

(D01) 30 років дослідження екзопланет

[90 балів]

У цій задачі досліджуються деякі аспекти двох основних методів виявлення екзопланет: метод радіальних швидкостей та метод транзитів. У задачі ми розглядатимемо конкретну систему з однієї планети (P) на коловій орбіті радіусом a навколо зорі сонячного типу (S). Будемо позначати цю систему "SP".

- (D01.1) Видима зоряна величина зорі S у V фільтрі становить 7.65 ± 0.03 mag, паралакс $= 20.67 \pm 0.05$ кутових мілісекунди, а болометрична поправка (BC) $= -0.0650$ mag. Таким чином, зоря має вищу болометричну світність, ніж її світність у V фільтрі.

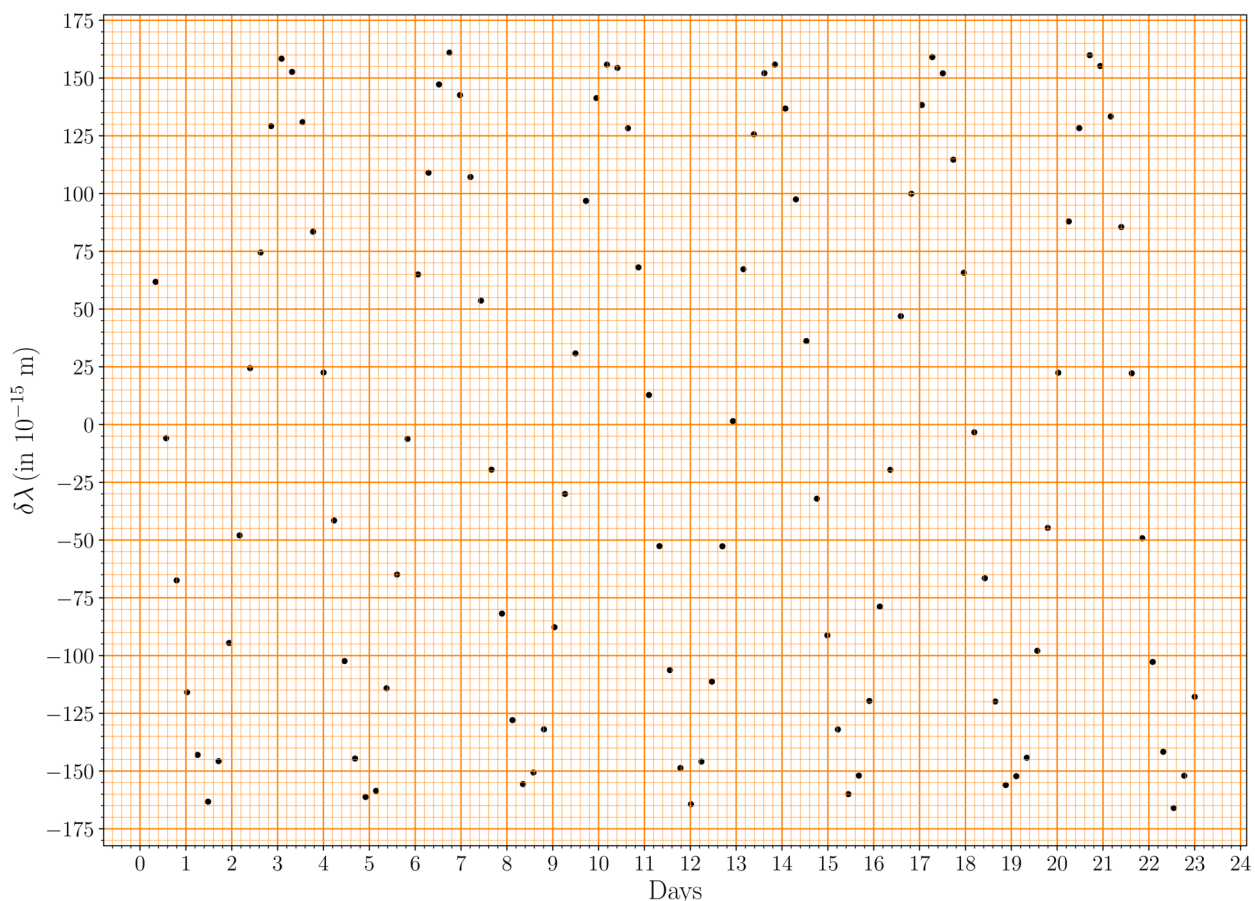
[8]

Оцініть масу зорі, M_s (в одиницях $M_\odot$), припускаючи, що відношення маса-світність ($M-L$) має вигляд $L \propto M^4$. Також оцініть похибку у M_s . Вам може знадобитися $d \ln x / dx = 1/x$.

Метод радіальних швидкостей

Метод радіальних швидкостей використовує доплерівський зсув $\delta\lambda \equiv \lambda_{\text{obs}} - \lambda_0$ між спостережуваною довжиною хвилі λ_{obs} і лабораторною довжиною хвилі λ_0 відомої спектральної лінії, щоб виявити екзопланету і визначити її характеристики.

На рисунку нижче показано $\delta\lambda$ для лінії Fe I ($\lambda_0 = 543.45 \times 10^{-9}$ м) як функцію часу для системи SP.



Напівамплітуда радіальної швидкості K визначається як $K \equiv (v_{r, \text{max}} - v_{r, \text{min}})/2$, де $v_{r, \text{max}}$ і $v_{r, \text{min}}$ - максимальна і мінімальна радіальні швидкості, відповідно. Для колової орбіти планети напівамплітуду K можна записати так:

$$K = \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_p + M_s)^{2/3}}$$

де T - період, i - нахил площини орбіти планети (кут між нормаллю до площини орбіти планети і променем зору спостерігача), M_p і M_s - маси планети і зорі, відповідно.

(D01.2) Використовуйте графік, наведений вище у Зведеному аркуші відповідей (повернутий на 90°), щоб відповісти на наступні запитання.

(D01.2a) Проведіть плавну криву через точки, показані на графіку. [2]

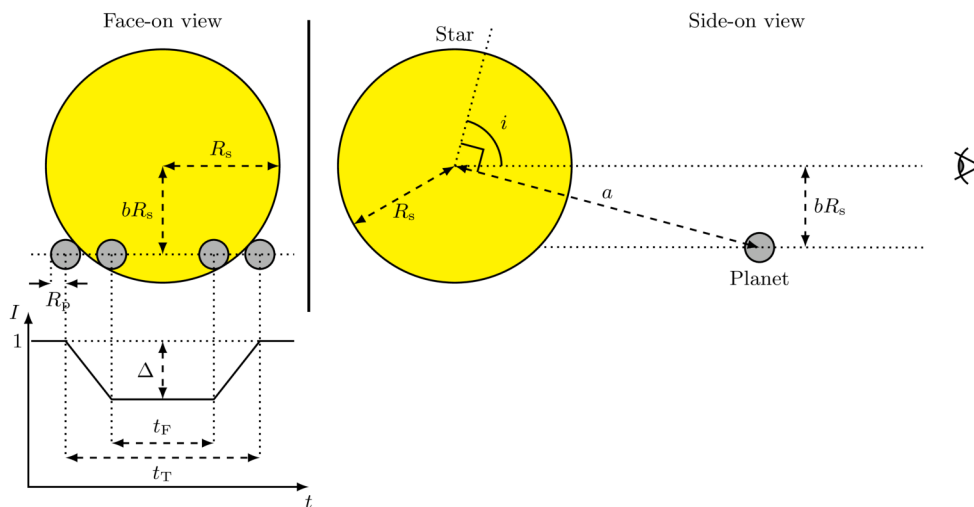
(D01.2b) Виберіть точки на накресленій кривій і використовуйте якомога точніші методи [11] для визначення T і K разом з відповідними похибками. Усі точки, використані для обчислення T і K , повинні бути занесені у таблицю у Зведеному аркуші відповідей. Використовуйте решту таблиці, щоб показати ваші проміжні розрахунки, за необхідності, з відповідними заголовками.

(D01.2c) Знайдіть мінімальну масу планети $M_{p, \min}$ (в $M_\odot$) та відповідну їй похибку, [5] припускаючи $M_p \ll M_s$.

(D01.2d) Використовуючи значення $M_{p, \min}$, обчислене в частині (D01.2c), обчисліть [4] мінімальне значення великої півосі орбіти планети $a_{\min}$ в а.о. та відповідну похибку.

Метод транзиту (без потемніння до краю)

Схема транзиту планети (не в масштабі) показана нижче. Спочатку будемо вважати, що диск зорі має однорідну середню інтенсивність з деякими власними шумами, зумовленими самою зорею.



Крива блиску нормованої інтенсивності I як функція часу t показана на схематичній діаграмі транзиту вище. Середній блиск зорі поза транзитом прийнято за одиницю. Максимальне зменшення блиску позначено Δ на нормованій кривій блиску. Для рівномірно яскравого зоряного диска радіус планети, R_p , пов'язаний з Δ як

$$\left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2 = \Delta,$$

де R_s - радіус зорі.

Загальну тривалість транзиту (коли планета повністю або частково закриває зоряний диск) позначимо через t_T , тоді як тривалість повного транзиту (час, впродовж якого планета повністю знаходиться перед диском зорі) позначимо через t_F . "Прицільний параметр" b - це проекція відстані між центром планети і центром зорі на картинну площину посередині транзиту, виражена в одиницях радіуса зорі R_s .

Якщо площина орбіти планети не сильно відхиляється від променя зору, тоді прицільний параметр задається формулою

$$b = \left[\frac{(1 - \sqrt{\Delta})^2 - (t_F/t_T)^2(1 + \sqrt{\Delta})^2}{1 - (t_F/t_T)^2} \right]^{1/2}$$

- (D01.3) Для системи SP відомий радіус зорі $R_s = 1.20R_\odot$, і транзит планети справді видно. [3]
Використовуючи мінімальний радіус орбіти, $a_{\min}$, отриманий у частині (D01.2d), знайдіть мінімальне значення $i_{\min}$ кута нахилу орбіти планети.

Якщо припустити, що диск зорі має рівномірну яскравість, то крива блиску транзити виглядатиме так, як показано нижче.



- (D01.4) Використовуючи наведену криву блиску, дайте відповіді на наступні запитання. Вказівка: згадана вище крива блиску також наведена у Зведеному аркуші відповідей.

(D01.4a) Оцініть значення t_T та t_F у днях, позначивши відповідні величини на графіку. [3]

(D01.4b) Обчисліть середнє значення Δ , позначивши відповідні величини на графіку і знайдіть R_p в одиницях $R_\odot$. [2]

(D01.4c) Визначте значення i у градусах, припускаючи, що радіус орбіти дорівнює $a_{\min}$. [2]

Вводимо потемніння до краю

Досі ми вважали диск зорі рівномірно яскравим. У дійсності, спостережувана яскравість зоряного диска не є рівномірною через "потемніння до краю" - оптичний ефект, в результаті якого центральна частина диска зорі виглядає яскравішою за край, або "лімб".

Ефект потемніння до краю можна виміряти відносною інтенсивністю $J(\theta) \equiv \frac{I(\theta)}{I(0)}$, де θ - кут між нормаллю до поверхні зорі в деякій точці і променем зору спостерігача, проведеним в цю точку, $I(\theta)$ - спостережувана

інтенсивність зоряного диска в зазначеній точці, $I(0)$ - інтенсивність у центрі зоряного диска. Для віддаленого спостерігача θ змінюється від $\theta = 0$ (центр диска) до $\theta \approx 90^\circ$ (край диска).

- (D01.5) У таблиці нижче наведено виміряні значення $J(\theta)$ на певній довжині хвилі для Сонця. Будемо вважати, що для зорі S має місце такий самий профіль потемніння до краю.

θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$
0°	1.000	20°	0.971	40°	0.883	70°	0.595
10°	0.994	25°	0.950	50°	0.794	80°	0.475
15°	0.984	30°	0.943	60°	0.724	90°	0.312

Профіль потемніння до краю можна змодельовати за допомогою квадратичної формули:

$$J(\theta) = 1 - a_1(1 - \cos \theta) - a_2(1 - \cos \theta)^2,$$

де a_1 і a_2 - дві константи.

Ми можемо оцінити невідомі коефіцієнти a_1 і a_2 з наведених даних, побудувавши графік з відповідними змінними.

- (D01.5a) Виберіть пару змінних (x_1, y_1) , які є відповідними функціями від θ та J , які ви хочете використати для осей x та y відповідно, щоб визначити a_1 та a_2 . Запишіть вирази для x_1 та y_1 . [2]

Якщо вам потрібно визначити додаткові змінні для додаткових графіків, визначте їх як (x_2, y_2) і т.д.

- (D01.5b) Складіть таблицю значень, необхідних для ваших графіків. [4]

- (D01.5c) Побудуйте графіки в нових змінних на наданому аркуші для графіків (позначте свій графік як "D01.5c"). [7]

- (D01.5d) Знайдіть значення a_1 та a_2 з графіка. Похибки для значень не потрібні. [7]

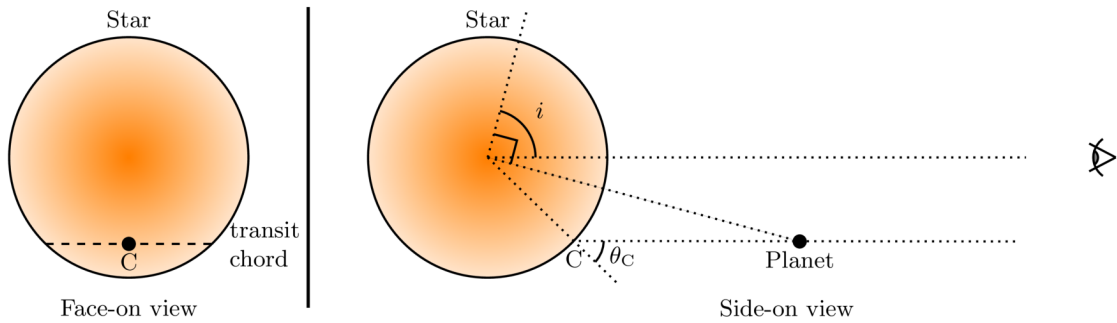
Транзит за наявності потемніння до краю

Тепер ми розглянемо транзити планети через диск зорі, де спостерігається потемніння до краю. За наявності потемніння до краю, яке ми моделюватимемо квадратичною залежністю $J(\theta)$, наведеною вище, середня спостережувана інтенсивність всього зоряного диска (без транзиту), $\langle I \rangle$, має вигляд:

$$\langle I \rangle = \left(1 - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{6}\right) I(0).$$

Надалі вважайте, що зменшення яскравості, спричинене транзитом планети, тепер залежить не лише від відношення радіусів планети і зорі, $\left(\frac{R_p}{R_s}\right)$, але й від профілю інтенсивності диску зорі вздовж хорди транзиту, який, у свою чергу, залежить від кута нахилу, i .

На схематичній діаграмі нижче (не в масштабі) показано цю конфігурацію. Зверніть увагу, що яскравіша частина зорі показана темнішим кольором, тоді як планета показана чорною крапкою.



Тут відношення між $\left(\frac{R_p}{R_s}\right)$ і виміряною Δ з кривої блиску дорівнює

$$\Delta = \frac{I(\theta_C)}{\langle I \rangle} \left(\frac{R_p}{R_s} \right)^2,$$

де $I(\theta_C)$ - інтенсивність диску зорі в середині хорди транзитів (точка C на рисунку вище), θ_C - кут між променем зору і нормаллю до поверхні в цій точці. З наведеного вище очевидно, що для даної зорі однакове значення Δ можна отримати за допомогою багатьох комбінацій розміру планети, R_p і кута нахилу i .

- (D01.6) Можна однозначно визначити як R_p , так і i , використовуючи дані транзитних кривих блиску на двох довжинах хвиль, скажімо, λ_B (синій) і λ_R (червоний). Коефіцієнти потемніння до краю для цих двох довжин хвиль наведено нижче:

Довжина хвилі	a_1	a_2
λ_B	0.82	0.05
λ_R	0.24	0.20

- (D01.6a) Виберіть правильне твердження з наведених нижче, яке описує зв'язок між максимальною глибиною транзитів Δ для λ_B і кутом нахилу (i) орбіти, і позначте його (✓) у Зведеному аркуші відповідей. [2]

- A. Δ зростає зі зменшенням i .
B. Δ зменшується зі зменшенням i .
C. Δ не залежить від i .

- (D01.6b) Виміряні максимальні глибини транзитів (Δ) для "SP" дорівнюють 0.0182 і 0.0159 [4]
для λ_B і λ_R , відповідно.

Намалюйте схематичну криву блиску транзитів для λ_B і λ_R на наданій сітці в Зведеному аркуші відповідей і позначте криві літерами "B" і "R", відповідно. Припустіть, що загальна тривалість проходження однакова для обох довжин хвиль. Криві не обов'язково повинні бути в масштабі, але вони повинні правильно відображати форму кривих блиску.

- (D01.7) Ви можете використати графічний метод для знаходження значень R_p та i для системи SP за вимірами Δ на λ_B та λ_R .

- (D01.7a) Напишіть вираз, що пов'язує відповідні змінні, які потрібно побудувати. [6]
(Підказка: Ви можете розглядати i або b та R_p як відповідні змінні).

- (D01.7b) Зведіть у таблицю відповідні величини, які потрібно побудувати. [5]

-
- (D01.7c) Намалуйте відповідний графік і позначте його як "D01.7c". [7]
- (D01.7d) Обчисліть значення R_p (у $R_\odot$) та i (у градусах) за графіком. [4]
- (D01.8) На основі результатів, отриманих у цій задачі, вкажіть, чи є планета Р "ROCKY" ("КАМ'ЯНОЮ") або "GASEOUS" ("ГАЗОВОЮ"), позначивши (✓) відповідну клітинку у Зведеному аркуші відповідей. [2]

(D02) Прогнозування часу досягнення Землі корональним викидом маси

[60 балів]

Сонце час від часу викидає хмари намагніченої плазми, так звані корональні викиди маси (КВМ/СМЕ), які рухаються з поверхні Сонця і поширюються назовні. Точне передбачення часу їхнього прибуття на Землю має важливе значення для розуміння процесів і зменшення їхнього потенційного впливу на супутники, що обертаються навколо Землі. У цій задачі ми прагнемо передбачити час прибуття КВМ, розробивши емпіричну модель, використовуючи дані 10 КВМ. В межах цієї задачі відстань між поверхнею Сонця і Землею приймається рівною $214R_{\odot}$.

Далі припустимо, що Сонце не обертається. Через електромагнітні, гравітаційні сили та сили опору, КВМ зазнають змінного прискорення на шляху свого поширення. У перших двох частинах цієї задачі ми припускаємо, що простір між Сонцем і Землею є вакуумом.

КВМ у вакуумі.

- (D02.1) Початкова швидкість u на поверхні Сонця ($= 1R_{\odot}$), кінцева швидкість v при досягненні Землі та час руху до Землі після відриву від поверхні Сонця (у годинах) τ наведені для 10 КВМ у наступній таблиці.

КВМ	u	v	τ
Назва	(км с ⁻¹)	(км с ⁻¹)	(год)
СМЕ-A	804	470	74.5
СМЕ-B	247	360	127.5
СМЕ-C	523	396	103.5
СМЕ-D	830	415	71.0
СМЕ-E	665	400	104.5
СМЕ-F	347	350	101.5
СМЕ-G	446	375	99.5
СМЕ-H	155	360	97.0
СМЕ-I	1016	515	67.0
СМЕ-J	683	410	54.0

- (D02.1a) Обчисліть значення середнього прискорення a для кожного КВМ у м с⁻². [3]

- (D02.1b) Ми припускаємо емпіричну модель для прискорення КВМ a_{model} , що залежить від його початкової швидкості u , як, $a_{\text{model}} = m \left(\frac{u}{u_0} \right) + \alpha$; де a_{model} виражено у м с⁻², u виражено у км с⁻¹ і $u_0 = 1.00 \times 10^3$ км с⁻¹.

Визначте константи m і α та оцініть пов'язані з ними похибки, використовуючи побудований для цього графік (позначте ваш графік як "D02.1b"). [15]

- (D02.1c) Для кожного КВМ занесіть в таблицю a_{model} в одиницях м с⁻². Обчисліть середньоквадратичне відхилення прискорень δa_{rms} між розрахованим прискоренням, a , та значеннями з моделі a_{model} . [4]

- (D02.2) Розглянемо два інші КВМ: СМЕ-1 та СМЕ-2 з початковими швидкостями $u = 1044$ км с⁻¹ та $u = 273$ км с⁻¹, відповідно.

- (D02.2a) Використовуючи емпіричну модель з пункту (D02.1b), обчисліть прогнозований час досягнення Землі, $\tau_{1, \text{m}}$ і $\tau_{2, \text{m}}$ (у годинах), для СМЕ-1 і СМЕ-2, відповідно. [4]

- (D02.2b) Із спостережень час досягнення Землі СМЕ-1 та СМЕ-2 становить 46.0 год та 74.5 год, відповідно. Емпірична модель вважається ДІЙСНОЮ (VALID) для конкретного КВМ, якщо передбачений час його прибуття знаходиться в межах 20% від спостережуваного часу прибуття; в іншому випадку вона є НЕДІЙСНОЮ (NOT VALID). Вкажіть достовірність моделі для кожного КВМ, поставивши галочку (✓) у відповідній клітинці у Зведеному аркуші відповідей. [2]

КВМ в присутності сонячного вітру

Насправді простір між Сонцем і Землею заповнений сонячним вітром, який діє на КВМ як сила опору. Ця сила опору може або сповільнювати, або прискорювати КВМ, залежно від швидкості КВМ відносно сонячного вітру. Щоб врахувати вплив сонячного вітру, ми використовуємо модель “drag-only” для відстаней $R_{\text{obs}}(t) \geq R_0$, де R_0 - відстань до Сонця, при якій сила опору стає домінуючою силою, що впливає на рух КВМ.

Відстань від поверхні Сонця фігурує у моделі “drag-only” як $R_D(t)$, а швидкість КВМ $V_D(t)$. Ці величини у моделі задаються формулами

$$R_D(t) = \frac{S}{\gamma} \ln [1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)] + V_s(t - t_0) + R_0$$

$$V_D(t) = \frac{V_0 - V_s}{1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)} + V_s$$

де $\gamma = 2 \times 10^{-8} \text{ км}^{-1}$, V_s - швидкість сонячного вітру, яку вважаємо сталою, R_0 та V_0 - відстань і швидкість, відповідно, у момент часу t_0 , а S - знак, який визначається наступною умовою: $S = 1$, якщо $V_0 > V_s$; $S = -1$, якщо $V_0 \leq V_s$.

- (D02.3) У наведених нижче таблицях показано спостережуване зміщення (відстань від Сонця), $R_{\text{obs}}(t)$ (виміряне в $R_\odot$) як функцію часу t (у годинах) для двох КВМ: СМЕ-3 та СМЕ-4. Остання точка даних у кожній таблиці (D5 і P8, відповідно) відповідає часу досягнення відповідного КВМ Землі. Для цієї частини використовуйте значення $V_s = 330 \text{ км с}^{-1}$.

СМЕ-3		
Точка даних	t (у годинах)	$R_{\text{obs}}(t)$ (у $R_\odot$)
D1	0.200	6.36
D2	0.480	7.99
D3	1.22	11.99
D4	1.49	13.51
D5	58.05	214

СМЕ-4		
Точка даних	t (у годинах)	$R_{\text{obs}}(t)$ (у $R_\odot$)
P1	1.00	4.00
P2	3.00	6.00
P3	4.00	9.00
P4	5.00	11.0
P5	21.0	43.0
P6	50.0	100
P7	85.0	170
P8	111	214

Ми хочемо оцінити, чи задовільно передбачає модель “drag-only” час прибуття цих КВМ. Для використання цієї моделі необхідно зробити відповідний вибір t_0 , а також R_0 та V_0 .

- (D02.3a) Для СМЕ-3 розгляньте такі два випадки: [6]
 (C1) t_0 дорівнює середині інтервалу D1 - D2
 (C2) t_0 дорівнює середині інтервалу D3 - D4
 Припустимо, що швидкість залишається сталою в межах кожного конкретного інтервалу D1-D2 і D3-D4, але може відрізнятися між цими двома інтервалами.
 Використовуючи t_0 , R_0 , і V_0 , обчисліть різницю між спостережною і передбаченою радіальною відстанню до Сонця $\delta R_D \equiv R_{\text{obs}}(t) - R_D(t)$ в одиницях $R_\odot$ для $t = 58.05$ год для кожного з двох випадків.
- (D02.3b) Оцініть $R_D(t)$ для точок P5, P6, P7 і P8 між Сонцем і Землею для СМЕ-4 для [4]
 наступних двох випадків, застосовуючи процедуру, аналогічну до (D02.3a):
 (C3) t_0 дорівнює середині інтервалу P1 - P2
 (C4) t_0 дорівнює середині інтервалу P3 - P4.
- (D02.3c) Побудуйте графік $R_D(t)$ (у $R_\odot$) від t (у годинах) для двох випадків: C3 і C4, для [10]
 СМЕ-4 у точках P5, P6, P7 і P8 (позначте ваш графік як "D02.3c"). На цьому ж графіку намалюйте плавні лінії через точки для двох вищезгаданих випадків. Для цієї частини візьміть діапазон значень по осі x від 0 до 180 год.
- (D02.3d) Використовуючи графік, оцініть модуль різниці $|\delta\tau|$ між фактичним часом [4]
 досягнення СМЕ-4 Землі і часом досягнення Землі, передбаченим моделлю "drag-only", для кожного з випадків C3 і C4.
- (D02.3e) Вкажіть, чи є наступне твердження ПРАВИЛЬНИМ (TRUE) або [1]
 НЕПРАВИЛЬНИМ (FALSE), позначивши (✓) відповідну клітинку у Зведеному аркуші відповідей (письмове обґрунтування не потрібне):
 "Сили опору збоку сонячного вітру на КВМ, стають домінуючими для СМЕ-3 значно раніше порівняно з СМЕ-4".
- (D02.4) Розглянемо опір як домінуючу силу, що діє на 10 КВМ у частині D02.1. Припустимо, що [7]
 модель "drag-only" застосовна від поверхні Сонця ($R_0 = 1 R_\odot$) і далі, для всіх КВМ.
 Оцініть і занесіть в таблицю швидкість сонячного вітру V_s в km s^{-1} для кожної КВМ. Далі обчисліть середню швидкість сонячного вітру $V_{s, \text{avg}}$ від всіх 10 КВМ.