwachen Wechselwirkungen dieses Gleichgewicht nicht mehr aufrechterhalten, und freie Neutronen zerfallen mit einer Halbwertszeit von 610,4 s zu Protonen.

- (T10.1) Die Anzahldichte der Protonen sei N_p und die der Neutronen N_n . Berechnen Sie die relative Häufigkeit der Neutronen, die durch das Verhältnis $X_{n, \text{wk}} = N_n / (N_n + N_p)$ zum Zeitpunkt t_{wk} gegeben ist. [4]

- (T10.2) Photonen halten das thermische Gleichgewicht aufrecht und behalten zu jeder Zeit ein Schwarzkörperspektrum bei.

- (T10.2a) Finden Sie den Index β , sodass $T(a) \propto a^\beta$. [2]

- (T10.2b) Bestimmen Sie, welches der folgenden Diagramme das korrekte Verhalten der spektralen Energiedichte für zwei Temperaturen T_1 und T_2 zeigt. Kreuzen Sie (✓) die richtige Option im zusammenfassenden Antwortbogen an. [2]

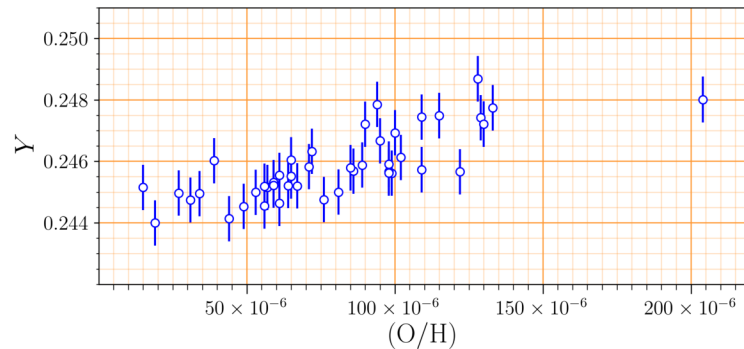


- (T10.3) Nach t_{wk} wird der Prozess der Bildung von Deuterium aus Protonen und Neutronen durch die Saha-Gleichung des indischen Physikers Prof. Meghnad Saha bestimmt, die vereinfacht werden kann zu

$$\frac{N_D}{N_n} = 6.5\eta \left(\frac{k_B T}{m_n c^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{(m_D - m_p - m_n)c^2}{k_B T} \right).$$

Hier beträgt das Baryon-zu-Photon-Verhältnis η 6.1×10^{-10} und N_D ist die Anzahldichte von Deuterium.

- (T10.3a) Tragen Sie das Verhältnis N_D/N_n in das Raster Antwortblatts ein, und zwar für mindestens 4 Temperaturwerte mit sinnvollem Abstand, die im Bereich $k_B T = [60, 70]$ keV liegen, und zeichnen Sie eine glatte Kurve, die durch diese Punkte verläuft. [5]
- (T10.3b) Ermitteln Sie aus der Darstellung $k_B T_{\text{nuc}}$ (in keV), wenn $N_D = N_n$. [1]
- (T10.3c) Nehmen wir stattdessen an, dass sich alle freien Neutronen sofort mit den Protonen bei $k_B T_{\text{nuc}}$ zu Deuterium verbinden, das sich sofort in Helium (${}^4_2\text{He}$) wandelt. Berechnen Sie die entsprechende Epoche oder Zeit der Nukleosynthese, t_{nuc} (in s), für die Bildung von Helium. [4]
- (T10.4) Berechnen Sie den Wert von $X_{n, \text{nuc}}$ unmittelbar vor t_{nuc} . [5]
- (T10.5) Die primordiale Heliumhäufigkeit, Y_{prim} , ist definiert als der Anteil der gesamten baryonischen Masse im Universum, der unmittelbar nach t_{nuc} in Helium gebunden ist. Berechnen Sie den Wert von Y_{prim} . Nehmen Sie für diese Berechnung an, $m_p \approx m_n$ und die Heliummasse $m_{\text{He}} \approx 4m_n$ beträgt. [3]
- (T10.6) Die primordiale Heliumhäufigkeit ist sehr schwer zu messen, da Sterne im Universum kontinuierlich Wasserstoff in Helium umwandeln. Der Grad der Umwandlung durch Sterne in einer Galaxie wird durch die relative Anzahldichte von Sauerstoff (der nur von Sternen produziert wird) zu Wasserstoff, bezeichnet als (O/H), in der Galaxie charakterisiert. Eine Zusammenstellung der Messungen von (O/H) und der Heliumhäufigkeit, Y , für verschiedene Galaxien ist unten dargestellt.



Verwenden Sie alle Punkte in diesem Diagramm (das im zusammenfassenden Antwortblatt wiedergegeben ist), um Folgendes zu beantworten.

- (T10.6a) Schätzen Sie Y für eine blaue kompakte Zwerggalaxie mit einem Wert von $(\text{O}/\text{H}) = 1.75 \times 10^{-4}$. [2]
- (T10.6b) Ermitteln Sie die Steigung $dY/d(\text{O}/\text{H})$ der Geraden, die an die obigen Daten angepasst ist. [2]
- (T10.6c) Schätzen Sie die primordiale Heliumhäufigkeit, $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$, basierend auf den obigen Beobachtungen. [2]

- (T10.7) Die Abweichung zwischen Y_{prim} und $Y_{\text{prim}}^{\text{obs}}$ kann durch Ändern des Baryonen-Photonen-Verhältnisses η ausgeglichen werden. Wenn η verringert wird, wie durch $\downarrow$ im Antwortbogen angezeigt, geben Sie die Erhöhung ($\uparrow$) oder Verringerung ($\downarrow$) in $N_{\text{D}}/N_{\text{n}}(T)$, T_{nuc} (wenn $N_{\text{D}} = N_{\text{n}}$), t_{nuc} , $X_{\text{n, nuc}}$ und Y_{prim} in den dafür vorgesehenen Kästchen im zusammenfassenden Antwortbogen an. [3]

(T11) Sterne durch Graphen

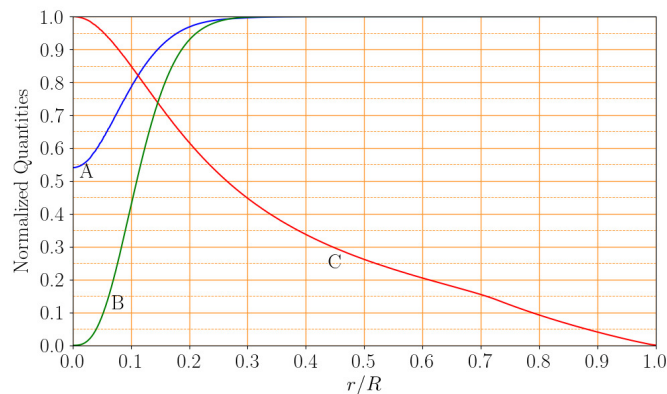
[50 Punkte]

Sterne können gut als kugelsymmetrische Objekte genähert werden, daher kann der radiale Abstand r vom Zentrum als einzige unabhängige Variable bei der Modellierung des Sterninneren gewählt werden. Die Masse innerhalb einer Kugel mit Radius r wird mit $m(r)$ bezeichnet. Die Leuchtkraft $l(r)$ ist definiert als die Nettoenergie, die pro Zeiteinheit durch eine Kugeloberfläche mit Radius r nach außen fließt. Andere interessante Größen, zum Beispiel die Dichte $\rho(r)$, die Temperatur $T(r)$, der Wasserstoff-Massenanteil $X(r)$, der Helium-Massenanteil $Y(r)$ und die pro Masseneinheit und Zeiteinheit erzeugte Kernenergie $\epsilon_{\text{nuc}}(r)$, werden als Funktionen von r betrachtet. Bei diesem Problem werden wir die Auswirkungen der Diffusion und der gravitativen Ablagerung von Elementen im Inneren des Sterns vernachlässigen.

Das Symbol „log“ bezieht sich auf den Logarithmus zur Basis 10. Das Problem besteht aus drei unabhängigen Teilen.

(T11.1) Teil 1: Im Inneren eines Sterns

Die folgende Grafik zeigt die Variation dreier Strukturgrößen A, B und C als Funktionen des Radiusanteils r/R in einem Sternmodell mit einer Masse von $1 M_{\odot}$ und einem Alter von 4 Gyr, wobei R der photosphärische Radius des Sterns ist. Die Werte des Helium-Massenanteils an der (photosphärischen) Oberfläche, Y_{s} , und der Metallizität (Massenanteil aller Elemente schwerer als Helium) an der (photosphärischen) Oberfläche, Z_{s} , des Sterns sind gegeben durch $(Y_{\text{s}}, Z_{\text{s}}) = (0,28, 0,02)$. Alle in den Diagrammen dargestellten Größen sind anhand ihrer jeweiligen Maximalwerte normiert.



- (T11.1a) Identifizieren Sie die drei Strukturgrößen A, B und C eindeutig aus den fünf Möglichkeiten: [6]

$$T(r), l(r), \epsilon_{\text{nuc}}(r), X(r), Y(r).$$

(Schreiben Sie A/B/C in die Kästchen neben den entsprechenden Mengen im zusammenfassenden Antwortbogen. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.)

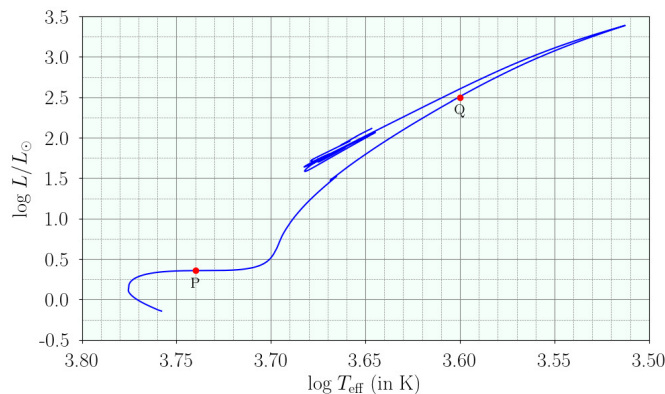
- (T11.1b) Wie hoch ist der Massenanteil von Helium, Y_{c} , im Zentrum des Sterns? [3]

- (T11.1c) Skizzieren Sie die verbleibenden zwei Größen aus der Liste der fünf (die nicht als Kurven A, B oder C identifiziert wurden) in (T11.1a) als Funktionen von r/R in derselben Grafik im zusammenfassenden Antwortblatt und beschriften Sie sie mit den jeweiligen Größen. [5]

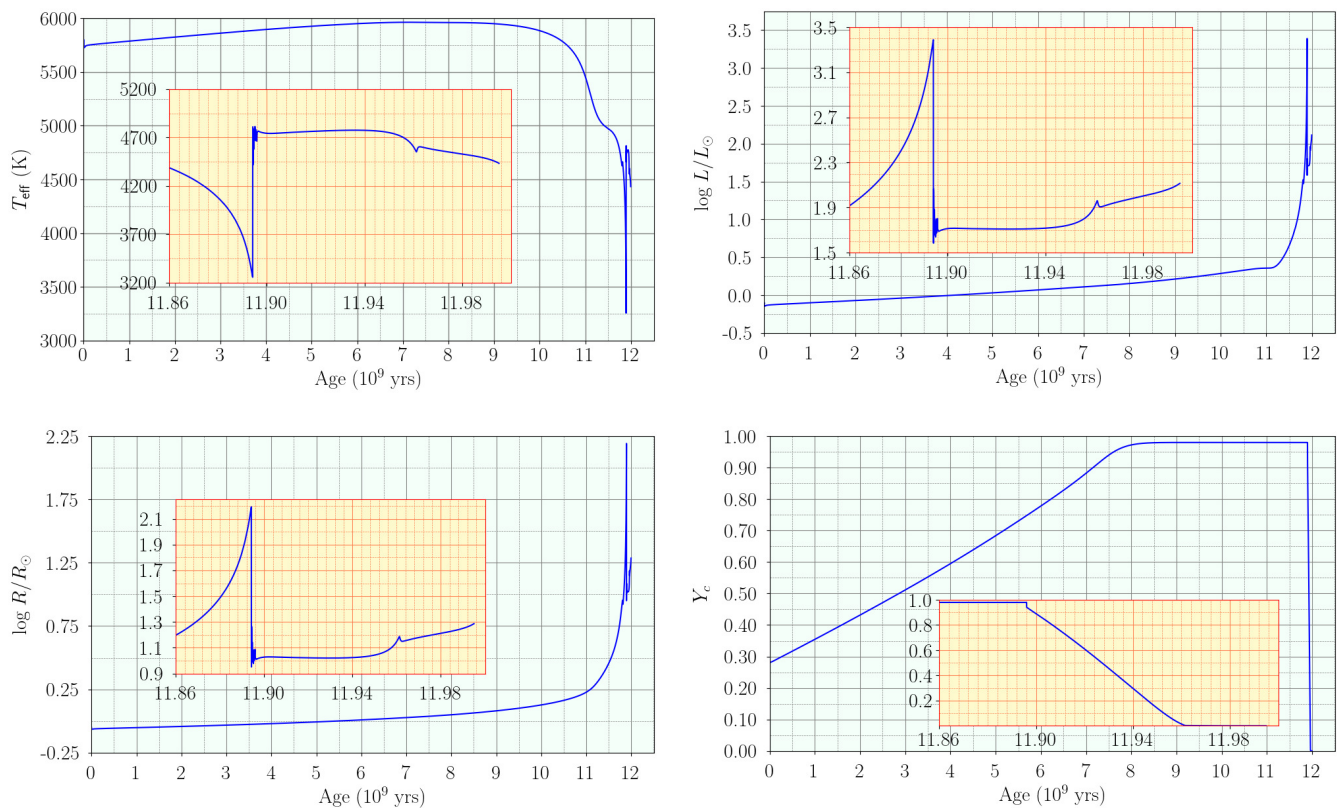
(T11.2) Teil 2: Sich entwickelnde Sterne

Betrachten wir die Entwicklung eines $1M_{\odot}$ großen Sterns, dessen anfänglich einheitliche Zusammensetzung durch die Massenanteile von Helium $Y_0 = 0.28$ und Metallen $Z_0 = 0.02$ gegeben ist. Die folgenden Abbildungen zeigen die Variation der verschiedenen globalen Mengen dieses Sterns von der ZAMS (Zero Age Main Sequence) bis zum Ende der Heliumverbrennung in seinem Kern.

Die folgende Grafik zeigt die Entwicklungsbahn des Sterns im HR-Diagramm (Auftragung von $\log L/L_{\odot}$ vs. $\log T_{\text{eff}}$, wobei L die Oberflächenleuchtkraft und T_{eff} die effektive Temperatur ist).



Die folgende Abbildung zeigt vier Graphen, die die Variation von T_{eff} (in K), L (dargestellt als $\log L/L_{\odot}$), R (dargestellt als $\log R/R_{\odot}$) und Y_c mit dem Alter (in 10^9) desselben Sterns zeigen. In jedem dieser vier Graphen zeigen die Einschübe zur besseren Verdeutlichung die Variationen der jeweiligen Größen im Detail zwischen den Altersstufen $11,86 \times 10^9$ und $12,00 \times 10^9$ Jahre.



Verwenden Sie diese Grafiken, um die folgenden Fragen zu beantworten.

(T11.2a) Wie lang ist die ungefähre Lebensdauer des Hauptreihensterns, t_{MS} (in Jahren)?

[1]

- (T11.2b) Wie lange Δt_{He} (in Jahren) verbrennt der Stern ungefähr Helium in seinem Kern? [1]
- (T11.2c) Welcher Anteil f_{H} der ursprünglichen Wasserstoffmenge in seinem Zentrum ist verbrannt, wenn die Leuchtkraft des Sterns $1 L_{\odot}$ beträgt? [3]
- (T11.2d) Wie groß ist der Radius des Sterns R_1 (in Einheiten von $R_{\odot}$), wenn 60% der ursprünglichen Wasserstoffmenge in seinem Zentrum verbrannt sind? [3]
- (T11.2e) Wie groß sind die Radien des Sterns, R_P und R_Q (in Einheiten von $R_{\odot}$), entsprechend seinen Positionen P bzw. Q, wie im HR-Diagramm markiert? [4]

(T11.3) **Teil 3: Massenverteilung im Inneren eines Sterns**

Die Gleichung, die die Massenverteilung innerhalb eines Sterns bestimmt, lautet

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Es wäre praktisch, diese Gleichung mithilfe von drei dimensionslosen Variablen auszudrücken, nämlich der fraktionalen Masse q , dem fraktionalen Radius x und der relativen Dichte σ , die wir wie folgt definieren:

$$q = m/M \quad x = r/R \quad \sigma = \rho/\bar{\rho}$$

wobei M und R die Gesamtmasse bzw. der Radius des Sterns sind und $\bar{\rho} \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ die durchschnittliche Dichte des Sterns ist. Für den spezifischen Stern, den wir in diesem Teil betrachten werden, werden die folgenden Informationen gegeben:

- Die zentrale Dichte $\rho(x=0) = 80\bar{\rho}$
- Die Hälfte der Masse des Sterns befindet sich innerhalb der inneren 25 % seines Gesamtradius und 70 % seiner Masse befinden sich innerhalb der inneren 35 % seines Gesamtradius.

In allen folgenden Teilen dieser Frage ist es ausreichend, alle hergeleiteten numerischen Koeffizienten auf eine Genauigkeit von 0,005 zu runden.

- (T11.3a) Drücken Sie die obige Gleichung, die die Abhängigkeit der Masse vom Radius beschreibt, als Funktion von x , $\frac{dq(x)}{dx}$ und $\sigma(x)$ aus. [2]

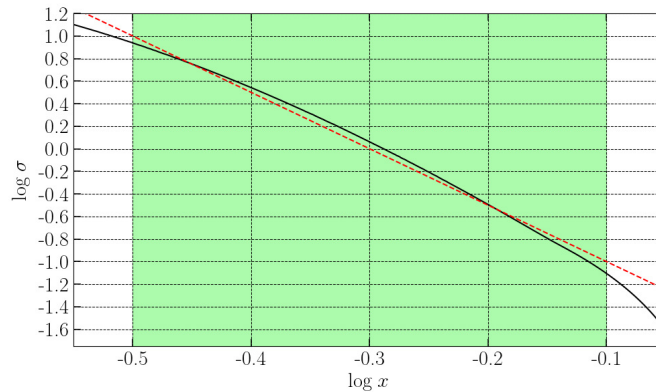
Um die Verteilung der Masse mit dem Radius zu bestimmen, müssen wir das Dichteprofil im Inneren des Sterns kennen. Für dieses Problem beschreiben wir die Variation der Dichte mit dem Radius durch Näherungen in zwei Bereichen von x :

- der innere Teil des Sterns: $0 \leq x \leq 0.32$
- der mittlere Teil des Sterns: $0.32 < x < 0.80$

Für den äußersten Teil, also $0.80 \leq x \leq 1.00$, nehmen wir keine Näherung vor.

(T11.3b) **Näherung für den Mittelteil:**

Die Variation von $\log \sigma$ als Funktion von $\log x$ im mittleren Teil des Sterns ist in der folgenden Grafik (durch die schwarze Kurve) dargestellt. Wir werden eine lineare Näherung (im Diagramm als gestrichelte rote Linie dargestellt) für $\log \sigma$ als Funktion von $\log x$ im Bereich $-0.5 < \log x < -0.1$, d. h. $0.32 \lesssim x \lesssim 0.80$ (dargestellt durch den grün schattierten Bereich). Weiterhin werden wir die Steigung dieser Linie durch die nächste ganze Zahl approximieren.



Verwenden Sie diese Näherung, um einen Ausdruck für $\sigma(x)$ als Funktion von x im Bereich $0.32 < x < 0.80$ zu formulieren. [4]

(T11.3c) Verwenden Sie das Ergebnis von (T11.3b), um einen Ausdruck für $q(x)$ im Definitionsbereich $0.32 < x < 0.80$ herzuleiten. [6]

(T11.3d) **Näherung für den inneren Teil:**

Im inneren Teil des Sterns ($0 \leq x \leq 0.32$) kann die Dichte als lineare Funktion des Radius approximiert werden, d. h. $\sigma(x) = Ax + B$, wobei A, B Konstanten sind. Bestimmen Sie A und B , um einen Ausdruck für $q(x)$ im Definitionsbereich $0 \leq x \leq 0.32$ zu erhalten. Beachten Sie, dass die im vorherigen und diesem Teil verwendeten Näherungen zu kleinen Diskontinuitäten in der Dichte oder Masse bei $x = 0.32$ führen können. [8]

(T11.3e) Die in den Teilen (T11.3c) und (T11.3d) erhaltenen Ausdrücke für $q(x)$ sind Näherungen, die die Variation der Masse mit dem Radius recht gut beschreiben, aber nur in bestimmten Bereichen des Sterns. Für den Bereich $0.80 \leq x \leq 1$ (für den wir keinen Ausdruck hergeleitet haben) ist es möglich, eine entsprechende Extrapolation aus dem benachbarten Bereich zu verwenden. Verwenden Sie diese Näherungsausdrücke und die gegebenen Daten, um eine glatte Kurve (ohne Unstetigkeiten weder in $q(x)$ noch in seiner Ableitung) für $q(x)$ vs. x für den gesamten Stern ($0 \leq x \leq 1$) zu skizzieren, die die Variation der Masse mit dem Radius darstellt. [4]

(T12) Hawking-Strahlung von Schwarzen Löchern

[50 Punkte]

(T12.1) Ein Schwarzes Loch (BH) entsteht typischerweise durch den Gravitationskollaps eines massereichen Sterns am Ende seines Lebenszyklus bis zu einem Punkt, der Singularität genannt wird. Aufgrund der extremen Schwerkraft eines solchen Objekts kann nichts, was in den sogenannten Ereignishorizont (eine sphärische Oberfläche mit $r = R_{\text{SC}}$, wobei r die Entfernung von der Singularität ist) eintritt, diesem entkommen. R_{SC} wird hier als Schwarzschildradius bezeichnet.

(T12.1a) **Modellierung des Ursprungs der Hawking-Strahlung:** Betrachten wir ein Teilchenpaar mit jeweils der Masse m , das auf beiden Seiten des Schwarzen Lochs entsteht. Ein Teilchen befindet sich knapp außerhalb des Horizonts bei $r \approx R_{\text{SC}}$, während sich das andere Teilchen innerhalb des Horizonts bei $r = \kappa R_{\text{SC}}$ befindet. Nehmen wir an, dass die Gesamtenergie eines Teilchens die Summe seiner Ruheenergie mc^2 und der durch das Schwarze Loch entstehenden Gravitationspotentialenergie ist.

Bestimmen Sie den Wert von κ bei dem das Teilchenpaar eine Gesamtenergie von Null hat. [4]

- (T12.1b) **Temperatur eines Schwarzen Lochs:** Wenn das im obigen Prozess außerhalb des Horizonts erzeugte Teilchen genügend kinetische Energie besitzt, kann es dem Schwarzen Loch in einem als Hawking-Strahlung bezeichneten Prozess entweichen. Das Teilchen innerhalb des Horizonts, das negative Energie besitzt, wird absorbiert und verringert die Masse des Schwarzen Lochs.

Nehmen wir an, dass die gesamte Hawking-Strahlung aus Photonen mit einem Schwarzkörperspektrum besteht, das bei der Wellenlänge $\lambda_{\text{bh}} \approx 16 R_{\text{SC}} \lambda_{\text{max}}$ Maximum erreicht. Es ist bekannt, dass für eine Sonnenmasse BH $R_{\text{SC}, \odot} = 2,952 \text{ km}$ ist.

Ermitteln Sie einen Ausdruck für die Temperatur T_{bh} des Schwarzen Lochs, das dieser Schwarzkörperstrahlung entspricht, in Abhängigkeit von seiner Masse M_{bh} und seinen physikalischen Konstanten. Berechnen Sie den Schwarzschildradius $R_{\text{SC}, 10\odot}$ und die Temperatur $T_{\text{bh}, 10\odot}$ für ein Schwarzes Loch mit der Masse $10 M_{\odot}$. [4]

- (T12.1c) **Massenverlust eines Schwarzen Lochs:** Nehmen Sie an, dass die Hawking-Strahlung vom Ereignishorizont aus emittiert wird.

Bestimmen Sie mithilfe der Äquivalenz von Masse und Energie einen Ausdruck für die Rate des Massenverlusts, $dM_{\text{bh}}(t)/dt$, in Abhängigkeit von der Masse $M_{\text{bh}}(t)$ des Schwarzen Lochs und physikalischen Konstanten.

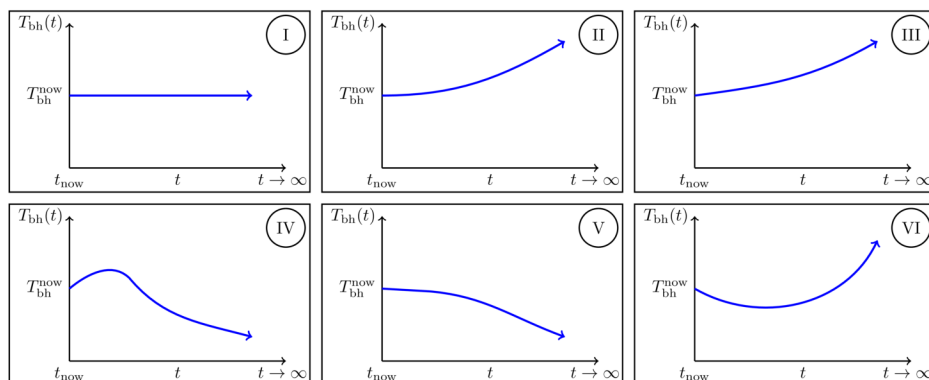
Bestimmen Sie daher einen Ausdruck für $M_{\text{bh}}(t)$ für ein Schwarzes Loch mit der Anfangsmasse M_0 . Skizzieren Sie $M_{\text{bh}}(t)$ als Funktion von t von $M_{\text{bh}} = M_0$ bis $M_{\text{bh}} = 0$. [8]

- (T12.1d) **Lebensdauer eines Schwarzen Lochs:** Bestimmen Sie die Lebensdauer τ_{BH} bei der ein Schwarzes Loch mit der Anfangsmasse M_0 aufgrund von Hawking-Strahlung vollständig verdampft, in Abhängigkeit von M_0 und physikalischen Konstanten. Berechnen Sie die Lebensdauer $\tau_{\text{bh}, 10\odot}$ (in Sekunden) für ein Schwarzes Loch mit $M_0 = 10 M_{\odot}$. [3]

- (T12.1e) **Schwarzes Loch in einem CMB-Strahlungsbad:** Stellen Sie sich ein isoliertes Schwarzes Loch im Weltraum vor, weit entfernt von anderen Körpern, mit einer aktuellen Temperatur $T_{\text{bh}}^{\text{now}}$, umgeben von der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung (CMB) mit einer aktuellen Temperatur $T_{\text{cmb}}^{\text{now}} = 2,7 \text{ K}$. Die Masse des Schwarzen Lochs kann durch Absorption von CMB-Strahlung zunehmen und durch Hawking-Strahlung Masse verlieren.

Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der beschleunigten Expansion des Universums, welche der folgenden Abbildungen die langfristige zeitliche Entwicklung von T_{bh} in den folgenden drei Fällen zeigen:

(X) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} > T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$, (Y) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} = T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$, (Z) $T_{\text{bh}}^{\text{now}} < T_{\text{cmb}}^{\text{now}}$.



Geben Sie Ihre Antwort an, indem Sie für jeden Fall X, Y oder Z in der Tabelle im zusammenfassenden Antwortbogen das entsprechende Kästchen (nur eins) ankreuzen, das der entsprechenden Abbildungsnummer entspricht. [6]

(T12.2) Primordiale Schwarze Löcher (PBHs) mit deutlich geringerer Masse können sich bereits im frühen Universum bilden. Alle folgenden Fragen beziehen sich auf PBHs. Dabei können Prozesse, die die Masse des Schwarzen Lochs vergrößern, vernachlässigt werden.

(T12.2a) **Verdampfung von PBHs in der heutigen Epoche:** Wie Sie vielleicht anhand der Antworten auf die vorherigen Fragen bemerkt haben, würde es lange dauern, bis Schwarze Löcher mit Sonnenmasse verdampfen. Da PBHs jedoch eine viel geringere Masse haben können, könnten wir sie möglicherweise bereits heute verdampfen sehen.

Bestimmen Sie die Anfangsmasse $M_{0, \text{PBH}}$ (in kg), den Schwarzschildradius $R_{\text{SC, PBH}}$ (in m) und die Temperatur T_{PBH} (in K) eines Schwarzen Lochs, das derzeit möglicherweise vollständig verdunstet, d. h. eines Schwarzen Lochs mit einer Lebensdauer $\tau_{\text{PBH}} = 14$ Milliarden Jahren. [4]

(T12.2b) **Bildung eines PBHs:** Im strahlungsdominierten frühen Universum variiert der Skalenfaktor wie $a(t) \sim t^{1/2}$. In dieser Ära bilden sich PBHs aufgrund des Kollapses aller Energie, die in einem Bereich der physikalischen Größe ct enthalten ist, wobei t das Alter des Universums zu dieser Zeit ist.

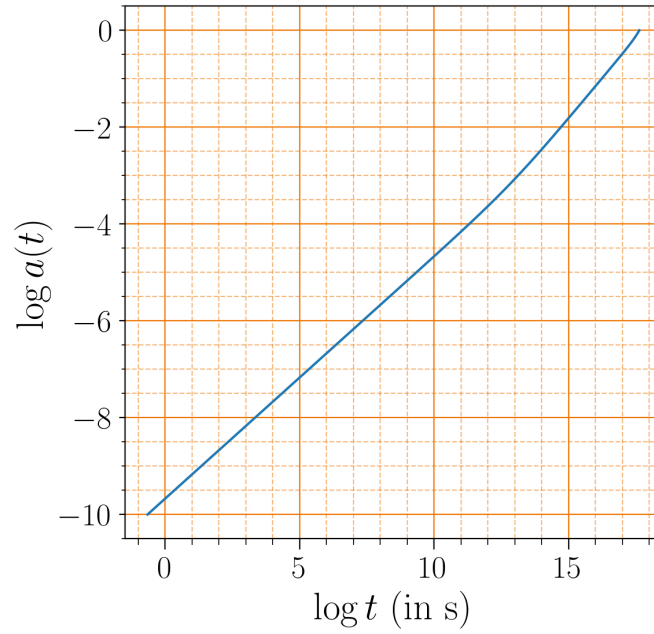
Ein PBH mit einer Masse von 1×10^{12} kg entsteht, wenn das Alter des Universums etwa 1×10^{-23} s beträgt. Berechnen Sie das Alter des Universums, t_{20} , wenn ein PBH mit einer Masse von 1×10^{20} kg entsteht. [6]

(T12.2c) **Beobachtetes Spektrum der Hawking-Strahlung eines PBH:** Betrachten wir einen PBH mit einer Anfangsmasse von 1×10^{10} kg, der am Ende seiner Lebensdauer τ_{PBH} vollständig verdampft. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass der Großteil der Hawking-Strahlung zu diesem Zeitpunkt emittiert wird, bei einer Temperatur, die der Anfangsmasse entspricht. Nehmen wir außerdem an, dass sich der Skalierungsfaktor des Universums wie folgt entwickelt: $a(t) \sim t^{2/3}$.

Berechnen Sie die maximale Wellenlänge dieser Hawking-Strahlung, wie sie auf der Erde, λ_{earth} , zum gegenwärtigen Zeitpunkt (bei $t = 14$ Milliarden Jahren) beobachtet wird. [5]

(T12.2d) **Hochenergetische kosmische Strahlung von PBH:** Nehmen wir nun an, dass die zu einem bestimmten Zeitpunkt t emittierte Hawking-Strahlung Photonen entspricht, die mit einer Energie $k_B T_{\text{bh}}(t)$ emittiert werden. Die höchstmögliche Temperatur für ein Schwarzes Loch ist die Planck-Temperatur T_{Planck} wobei $k_B T_{\text{Planck}} = 1 \times 10^{19}$ GeV ist.

Die Entwicklung des Skalierungsfaktors über relevante Zeitskalen ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Der Skalierungsfaktor ist heute auf Eins eingestellt. $t(s)$ auf der Zeitachse stellt das Alter des Universums in Sekunden dar.



Wenn auf der Erde ein Photon mit einer Energie von $E_{\text{det}} = 3,0 \times 10^{20}$ eV beobachtet wird, bestimmen Sie den größten und den kleinsten möglichen Wert der Anfangsmasse des PBH (M_0^{max} bzw. M_0^{min}), die für dieses Photon verantwortlich sein könnte. [10]