

(D01) 30 rokov exoplanét
[90 bodov]

Táto úloha skúma niektoré aspekty dvoch hlavných metód detekcie exoplanét: radiálna rýchlosť a tranzit. Počas tejto úlohy budeme uvažovať konkrétny systém s jednou planétou (P) na kruhovej obežnej dráhe s polomerom a okolo hviezdy slnečného typu (S). Tento systém budeme označovať ako „SP systém“.

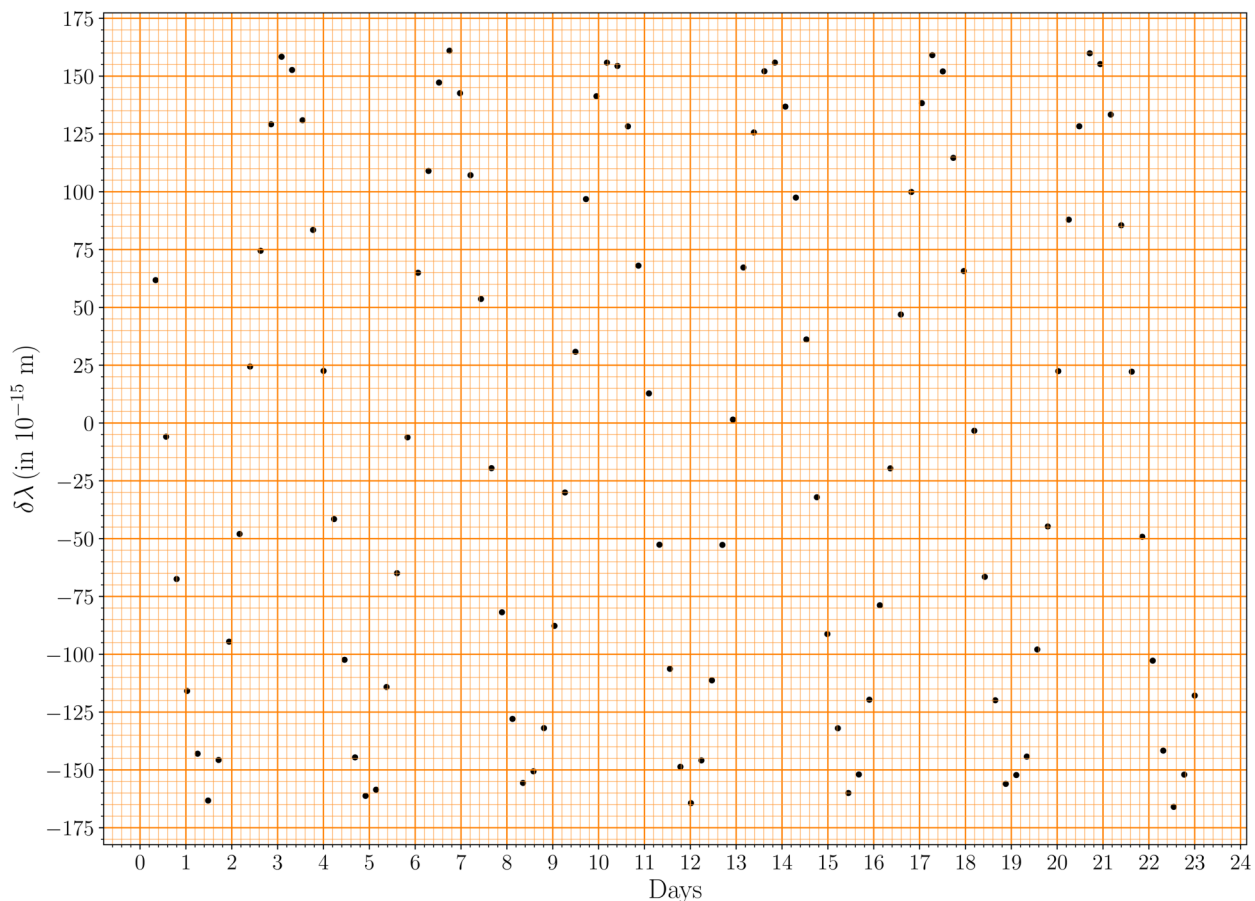
- (D01.1) Zdanlivá magnitúda hviezdy S v pásme V je $7,65 \pm 0,03$ mag, paralaxa je $20,67 \pm 0,05$ tisícín oblúkovej sekundy a bolometrická korekcia (BC) je $-0,065$ mag.

Použitím vzťahu medzi hmotnosťou a svietivosťou ($M-L$) vo forme $L \propto M^4$ určte hmotnosť [8] hviezdy M_s (v jednotkách $M_\odot$). Určte aj neistotu v hodnote M_s .

Metóda radiálnej rýchlosti

Metóda radiálnej rýchlosti využíva na detekciu exoplanéty a určenie jej charakteristík Dopplerov posun $\delta\lambda \equiv \lambda_{\text{obs}} - \lambda_0$ medzi pozorovanou vlnovou dĺžkou λ_{obs} a laboratórnou vlnovou dĺžkou λ_0 známej spektrálnej čiary.

Obrázok nižšie ukazuje $\delta\lambda$ pre čiaru Fe I ($\lambda_0 = 543,45 \times 10^{-9}$ m) ako funkciu času, ako to bolo pozorované pre systém SP.



Polamplitúda (semi-amplitude) radiálnej rýchlosti K je definovaná ako $K \equiv (v_{r, \text{max}} - v_{r, \text{min}})/2$, kde $v_{r, \text{max}}$ a $v_{r, \text{min}}$ sú maximum a minimum radiálnych rýchlostí. Pre kruhovú dráhu planéty môže byť polamplitúda K napísaná ako:

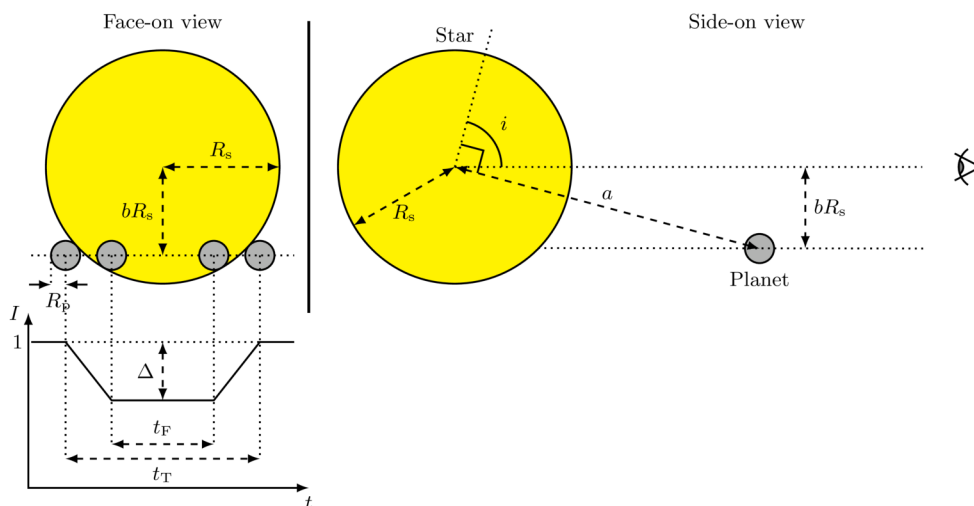
$$K = \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_p + M_s)^{2/3}}$$

, kde T je perióda, i je sklon dráhy planéty (uhol medzi normálou k rovine dráhy planéty a smerom k pozorovateľovi), M_p a M_s sú hmotnosti planéty a hviezdy.

- (D01.2) Na riešenie nasledujúcich úloh použite graf (otočený o 90° uvedený v súhrnnom odpoved'ovom hárku.
- (D01.2a) Nakreslite hladkú krivku, ktorá fituje pozorované údaje zobrazené v grafe. [2]
- (D01.2b) Vyberte vhodné body na vašej nakreslenej krivke a použite vhodné metódy na určenie T a K spolu s príslušnými neistotami. Všetky dátové body použité na výpočet T a K musia byť, uvedené v tabuľke v súhrnnom odpoved'ovom hárku. Použite zvyšok tabuľky na medzivýpočty (ak je to potrebné) a uveďte vhodné hlavičky (napišy stĺpcov). [11]
- (D01.2c) Nájdite minimálnu hmotnosť planéty $M_{p, \min}$ (v $M_\odot$) a jej zodpovedajúcu neistotu za predpokladu, že $M_p \ll M_s$. [5]
- (D01.2d) Použitím hodnoty $M_{p, \min}$ odhadnutej v časti (D01.2c), vypočítajte v au minimálnu hodnotu veľkej polosy obežnej dráhy planéty $a_{\min}$ a jej neistotu. [4]

Tranzitná metóda (bez uvažovania okrajového stmernenia)

Schématický diagram tranzitu planéty (nenakreslený v mierke) je zobrazený nižšie. Najprv predpokladáme, že hviezdny disk má rovnomernú priemernú intenzitu s určitým vnútorným šumom spôsobeným samotnou hviezdou.



Svetelná krivka normalizovanej intenzity, I , ako funkcia času t , je zobrazená vyššie na schématickom diagrame tranzitu. Priemerná intenzita hviezdny mimo tranzitu je považovaná za jednotkovú. Maximálny pokles intenzity v normalizovanej svetelnej krivke je daný Δ . Pre rovnomerne jasny hviezdny disk je vzťah medzi polomerom planéty R_p a Δ daný ako

$$\left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2 = \Delta,$$

kde R_s je polomer hviezdny.

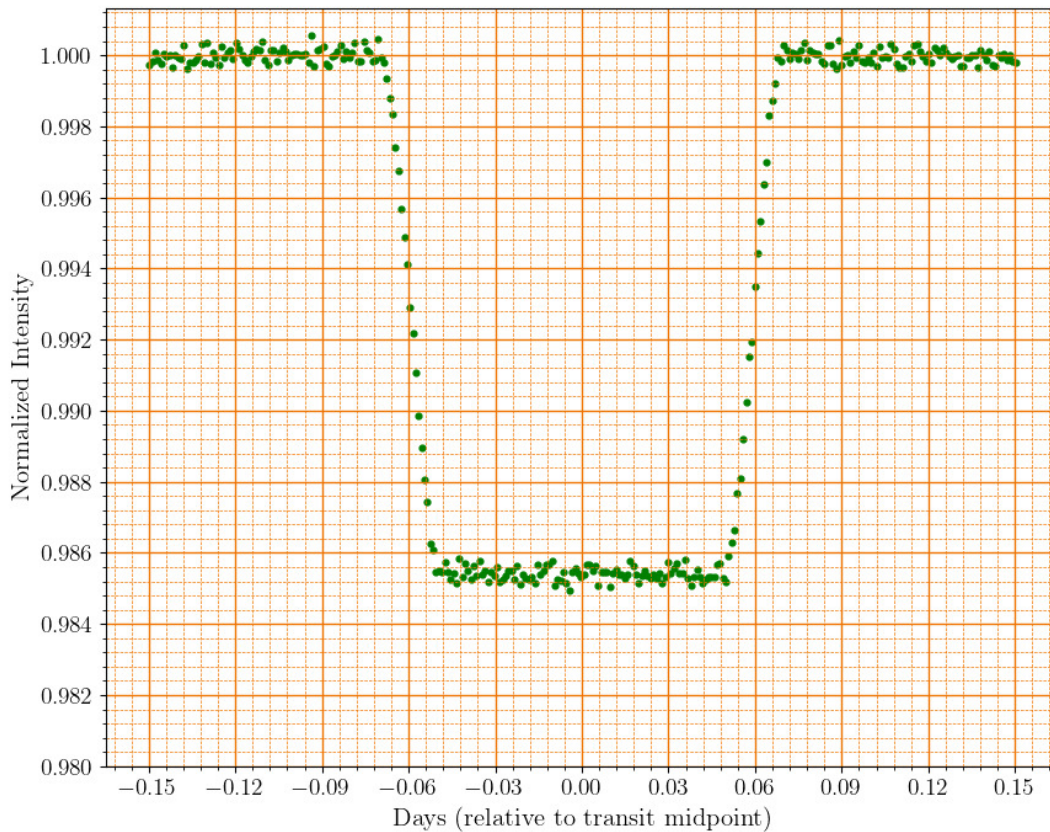
Celková doba trvania tranzitu (keď časť alebo celá planéta pokrýva hviezdny disk) je daná t_T , zatiaľ čo t_F udáva dobu, keď je planéta úplne pred hviezdny diskom. „Impaktový parameter“ b definuje priemet vzdialenosti medzi planétou a stredom hviezdneho disku v strede tranzitu, na rovinu projekcie (vzdialenosť je teda vyjadrená ako bR_s).

Pre takmer okrajovú obežnú dráhu hviezda-planéta je impaktový parameter daný vzorcom

$$b = \left[\frac{(1 - \sqrt{\Delta})^2 - (t_F/t_T)^2(1 + \sqrt{\Delta})^2}{1 - (t_F/t_T)^2} \right]^{1/2}$$

- (D01.3) Pre systém SP je známy polomer hviezdy $R_s = 1.20R_\odot$, a prechod planéty je skutočne viditeľný. [3]
Pomocou minimálneho orbitálneho polomeru $a_{\min}$, odhadnutého v časti (D01.2d), nájdite minimálnu hodnotu inklinácie $i_{\min}$.

Za predpokladu rovnomerného jasu hviezdneho disku by svetelná krivka tranzitu vyzerala ako je zobrazené nižšie.



- (D01.4) Pomocou danej svetelnej krivky odpovedzte na nasledujúce otázky. Pre vašu referenciu je vyššie uvedená svetelná krivka aj v súhrnnom odpoveďovom hárku.

(D01.4a) Určte hodnoty t_T a t_F v dňoch označením príslušných hodnôt na grafe. [3]

(D01.4b) Určte priemernú hodnotu Δ označením primeraných hodnôt na grafe a následne nájdite R_p v jednotkách $R_\odot$. [2]

(D01.4c) Určte hodnotu i v stupňoch za predpokladu, že orbitálny polomer je $a_{\min}$. [2]

Úvod do okrajového stmavnutia

Doteraz sme predpokladali, že hviezdny disk je rovnomerne jasný. V skutočnosti nie je pozorovaná jasnosť hviezdneho disku rovnomerná kvôli efektu nazývanému „okrajové stmavnutie“ — optický jav, pri ktorom sa stredná časť hviezdneho disku javí jasnejšia ako okraj, alebo „limb“.

Efekt okrajového stmavnutia môže byť meraný relatívnou intenzitou $J(\theta) \equiv \frac{I(\theta)}{I(0)}$, kde θ je uhol medzi normálou k povrchu hviezdy v danom bode a čiarou spájajúcou pozorovateľa s týmto bodom, $I(\theta)$ je pozorovaná intenzita hviezdneho disku v tomto bode ($I(0)$ je intenzita v strede hviezdneho disku). Pre vzdialeného pozorovateľa sa θ mení od $\theta = 0$ (stred disku) po $\theta \approx 90^\circ$ (okraj disku).

(D01.5) Nasledujúca tabuľka uvádza namerané hodnoty $J(\theta)$ pre Slnko pri určitej vlnovej dĺžke. Predpokladáme, že rovnaký profil okrajového stmavnutia platí aj pre hviezdu S.

θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$
0°	1.000	20°	0.971	40°	0.883	70°	0.595
10°	0.994	25°	0.950	50°	0.794	80°	0.475
15°	0.984	30°	0.943	60°	0.724	90°	0.312

Profil okrajového stmavnutia môže byť modelovaný kvadratickým vzorcom:

$$J(\theta) = 1 - a_1(1 - \cos \theta) - a_2(1 - \cos \theta)^2,$$

kde a_1 a a_2 sú dve konštanty.

Z daných údajov vytvorte graf s vhodnými premennými, a pomocou tohto grafu odhadnutie neznáme koeficienty a_1 a a_2 .

(D01.5a) Vyberte dvojicu premenných (x_1, y_1) , ktoré sú vhodnými funkciami θ a J , ktoré chcete vykresliť na osi x a y , aby ste určili a_1 a a_2 . Napíšte výrazy pre x_1 a y_1 . [2]

Ak potrebujete definovať ďalšie premenné pre ďalšie grafy, definujte ich ako (x_2, y_2) , atď.

(D01.5b) Zostavte tabuľku hodnôt nevyhnutne potrebných pre vaše grafy. [4]

(D01.5c) Vykreslite novo definované premenné na daný grafický hárok (označte svoj graf ako „D01.5c“). [7]

(D01.5d) Získajte z grafu hodnoty a_1 a a_2 . [7]
Neistoty daných hodnôt nie sú potrebné.

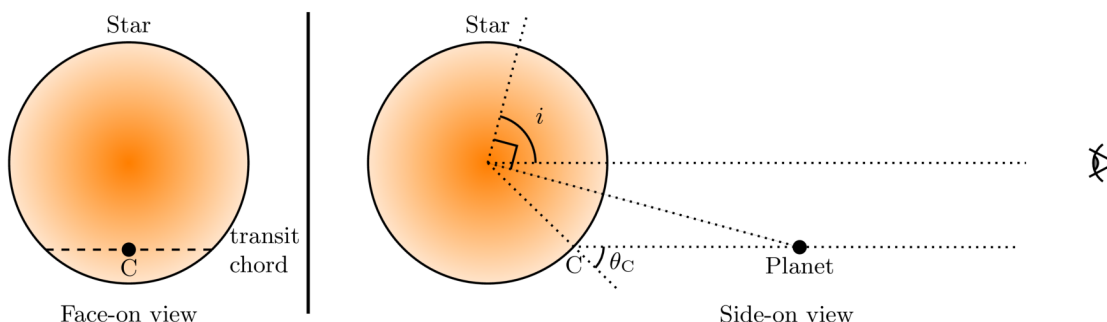
Tranzit v prípade okrajového stmavnutia

Teraz uvažujte okrajové stmavnutie pri planetárnych tranzitoch cez hviezdny disk. V prítomnosti okrajového stmavnutia, ktoré budeme modelovať kvadratickým vzťahom $J(\theta)$ uvedeným vyššie, je priemerná pozorovaná intenzita celého hviezdneho disku (bez akéhokoľvek tranzitu), $\langle I \rangle$, daná vzorcom:

$$\langle I \rangle = \left(1 - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{6}\right) I(0)$$

Ďalej, pokles svetla spôsobený tranzitujúcou planétou teraz závisí nielen od relatívnej veľkosti planéty a hviezdy $\left(\frac{R_p}{R_s}\right)$, ale aj od intenzitného profilu hviezdneho disku pozdĺž tranzitnej dráhy, ktorý závisí od uhla sklonu i .

Nasledujúci schematický diagram (nenakreslený v mierke) ukazuje uvažovanú konfiguráciu. Poznámka: Jasnejšia časť hviezdy je zobrazená tmavším odtieňom, zatiaľ čo planéta je zobrazená ako čierny krúžok.



Vzťah medzi $\left(\frac{R_p}{R_s}\right)$ a nameranou hodnotou Δ zo svetelnej krivky je

$$\Delta = \frac{I(\theta_C)}{\langle I \rangle} \left(\frac{R_p}{R_s} \right)^2,$$

kde $I(\theta_C)$ je intenzita hviezdneho disku v strede tranzitnej dráhy (bod C na obrázku vyššie), pričom θ_C je uhol medzi smerom k pozorovateľovi a normálou k povrchu v tomto bode. Z vyššie uvedeného je zrejmé, že pre danú hviezdu môže Δ nadobudnúť rovnakú hodnotu, pri mnohých rozličných kombináciach veľkosti planéty R_p a uhla sklonu i .

- (D01.6) Je možné jednoznačne určiť R_p , tak aj i použitím údajov zo svetelných kriviek tranzitov pre dve vlnové dĺžky, napríklad λ_B (modrá) a λ_R (červená). Koeficienty okrajového stmavnutia pre tieto dve vlnové dĺžky sú uvedené nižšie:

Vlnová dĺžka	a_1	a_2
λ_B	0.82	0.05
λ_R	0.24	0.20

- (D01.6a) Vyberte správne tvrdenie z nasledujúcich, ktoré opisuje vzťah medzi maximálnou hĺbkou tranzitu Δ pre λ_B a uhlom inklinácie (i) orbity a označte ho (✓) v súhrnnom odpovednom hárku. [2]

- A. Δ sa zvyšuje so znižujúcim sa i .
 B. Δ sa znižuje so znižujúcim sa i .
 C. Δ je nezávislé od i .

- (D01.6b) Maximálna hĺbka tranzitu (Δ) pre "SP systém" bola nameraná ako 0.0182 a 0.0159 pre λ_B a λ_R . [4]

Nakreslite schematické svetelné krivky tranzitu pre obe λ_B a λ_R na danú mriežku a označte krivky ako "B" a "R". Predpokladajte, že celková doba trvania tranzitu je rovnaká pre obe vlnové dĺžky. Krivky nemusia byť v mierke, ale mali by správne reprezentovať tvary svetelných kriviek.

- (D01.7) Použite grafickú metódu na nájdenie hodnôt R_p a i pre systém SP pomocou meraní Δ pre λ_B a λ_R .

- (D01.7a) Napíšte vhodný výraz spájajúci relevantné premenné, ktoré majú byť zakreslené. (Tip: Za relevantné premenné môžete uvažovať napr. i , b , R_p .) [6]

- (D01.7b) Zostavte tabuľku vhodných veličín, ktoré majú byť zakreslené. [5]

- (D01.7c) Nakreslite vhodný graf a označte ho ako „D01.7c“. [7]

- (D01.7d) Odhadnite z tohto grafu hodnoty R_p (v $R_\odot$) a i (v stupňoch). [4]

- (D01.8) Na základe výsledkov získaných v tomto probléme označte v súhrnnom odpovedovom hárku symbolom (✓), či je táto planéta P „KAMENNÁ“ (ROCKY) alebo „PLYNNÁ“ (GASEOUS). [2]

(D02) Predpoveď časov príchodu koronálnych výronov hmoty do okolia Zeme

[60 bodov]

Slnko občas uvoľňuje magnetizovanú plazmu, nazývanú koronálne výrony hmoty (CMEs), ktoré pochádzajú z povrchu Slnka a šíria sa smerom von. Presná predpoveď času ich cesty na Zem je kľúčová pre pochopenie a zmiernenie ich potenciálnych účinkov na satelity obiehajúce okolo Zeme. V tomto probléme sa snažíme predpovedať časy putovania CMEs zostavením empirického modelu, využitím údajov z 10 CMEs. Počas celého problému sa vzdialenosť medzi povrchom Slnka a Zemou považuje za $214R_{\odot}$.

Ďalej predpokladajte, že Slnko sa neotáča. V dôsledku elektromagnetických, gravitačných a odporových síl CMEs vykazujú počas svojho šírenia variabilné zrýchlenie. V prvých dvoch častiach tohto problému predpokladáme, že v oblasti medzi Slnkom a Zemou je vákuum.

Pohyb CMEs vo vákuu

- (D02.1) Počiatočná rýchlosť u , na povrchu Slnka ($= 1R_{\odot}$), konečná rýchlosť v , pri dosiahnutí Zeme a čas τ , ktorý uplynul počas pohybu medzi Slnkom a Zemou (v hodinách), sú uvedené (pre 10 CMEs) v nasledujúcej tabuľke.

CME	u	v	τ
Názov	(km s^{-1})	(km s^{-1})	(h)
CME-A	804	470	74.5
CME-B	247	360	127.5
CME-C	523	396	103.5
CME-D	830	415	71.0
CME-E	665	400	104.5
CME-F	347	350	101.5
CME-G	446	375	99.5
CME-H	155	360	97.0
CME-I	1016	515	67.0
CME-J	683	410	54.0

- (D02.1a) Pre každý CME vypočítajte priemerné zrýchlenie a vyjadrené v m s^{-2} . [6]

- (D02.1b) Pre zrýchlenie CME a_{model} predpokladáme empirický model, ktorý závisí od jeho počiatočnej rýchlosti u ako $a_{\text{model}} = m \left(\frac{u}{u_0} \right) + \alpha$; kde, a_{model} je vyjadrené v m s^{-2} , u je vyjadrené v km s^{-1} a $u_0 = 1.00 \times 10^3 \text{ km s}^{-1}$.

Pomocou vhodného grafu určte konštanty m a α vrátane príslušných neistôt (svoj graf označte ako „D02.1b“). [12]

- (D02.1c) Zostavte tabuľku obsahujúcu a_{model} každého CME (v m s^{-2}). Následne vypočítajte strednú kvadratickú odchýlku (root-mean-square - rms) zrýchlenia δa_{rms} medzi vypočítaným zrýchlením a a modelovou hodnotou a_{model} . [4]

- (D02.2) Uvažujte ďalšie dve CME: CME-1 a CME-2 s počiatočnými rýchlosťami $u = 1044 \text{ km s}^{-1}$ a 273 km s^{-1} .

- (D02.2a) Pomocou empirického modelu získaného v (D02.1b) vypočítajte pre tieto CME (CME-1 a CME-2) ich predpokladané časy cesty na Zem $\tau_{1, m}$ a $\tau_{2, m}$ (v hodinách). [4]

- (D02.2b) Pozorované časy cesty na Zem pre CME-1 a CME-2 sú 46,0 h a 74,5 h. Empirický model sa považuje za PLATNÝ (VALID) pre konkrétnu CME, ak je jeho predpokladaný čas cesty v rámci 20% od jeho pozorovaného času cesty; inak NIE JE PLATNÝ (NOT VALID). Uved'te platnosť modelu pre každú CME zaškrtnutím príslušného políčka v súhrnnom odpoved'ovom hárku symbolom (✓). [2]

CMEs v prítomnosti slnečného vetra

V skutočnosti je priestor medzi Slnkom a Zemou vyplnený slnečným vetrom, ktorý vyvíja odporovú silu na CMEs. Táto odporová sila môže CME buď spomaliť, alebo urýchliť, v závislosti od rýchlosti CME vzhľadom na rýchlosť slnečného vetra. Na zohľadnenie vplyvu slnečného vetra použijeme model „iba s odporom“ (“drag-only” model) pre vzdialenosti $R(t) \geq R_0$, kde R_0 je vzdialenosť, za ktorou sa odporová sila stáva dominantnou silou ovplyvňujúcou pohyb CME.

Posun $R_D(t)$ a rýchlosť $V_D(t)$ CME v tomto modeli sú dané vzťahom

$$R_D(t) = \frac{S}{\gamma} \ln [1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)] + V_s(t - t_0) + R_0$$

$$V_D(t) = \frac{V_0 - V_s}{1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)} + V_s$$

kde $\gamma = 2 \times 10^{-8} \text{ km}^{-1}$, V_s je konštantná rýchlosť slnečného vetra, R_0 a V_0 sú vzdialenosť a rýchlosť v čase t_0 a S je znamienkový faktor. $S = 1$ ak $V_0 > V_s$; $S = -1$ ak $V_0 \leq V_s$.

- (D02.3) Tabuľky nižšie obsahujú pre dve CME (CME-3 a CME-4) pozorované radiálne posunutie $R(t)$ (merané v $R_\odot$) ako funkciu času, t (v hodinách). Posledný údaj v každej tabuľke (D5 a P8) zodpovedá času príchodu príslušného CME na Zem. Pri tejto časti uvažujte $V_s = 330 \text{ km s}^{-1}$.

CME-3		
Dátový bod	t (v h)	$R(t)$ (v $R_\odot$)
D1	0.200	6.36
D2	0.480	7.99
D3	1.22	11.99
D4	1.49	13.51
D5	58.05	214

CME-4		
Dátový bod	t (v h)	$R(t)$ (v $R_\odot$)
P1	1.00	4.00
P2	3.00	6.00
P3	4.00	9.00
P4	5.00	11.0
P5	21.0	43.0
P6	50.0	100
P7	85.0	170
P8	111	214

Budeme hodnotiť, či model „iba s odporom“ (“drag-only” model) uspokojivo predpovedá časy príchodu týchto CME. Na použitie tohto modelu je potrebné správne zvoliť t_0 aj k nemu zodpovedajúce R_0 a V_0 .

- (D02.3a) Pre CME-3 vezmite do úvahy nasledujúce dva prípady: [6]
 (C1) t_0 je zvolený ako stred intervalu D1 – D2
 (C2) t_0 je zvolený ako stred intervalu D3 – D4
 Predpokladajte, že rýchlosť zostáva konštantná v každom konkrétnom intervale D1–D2 a D3–D4, ale môže sa líšiť medzi týmito dvoma intervalmi.

Pomocou t_0 , R_0 a V_0 vypočítajte rozdiel medzi pozorovaným a predpokladaným radiálnym posunom $\delta R_D \equiv R(t) - R_D(t)$ v jednotkách $R_\odot$ pri $t = 58.05 \text{ h}$, pre každý z dvoch prípadov.

- (D02.3b) Vypočítajte hodnotu $R_D(t)$ v bodoch P5, P6, P7 a P8 medzi Slnkom a Zemou pre CME-4 [4]
pre nasledujúce dva prípady, pričom použijete postup podobný ako v (D02.3a):
- (C3) t_0 je zvolený ako stred intervalu P1 – P2
(C4) t_0 je zvolený ako stred intervalu P3 – P4.
- (D02.3c) Vyneste do grafu $R_D(t)$ (v jednotkách $R_\odot$) v závislosti na t (v hodinách), pre dva [10]
prípady (C3 a C4), pre CME-4 v bodoch P5, P6, P7 a P8. Do toho istého grafu nakreslite
hladké krivky $R_D(t)$ pre dva vyššie spomenuté prípady (C3 a C4). Pri tejto časti zvolte
rozsah osi t od 0 do 180 hodín. Svoj graf označte ako “D02.3c”.
- (D02.3d) Pomocou grafu odhadnite pre každý z prípadov C3 a C4 absolútny rozdiel $|\delta\tau|$ medzi [4]
skutočným časom príchodu CME-4 na Zem a jeho časom príchodu predpovedaným
modelom “iba s odporom”.
- (D02.3e) V sumárnom odpoved'ovom hárku označte symbolom ($\checkmark$), či je nasledujúce tvrdenie [1]
PRAVDIVÉ (TRUE) alebo NEPRAVDIVÉ (FALSE) (nie je potrebné písomné
zdôvodnenie):
“Sily odporu vyvolané slnečným vetrom na CME sa stávajú dominantnými a začínajú
ovplyvňovať šírenie CME-3 skôr v porovnaní s CME-4”.
- (D02.4) Predpokladajte, že model „iba s odporom“ je použiteľný smerom ďalej od povrchu Slnka ($R_0 = 1$ [7]
 $R_\odot$) pre všetky CME.
Pri zohľadnení odporu ako dominantnej sily pôsobiacej na 10 CME v časti D02.1, odhadnite a
zostavte tabuľku rýchlosti slnečného vetra V_s v km s^{-1} pre každé CME.
Ďalej určte priemernú rýchlosť slnečného vetra $V_{s, \text{avg}}$, všetkých 10 CME.