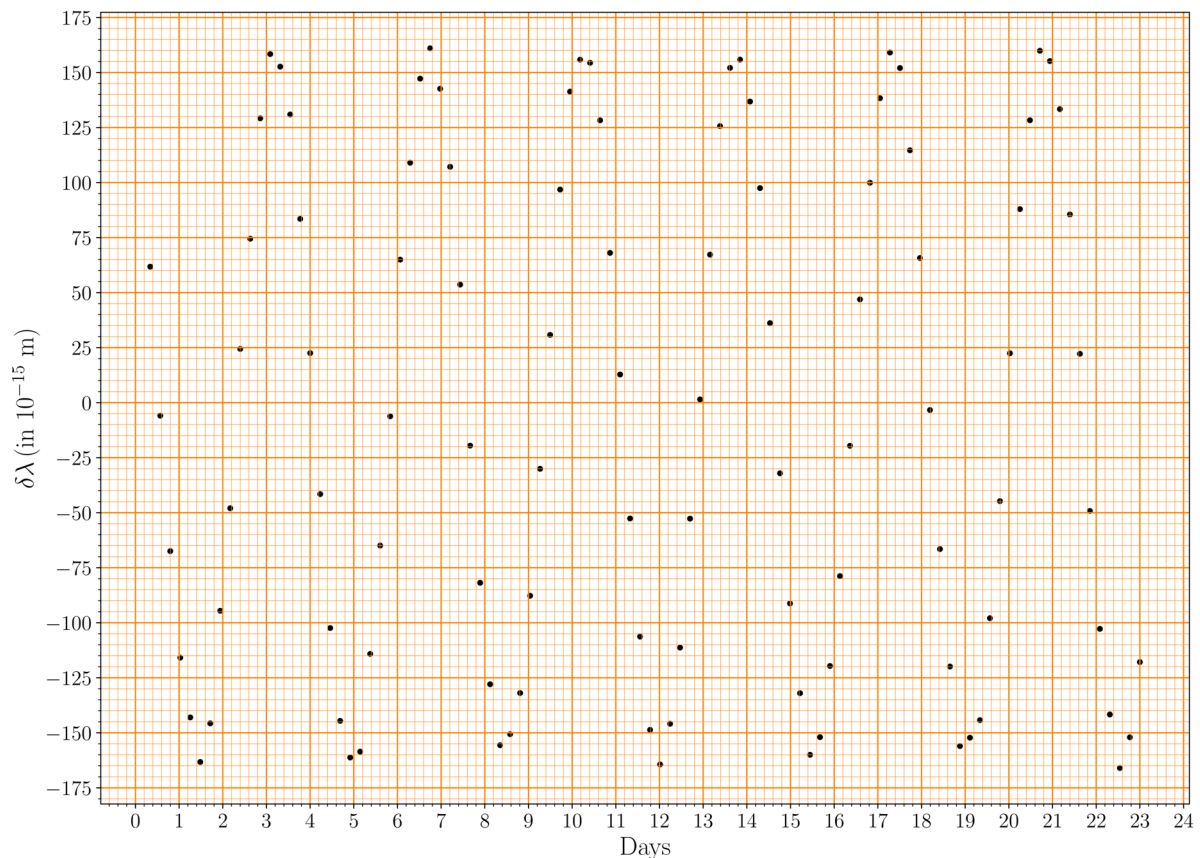


วิธีความเร็วในแนวเล็ง (Radial Velocity Method)

วิธีความเร็วในแนวเล็ง (radial velocity method) ใช้การเลื่อนดอปเพลอร์ (Doppler shift) $\delta\lambda \equiv \lambda_{\text{obs}} - \lambda_0$ ระหว่างความยาวคลื่นที่สังเกตได้ (observed wavelength) λ_{obs} กับความยาวคลื่นในกรอบนิ่ง (rest wavelength) (λ_0) ของเส้นสเปกตรัมที่ทราบค่าเพื่อตรวจจับดาวเคราะห์นอกระบบและหาสมบัติ (characteristics) ของดาวเคราะห์

ภาพด้านล่างแสดง $\delta\lambda$ สำหรับเส้น Fe I ($\lambda_0 = 543.45 \times 10^{-9} \text{ m}$) เป็นฟังก์ชันของเวลาที่ได้รับการสังเกตการณ์สำหรับระบบ SP



ครึ่งแอมพลิจูดของความเร็วแนวรัศมี (velocity semi-amplitude) K จะถูกนิยามเป็น $K \equiv (v_{r, \text{max}} - v_{r, \text{min}})/2$ โดยที่ $v_{r, \text{max}}$ และ $v_{r, \text{min}}$ คือความเร็วในแนวรัศมีต่ำสุดและสูงสุดตามลำดับ สำหรับวงโคจรดาวเคราะห์ที่เป็นวงกลม ค่าครึ่งแอมพลิจูด K สามารถเขียนได้เป็น

$$K = \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_p + M_s)^{2/3}}$$

เมื่อ T คือคาบ และ i คือมุมเอียง (inclination) ของวงโคจรดาวเคราะห์ (ซึ่งก็คือมุมระหว่างเส้นตั้งฉากกับระนาบวงโคจรของดาวเคราะห์และเส้นแนวเล็งของผู้สังเกต) M_p และ M_s คือมวลของดาวเคราะห์และดาวฤกษ์ตามลำดับ

(D01.2) ใช้กราฟ (ซึ่งถูกหมุนด้วยมุม 90°) ในแผ่นสรุปคำตอบเพื่อตอบคำถามต่อไปนี้

(D01.2a) จงวาดเส้นโค้งเรียบ (smooth curve) ที่สอดคล้องกับข้อมูลจากการสังเกตการณ์ที่ให้มา [2]
ในกราฟ

- (D01.2b) ให้เลือกจุดที่เหมาะสมบนเส้นกราฟของนักเรียน และใช้วิธีการที่เหมาะสมเพื่อหาค่า T และ K พร้อมกับค่าความไม่แน่นอนที่เกี่ยวข้อง ทุกจุดข้อมูลใช้ในการคำนวณค่า T และ K จะต้องแสดงในตารางในกระดาษสรุปคำตอบ พร้อมกำกับชื่อที่เหมาะสมให้กับหัวตาราง [11]
- (D01.2c) จงหาค่ามวลน้อยที่สุดของดาวเคราะห์ $M_{p,\backslash,\min}$ (ใน $M_{\odot}$) พร้อมกับค่าความไม่แน่นอนที่สอดคล้องกัน โดยให้ $M_p \ll M_s$ [5]
- (D01.2d) ให้ใช้ค่า $M_{p,\backslash,\min}$ ที่ประมาณไว้ในข้อ (D01.2c) คำนวณค่าต่ำสุดของระยะครึ่งแกนเอก (semi-major axis) ของวงโคจรของดาวเคราะห์ $a_{\min}$ ในหน่วย au พร้อมกับค่าความไม่แน่นอน [4]
- (D01.3) สำหรับระบบ SP รัศมีดาวฤกษ์นั้นทราบว่ามีค่าเป็น $R_s = 1.20R_{\odot}$ และสามารถมองเห็นการผ่านหน้าดาวฤกษ์ (transit) ของดาวเคราะห์ได้ จงใช้รัศมีวงโคจรต่ำสุด (minimum orbital radius) $a_{\min}$ จากข้อย่อย (D01.2d) ในการหาค่าต่ำสุด $i_{\min}$ ของมุมเอียง (inclination angle) [3]

โดยสมมติว่าจานดาวฤกษ์ (stellar disk) มีความสว่างสม่ำเสมอ (uniform brightness) กราฟของเส้นโค้งความสว่างในการผ่านหน้าดาวฤกษ์ (transit light curve) จะมีลักษณะดังกราฟด้านล่าง



- (D01.4) ใช้กราฟแสง (lightcurve) ที่ให้ ตอบคำถามต่อไปนี้ เพื่อเป็นข้อมูลอ้างอิง กราฟแสง (lightcurve) ข้างต้นจะแสดงในกระดาษสรุปคำตอบด้วย
- (D01.4a) ให้ประมาณค่าของ t_T และ t_F ในหน่วยวัน โดยทำเครื่องหมายที่เหมาะสมที่อ่านได้บนกราฟ [3]
- (D01.4b) ให้ประมาณค่าเฉลี่ยของ Δ และหา R_p ในหน่วยของ $R_{\odot}$ [2]

(D01.4c) ให้หาค่าของ i เป็นองศา โดยให้รัศมีวงโคจรเป็น $a_{\min}$

[2]

การแนะนำ การคล้ำขึ้นที่ขอบดวง (Introducing limb darkening)

ถึงตอนนี้เราสมมติว่าจานดาวฤกษ์ (stellar disk) มีความสว่างสม่ำเสมอ (uniformly bright) แต่ในความเป็นจริง ความสว่าง (brightness) ที่สังเกตได้ของจานดาวฤกษ์ (stellar disk) นั้นไม่สม่ำเสมอ เนื่องจาก “การคล้ำขึ้นที่ขอบดวง (limb darkening)” ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ทางแสง (optical effect) ที่ใจกลางของจานดาวฤกษ์จะมีความสว่างกว่าขอบจานดาวฤกษ์ หรือ “ขอบดวง (limb)”

ผลของการคล้ำขึ้นที่ขอบดวงสามารถวัดได้จากความเข้มสัมพัทธ์ (relative intensity) $J(\theta) \equiv \frac{I(\theta)}{I(0)}$ โดยที่ θ คือมุมระหว่างเส้นปกติกับพื้นผิวดาวฤกษ์ (stellar surface) ที่จุดหนึ่ง กับ เส้นที่เชื่อมระหว่างผู้สังเกตกับจุดนั้น เมื่อ $I(\theta)$ คือความเข้มที่สังเกตได้ของจานดาวฤกษ์ที่จุดนั้น ($I(0)$ คือความเข้มที่ศูนย์กลางของจานดาวฤกษ์) สำหรับผู้สังเกตที่อยู่ไกล θ จะแปรผันตั้งแต่ $\theta = 0$ (ศูนย์กลางของจาน) ถึง $\theta = 90^\circ$ (ขอบของจาน)

(D01.5) ตารางด้านล่างแสดงค่า $J(\theta)$ ที่วัดได้ในช่วงความยาวคลื่นหนึ่งของดวงอาทิตย์ เราจะสมมติว่าโปรไฟล์ (profile) การคล้ำขึ้นที่ขอบดวง S มีลักษณะแบบเดียวกัน

θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$
0°	1.000	20°	0.971	40°	0.883	70°	0.595
10°	0.994	25°	0.950	50°	0.794	80°	0.475
15°	0.984	30°	0.943	60°	0.724	90°	0.312

โปรไฟล์การคล้ำขึ้นที่ขอบสามารถโมเดลจากสูตรกำลังสอง:

$$J(\theta) = 1 - a_1(1 - \cos \theta) - a_2(1 - \cos \theta)^2,$$

โดยที่ a_1 และ a_2 เป็นค่าคงที่สองค่า

เราจะประมาณค่าสัมประสิทธิ์ a_1 และ a_2 จากข้อมูลที่กำหนดโดยการสร้างกราฟโดยใช้ตัวแปรที่เหมาะสม

(D01.5a) เลือกคู่ของ (x_1, y_1) ที่เป็นฟังก์ชันที่เหมาะสมใดๆของ θ และ J ที่นักเรียนต้องการพล็อตตามแกน x และ y ตามลำดับ สำหรับหาค่า a_1 และ a_2 ให้เขียนแสดงความสัมพันธ์สำหรับ x_1 และ y_1 ด้วย [2]

ถ้านักเรียนจำเป็นต้องกำหนดตัวแปรเพิ่มเติมสำหรับพล็อตเพิ่มเติม ให้กำหนดเพิ่มเป็น (x_2, y_2) เป็นต้นได้

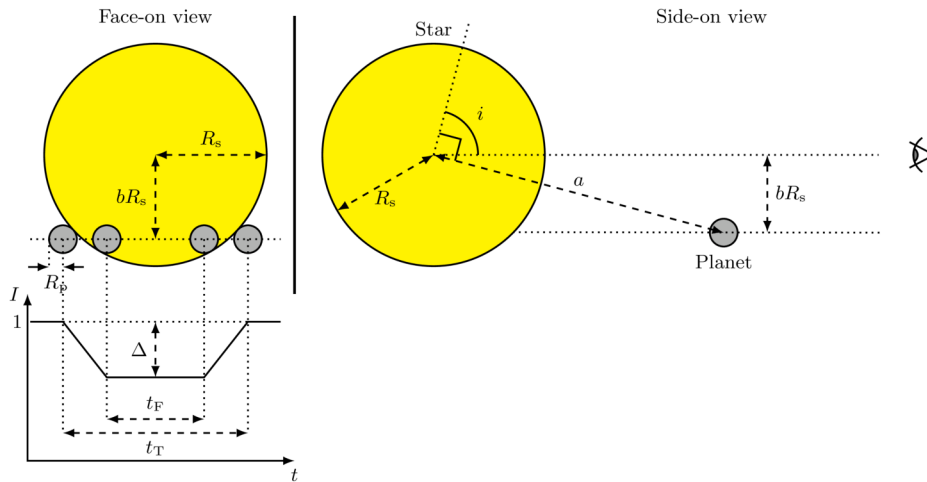
(D01.5b) ใส่ค่าในตารางสำหรับข้อมูลในการพล็อตของนักเรียน [4]

(D01.5c) พล็อตตัวแปรที่กำหนดขึ้นบนกระดาษกราฟที่กำหนด (พร้อมทำเขียนสัญลักษณ์บนกราฟของนักเรียนว่า “D01.5c”) [7]

(D01.5d) หาค่า a_1 และ a_2 จากกราฟ [7]

วิธีใช้การผ่านหน้าดาวฤกษ์แบบไม่มีการคล้ำขึ้นที่ขอบดาว (Transit Method without Limb Darkening)

แผนภาพแสดงการผ่านหน้าดาวฤกษ์ของดาวเคราะห์ (ซึ่งไม่ได้วาดตามมาตราส่วน) อยู่ด้านล่าง ในตอนนี เราจะสมมติว่า ภาพส่องมิติของดาวฤกษ์ หรือจานดาวฤกษ์ (stellar disk) มีความเข้มเฉลี่ยสม่ำเสมอ (uniform average intensity) โดยมีสัญญาณภายในรบกวน (intrinsic noise) เนื่องจากตัวดาวฤกษ์เอง



เส้นโค้งความสว่างที่ถูกระบุโดย (normalized light curve) I ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา t แสดงอยู่ในแผนภาพของการผ่านหน้าดาวฤกษ์ข้างต้น ความเข้มเฉลี่ยของดาวฤกษ์ในขณะที่ไม่มีการผ่านหน้าถือเป็น 1 การลดลงของความเข้มสูงสุดนั้นกำหนดโดย Δ ดังแสดงในกราฟของ normalized light curve ด้านบน สำหรับจานดาวฤกษ์ที่สม่ำเสมอ รัศมีของดาวเคราะห์ R_p จะสัมพันธ์กับ Δ โดยสมการ

$$\left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2 = \Delta$$

เมื่อ R_s คือรัศมีของดาวฤกษ์

ระยะเวลาทั้งหมดของการผ่านหน้าดาวฤกษ์ (ซึ่งวัดจากช่วงเวลาที่ดาวเคราะห์บังจานดาวฤกษ์ไม่ว่าจะด้วยส่วนใดก็ตามของดาวเคราะห์หรือด้วยตัวดาวเคราะห์ทั้งดวง) จะแทนด้วย t_T ในขณะที่ t_F แสดงระยะเวลาเมื่อดาวเคราะห์อยู่ด้านหน้าจานดาวฤกษ์อย่างสมบูรณ์ “พารามิเตอร์การกระทบ (impact parameter)” b คือระยะทางที่คาดการณ์ไว้ระหว่างดาวเคราะห์และจุดศูนย์กลางของจานดาวฤกษ์ ณ จุดกึ่งกลางของการผ่าน โดยวัดในหน่วยของรัศมีดาวฤกษ์ R_s

สำหรับดาวเคราะห์ที่มีวงโคจรรอบดาวฤกษ์ที่หันข้างเกือบสมบูรณ์ (nearly edge-on orbit) เทียบกับผู้สังเกตการณ์ พารามิเตอร์การกระทบจะกำหนดโดยสูตร

$$b = \left[\frac{(1 - \sqrt{\Delta})^2 - (t_F/t_T)^2(1 + \sqrt{\Delta})^2}{1 - (t_F/t_T)^2} \right]^{1/2}$$

(D02) การทำนายเวลาการมาถึงของการปลดปล่อยมวลโคโรนา (coronal mass ejections) สู่โลก [60 คะแนน]

ดวงอาทิตย์จะปล่อยพลาสมาแม่เหล็ก (magnetized plasma) ออกมาเป็นครั้งคราว ซึ่งเรียกว่า การปลดปล่อยมวลโคโรนา (CMEs) โดยเกิดจากพื้นผิวดวงอาทิตย์และแพร่กระจายออกไป การทำนายเวลาเดินทางมาถึงโลกที่แม่นยำเป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่งต่อการทำความเข้าใจและบรรเทาผลกระทบที่อาจเกิดขึ้นกับดาวเทียมที่โคจรรอบโลก ในปัญหาข้อนี้ เรามุ่งหวังที่จะทำนายเวลาเดินทางมาถึงของ CMEs โดยการพัฒนาแบบจำลองเชิงประจักษ์ (empirical model) โดยใช้ข้อมูลจาก CMEs จำนวน 10 ครั้ง สำหรับปัญหาข้อนี้ เราจะใช้ระยะทางระหว่างพื้นผิวดวงอาทิตย์และโลกถูกกำหนดให้เป็น $214R_\odot$.

นอกจากนี้ จะให้ดวงอาทิตย์ไม่มีการหมุน เนื่องจากแรงแม่เหล็กไฟฟ้า แรงโน้มถ่วง และแรงต้าน (drag force) ทำให้ CME มีความเร่งแปรผันตลอดช่วงการเคลื่อนที่ สำหรับสองส่วนแรกของปัญหานี้ จะสมมติให้บริเวณระหว่างดวงอาทิตย์และโลกเป็นสุญญากาศ

CMEs เคลื่อนที่ผ่านสุญญากาศ

(D02.1) ความเร็วเริ่มต้น u ที่พื้นผิวดวงอาทิตย์ ($= 1R_{\odot}$) ความเร็วสุดท้าย v เมื่อถึงโลก และเวลาที่จะถึงโลก หลังจากออกจากพื้นผิวดวงอาทิตย์ (เป็นชั่วโมง) τ ได้รับมาจาก 10 CME แสดงในตารางต่อไปนี้

CME	u	v	τ
ชื่อ	(km/s ⁻¹)	(km/s ⁻¹)	(h)
CME-A	804	470	74.5
CME-B	247	360	127.5
CME-C	523	396	103.5
CME-D	830	415	71.0
CME-E	665	400	104.5
CME-F	347	350	101.5
CME-G	446	375	99.5
CME-H	155	360	97.0
CME-I	1016	515	67.0
CME-J	683	410	54.0

(D02.1a) คำนวณความเร่งเฉลี่ย a สำหรับแต่ละ CME ในหน่วย m s⁻² [6]

(D02.1b) เราจะใช้แบบจำลองเชิงประจักษ์ (empirical model) สำหรับความเร่ง a_{model} ของ CME ซึ่งจะขึ้นกับความเร็วเริ่มต้น u ดังนี้ $a_{\text{model}} = m \left(\frac{u}{u_0} \right) + \alpha$; โดยที่ a_{model} แสดงเป็น m s⁻², u แสดงเป็น km s⁻¹ และ $u_0 = 1.00 \times 10^3$ km s⁻¹

ให้หาค่าคงที่ m และ α และความไม่แน่นอนโดยใช้กราฟที่เหมาะสม (ให้เขียนชื่อกราฟ ของนักเรียนว่า “D02.1b”) [12]

(D02.1c) แต่ละ CME ให้ใส่ข้อมูลในตาราง a_{model} ในหน่วย m s⁻² จากนั้นคำนวณ root-mean-square (rms) ที่เบี่ยงเบนจากความเร่ง δa_{rms} ระหว่างความเร่งที่คำนวณได้ a กับแบบจำลอง a_{model} [4]

(D02.2) เราจะพิจารณา CME สองค่า คือ CME-1 และ CME-2 โดยมีความเร็วเริ่มต้น $u = 1044$ km s⁻¹ และ 273 km s⁻¹ ตามลำดับ

(D02.2a) โดยใช้แบบจำลองเชิงประจักษ์ (empirical model) จากข้อ (D02.1b) ให้ทำนายเวลาที่ $\tau_{2,\text{m}}$ ว่าจะมาถึงโลก $\tau_{1,\text{m}}$ เป็นชั่วโมง สำหรับ CME-1 และ CME-2 ตามลำดับ [4]

(D02.2b) เวลาที่ CME-1 และ CME-2 เดินทางมาถึงโลกที่วัดได้คือ 46.0 ชั่วโมง และ 74.5 ชั่วโมง [2]
ตามลำดับ แบบจำลองเชิงประจักษ์ (empirical model) จะถือว่ายอมรับได้สำหรับ CME หนึ่งๆ หากเวลาที่ทำนายไว้นั้นอยู่ใน 20% ของเวลาที่สังเกตได้ นอกนั้นจะไม่ยอมรับ ให้แสดงแบบจำลองที่ยอมรับได้สำหรับ CME แต่ละอันโดยทำเครื่องหมาย (✓) ในช่องของกระดาษคำตอบสรุปคำตอบ

CMEs ที่พิจารณาลมสุริยะ (solar wind)

ในความเป็นจริง ระยะระหว่างดวงอาทิตย์และโลกถูกแทรกซึม (permeated) ด้วยลมสุริยะ ซึ่งจะส่งแรงต้าน (drag force) ไปยัง CME แรงลากนี้สามารถทำให้ CME ช้าลงหรือเร็วขึ้นได้ ขึ้นอยู่กับความเร็วของ CME เทียบกับความเร็วของลมสุริยะ เพื่ออธิบายอิทธิพลของลมสุริยะ เราจะใช้แบบจำลอง "เฉพาะแรงต้าน" (drag-only model) สำหรับระยะทาง $R_{\text{obs}}(t) \geq R_0$ โดยที่ R_0 คือระยะทางที่แรงต้าน (drag force) จะกลายเป็นแรงที่เป็นหลักต่อการเคลื่อนที่ของ CME

ระยะทางจากผิวของดวงอาทิตย์จะถูกประมาณจากโมเดลของแรงต้านอย่างเดียว (drag-only model) $R_D(t)$ และความเร็ว $V_D(t)$ ของ CME ในแบบจำลองนี้จะถูกกำหนดโดย

$$R_D(t) = \frac{S}{\gamma} \ln [1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)] + V_s(t - t_0) + R_0$$

$$V_D(t) = \frac{V_0 - V_s}{1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)} + V_s$$

เมื่อ $\gamma = 2 \times 10^{-8} \text{ km}^{-1}$, V_s คือ ค่าคงที่ของความเร็วของลมสุริยะ, R_0 และ V_0 คือ ระยะทางและความเร็ว ณ เวลา t_0 ตามลำดับ และ S คือ ตัวประกอบเครื่องหมาย $S = 1$ ถ้า $V_0 > V_s$; $S = -1$ ถ้า $V_0 \leq V_s$. สำหรับคำถามส่วนนี้จะสมมติให้ $V_s = 330 \text{ km s}^{-1}$.

- (D02.3) ตารางด้านล่างแสดงการกระจัดในแนวรัศมีที่สังเกตได้ $R_{\text{obs}}(t)$ (วัดใน $R_\odot$) เป็นฟังก์ชันของเวลา t (เป็นชั่วโมง) สำหรับ CME สองตัว ได้แก่ CME-3 และ CME-4 ข้อมูลสุดท้ายในแต่ละตาราง (D5 และ P8 ตามลำดับ) จะสอดคล้องกับเวลาที่ CME นั้นๆ เดินทางมาถึงโลก ในส่วนนี้ให้ $V_s = 330 \text{ km/s}^{-1}$

CME-3		
Data point	t (ใน h)	$R_{\text{obs}}(t)$ (ใน $R_\odot$)
D1	0.200	6.36
D2	0.480	7.99
D3	1.22	11.99
D4	1.49	13.51
D5	58.05	214

CME-4		
Data point	t (ใน h)	$R_{\text{obs}}(t)$ (ใน $R_\odot$)
P1	1.00	4.00
P2	3.00	6.00
P3	4.00	9.00
P4	5.00	11.0
P5	21.0	43.0
P6	50.0	100
P7	85.0	170
P8	111	214

เราจะประเมินว่าแบบจำลอง "แบบแรงต้านอย่างเดียว" สามารถทำนายเวลาการมาถึงของ CME เหล่านี้ได้ที่น่าพอใจหรือไม่ ในการใช้แบบจำลองนี้ จำเป็นต้องเลือก t_0 ที่เหมาะสม และ R_0 และ V_0 ที่สอดคล้องกัน

- (D02.3a) สำหรับ CME-3 ให้พิจารณาสองกรณีต่อไปนี้: [6]
 (C1) t_0 ให้เป็นจุดกึ่งกลางของช่วง D1 – D2
 (C2) t_0 ให้เป็นจุดกึ่งกลางของช่วง D3 – D4
 สมมติว่าความเร็วคงที่ในแต่ละช่วง D1–D2 และ D3–D4 แต่อาจแตกต่างกันระหว่างสองช่วงได้ ให้ใช้ t_0 , R_0 และ V_0 คำนวณความแตกต่างระหว่างการกระจัดในแนวรัศมี (radial displacement) ที่สังเกตได้และที่ทำนาย $\delta R_D \equiv R_{\text{obs}}(t) - R_D(t)$ ในหน่วย $R_\odot$ ที่ $t = 58.05$ h สำหรับแต่ละกรณีทั้งสองแบบ
- (D02.3b) หาค่า $R_D(t)$ ที่จุด P5, P6, P7 และ P8 ระหว่างดวงอาทิตย์และโลกสำหรับ CME-4 [4]
 สำหรับสองกรณีต่อไปนี้โดยปรับจากขั้นตอนที่คล้ายกับ (D02.3a):
 (C3) t_0 ถือเป็นจุดกึ่งกลางของช่วง P1 – P2
 (C4) t_0 ถือเป็นจุดกึ่งกลางของช่วง P3 – P4
- (D02.3c) พล็อต $R_D(t)$ (ใน $R_\odot$) เทียบกับ t (หน่วยเป็นชั่วโมง) สำหรับสองกรณี C3 และ C4 [10]
 สำหรับ CME-4 ที่จุด P5, P6, P7 และ P8 (ทำสัญลักษณ์ของกราฟของนักเรียนว่าเป็น "D02.3c") ในกราฟเดียวกัน ให้วาดเส้นโค้งเรียบ (smooth curve) ของ $R_D(t)$ สำหรับสองกรณีข้างต้น สำหรับข้อนี้ให้ช่วงของแกน x อยู่ในช่วง 0 ถึง 180 ชั่วโมง
- (D02.3d) โดยใช้กราฟในการประมาณค่าความแตกต่างสัมบูรณ์ (absolute difference) $|\delta\tau|$ [4]
 ระหว่างเวลาที่ CME-4 มาถึงโลกจริงและเวลาที่ CME-4 มาถึงตามที่ทำนายจากแบบจำลองที่ใช้แรงต้านอย่างเดียว (drag-only model) แต่ละกรณีของ C3 และ C4
- (D02.3e) ระบุว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จโดยทำเครื่องหมาย (✓) ในช่องที่เหมาะสมใน [1]
 แผ่นสรุปคำตอบ (ไม่ต้องให้คำอธิบายเป็นลายลักษณ์อักษร):
 “แรงต้านที่กระทำโดยลมสุริยะบน กับ CME กลายเป็นแรงหลัก (dominant) และเริ่มมีอิทธิพลต่อการเคลื่อนที่ของ CME-3 ในเวลาเริ่มต้น เมื่อเทียบกับ CME-4”
- (D02.4) พิจารณาแรงต้าน (drag) ให้เป็นแรงหลักที่กระทำต่อ CME จำนวน 10 ครั้งในส่วน of ข้อ D02.1 [7]
 โดยสมมติว่าแบบจำลอง "แรงต้านอย่างเดียว (drag-only model)" สามารถใช้ได้ตั้งแต่ผิวดวงอาทิตย์ ($R_0 = 1 R_\odot$) และ ไกลออกไป สำหรับ CME ทั้งหมด
 ให้ประมาณ และใส่ค่าในตารางของอัตราเร็วลมสุริยะ (solar wind speed) V_s ในหน่วย km s^{-1} สำหรับแต่ละ CME จากนั้นประมาณอัตราเร็วลมสุริยะเฉลี่ย (average solar wind speed) $V_{s,\text{avg}}$ สำหรับ CME ทั้ง 10 ครั้ง