

(D01) 30 Anos de Exoplanetas

[90 pontos]

Este problema explora alguns aspectos dos dois principais métodos de detecção de exoplanetas: velocidade radial e trânsito. Ao longo deste problema vamos considerar um sistema particular constituído por um único planeta (P) numa órbita circular, com raio a , em torno de uma estrela do tipo solar (S). A este sistema iremos chamar "sistema SP".

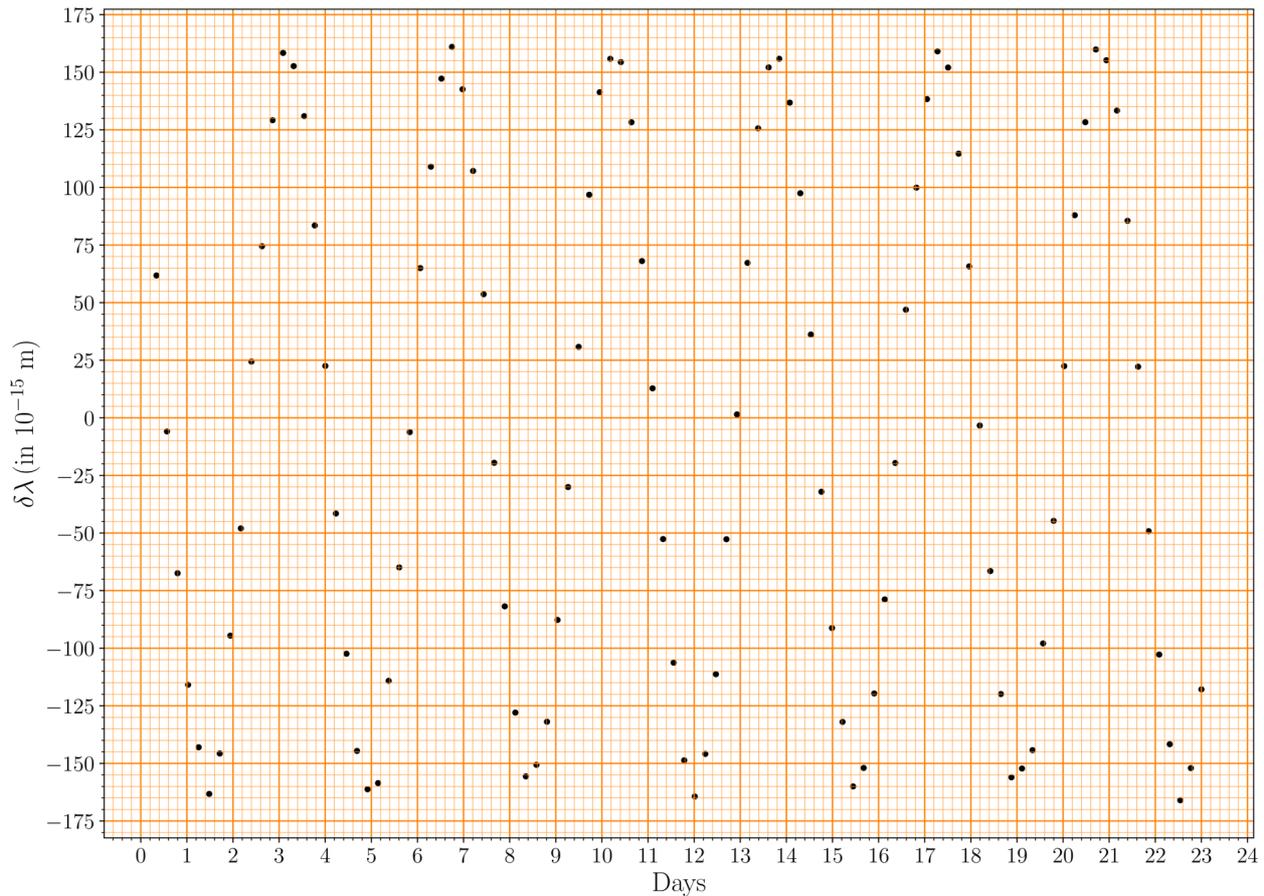
(D01.1) A magnitude aparente em banda V da estrela S é de $7,65 \pm 0,03$ mag, a paralaxe é de $20,67 \pm 0,05$ milissegundos de arco e a correção bolométrica (BC) é $-0,0650$ mag. Assim, a estrela tem uma luminosidade bolométrica superior à sua luminosidade na banda V.

Estima a massa da estrela, M_s (em unidades de M_\odot), assumindo uma relação massa- [8] luminosidade ($M-L$) da forma $L \propto M^4$. Estima também a incerteza em M_s . Podes precisar de usar a relação $d \ln x / dx = 1/x$.

Método da velocidade radial

O método da velocidade radial utiliza o desvio de Doppler $\delta\lambda \equiv \lambda_{\text{obs}} - \lambda_0$ entre o comprimento de onda observado λ_{obs} e o comprimento de onda em repouso λ_0 de uma linha espectral conhecida para detetar um exoplaneta e determinar as suas características.

A figura abaixo mostra $\delta\lambda$ para a linha Fe I ($\lambda_0 = 543.45 \times 10^{-9}$ m) em função do tempo, tal como observado para o sistema SP.



A semi-amplitude da velocidade radial K é definida como $K \equiv (v_{r, \text{max}} - v_{r, \text{min}})/2$ onde $v_{r, \text{max}}$ e $v_{r, \text{min}}$ são, respetivamente, as velocidades radiais máxima e mínima. Para uma órbita planetária circular, a semi-amplitude K pode ser escrita como:

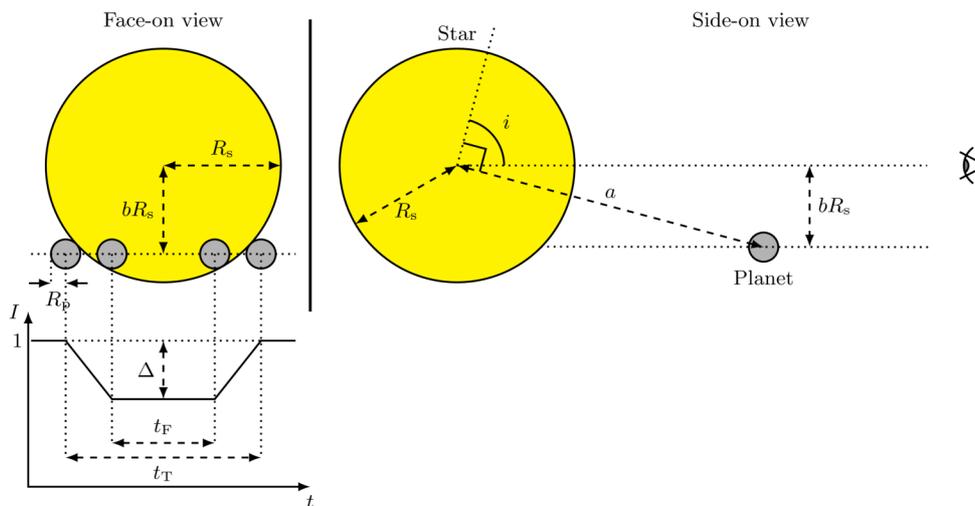
$$K = \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_p + M_s)^{2/3}}$$

onde T é o período, i é a inclinação da órbita planetária (ângulo entre a normal ao plano orbital do planeta e a linha de visão do observador), M_p e M_s são as massas do planeta e da estrela, respetivamente.

- (D01.2) Usa o gráfico acima fornecido na Folha de Respostas (rodado de 90 deg) para responder ao que se segue.
- (D01.2a) Traça uma curva suave associada aos dados observados mostrados no gráfico. [2]
- (D01.2b) Seleciona pontos apropriados na curva que traçaste e utiliza métodos adequados para determinar T e K , juntamente com as respectivas incertezas. Todos os pontos de dados utilizados para o cálculo de T e K devem ser apresentados na tabela da Folha de Respostas. Usa o resto da Tabela para mostrares os teus cálculos intermédios, conforme necessário, com os cabeçalhos apropriados. [11]
- (D01.2c) Determina a massa mínima do planeta, $M_{p, \min}$ (em M_\odot), e a respetiva incerteza, assumindo $M_p \ll M_s$. [5]
- (D01.2d) Usando o valor de $M_{p, \min}$ estimado na parte (D01.2c), calcula o valor mínimo do semi-eixo maior da órbita do planeta, a_{\min} , em unidades astronómicas, e a sua incerteza. [4]

Método do trânsito (sem escurecimento do limbo)

O diagrama esquemático de um trânsito planetário (não desenhado à escala) é mostrado abaixo. Inicialmente, vamos assumir que o disco estelar possui uma intensidade média uniforme, com algum ruído intrínseco devido à própria estrela.



A curva de luz da intensidade normalizada, I , em função do tempo t , está representada no diagrama esquemático do trânsito acima. A intensidade média da estrela fora do trânsito é tomada como sendo igual à unidade. A diminuição máxima da intensidade é dada por Δ na curva de luz normalizada. Para um disco estelar uniformemente brilhante, o raio do planeta, R_p , está relacionado com Δ por

$$\left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2 = \Delta,$$

onde R_s é o raio da estrela.

A duração total do trânsito (quando parte ou a totalidade do planeta cobre o disco estelar) é dada por t_T , enquanto t_F corresponde à duração durante a qual o planeta se encontra totalmente em frente ao disco estelar. O "parâmetro de impacto" b é a distância projectada entre o planeta e o centro do disco estelar no ponto médio do trânsito, em unidades do raio estelar, R_s .

Para uma órbita estrela-planeta quase em perfil (edge-on), o parâmetro de impacto é dado pela fórmula

$$b = \left[\frac{(1 - \sqrt{\Delta})^2 - (t_F/t_T)^2(1 + \sqrt{\Delta})^2}{1 - (t_F/t_T)^2} \right]^{1/2}$$

- (D01.3) Para o sistema SP, sabe-se que o raio estelar é de $R_s = 1,20R_\odot$, sendo o trânsito do planeta efetivamente visível. Utilizando o raio orbital mínimo, a_{\min} , estimado na parte (D01.2d), determina o valor mínimo, i_{\min} , do ângulo de inclinação. [3]

Assumindo um disco estelar de brilho uniforme, a curva de luz do trânsito seria como a mostrada abaixo.



- (D01.4) Usando a curva de luz fornecida, responde às seguintes questões. Para tua referência, a curva de luz acima encontra-se também na Folha de Respostas.

(D01.4a) Estima os valores de t_T e t_F , em dias, assinalando no gráfico leituras apropriadas. [3]

(D01.4b) Estima o valor médio de Δ , assinalando no gráfico as leituras apropriadas e, a partir daí, determinar R_p em unidades de R_\odot . [2]

(D01.4c) Determina o valor de i , em graus, assumindo que o raio orbital é a_{\min} . [2]

Introdução ao escurecimento do limbo

Até agora assumimos que o disco estelar tinha um brilho uniforme. Na realidade, o brilho observado do disco estelar não é uniforme devido ao chamado “escurecimento do limbo” (*limb darkening*) — um efeito óptico em que a região central do disco estelar aparenta ser mais brilhante do que a extremidade, ou limbo.

O efeito de escurecimento do limbo pode ser medido pela intensidade relativa $J(\theta) \equiv \frac{I(\theta)}{I(0)}$, onde θ é o ângulo entre a normal à superfície estelar num ponto e a linha que une o observador a esse ponto, $I(\theta)$ é a intensidade observada do disco estelar nesse ponto (sendo $I(0)$ a intensidade no centro do disco estelar). Para um observador distante, θ varia de $\theta = 0$ (centro do disco) a $\theta \approx 90^\circ$ (bordo do disco).

(D01.5) A tabela seguinte apresenta os valores medidos de $J(\theta)$ a um determinado comprimento de onda para o Sol. Vamos assumir que o mesmo perfil de escurecimento do limbo é válido para a estrela S.

θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$
0°	1,000	20°	0,971	40°	0,883	70°	0,595
10°	0,994	25°	0,950	50°	0,794	80°	0,475
15°	0,984	30°	0,943	60°	0,724	90°	0,312

O perfil de escurecimento do limbo pode ser modelado por uma fórmula quadrática:

$$J(\theta) = 1 - a_1(1 - \cos \theta) - a_2(1 - \cos \theta)^2,$$

onde a_1 e a_2 são duas constantes.

Vamos estimar os coeficientes desconhecidos a_1 e a_2 a partir dos dados fornecidos, construindo um gráfico com as variáveis adequadas.

(D01.5a) Escolhe um par de variáveis (x_1, y_1) que sejam funções adequadas de θ e J , para representares nos eixos do x e do y , respetivamente, de forma a determinares a_1 e a_2 . Escreve as expressões para x_1 e y_1 . [2]

Se precisares de definir variáveis adicionais para as representações gráficas suplementares, define-as como (x_2, y_2) , etc.

(D01.5b) Constrói uma tabela com os valores necessários para as tuas representações gráficas. [4]

(D01.5c) Representa graficamente as variáveis que definiste no papel milimétrico fornecido (identifica o gráfico como “D01.5c”). [7]

(D01.5d) Obtém a_1 and a_2 a partir do gráfico. Não é necessário indicar as incertezas.

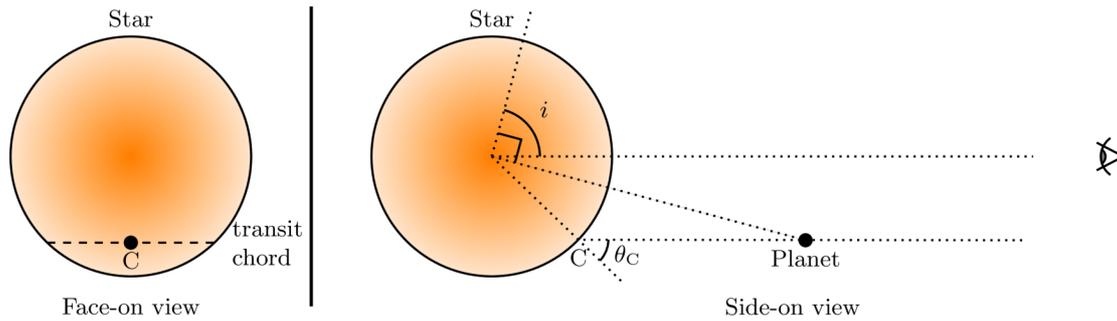
Trânsito na presença de escurecimento do limbo

Agora, consideramos os trânsitos planetários através de um disco estelar com escurecimento do limbo. Na presença de escurecimento do limbo, que iremos modelar pela fórmula quadrática de $J(\theta)$ apresentada acima, a intensidade média observada de todo o disco estelar (sem qualquer trânsito), $\langle I \rangle$, é dada por:

$$\langle I \rangle = \left(1 - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{6} \right) I(0)$$

Além disso, a diminuição da luz provocada pelo planeta em trânsito depende agora não só da razão entre os raios do planeta e da estrela, $\left(\frac{R_p}{R_s} \right)$, mas também do perfil de intensidade do disco estelar ao longo da corda de trânsito, que por sua vez depende do ângulo de inclinação, i .

O diagrama esquemático abaixo (não desenhado à escala) mostra a configuração. Note-se que a região mais brilhante da estrela é representada com uma sombra mais escura, enquanto o planeta é representado por um ponto preto.



Aqui a relação entre $\left(\frac{R_p}{R_s}\right)$ e a Δ medida a partir da curva de luz é

$$\Delta = \frac{I(\theta_C)}{\langle I \rangle} \left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2,$$

onde $I(\theta_C)$ é a intensidade do disco estelar no ponto médio da corda do trânsito (ponto C na figura acima), sendo θ_C o ângulo entre a linha de visão e a normal à superfície nesse ponto. A partir da equação acima é evidente que, para uma dada estrela, o mesmo valor de Δ pode ser produzido por muitas combinações do raio do planeta, R_p , e do ângulo de inclinação, i .

(D01.6) É possível determinar, de forma única, tanto R_p e i , utilizando dados obtidos a partir de curvas de luz de trânsito em dois comprimentos de onda distintos, designadamente λ_B (azul) e λ_R (vermelho). Os coeficientes de escurecimento do limbo correspondentes a estes dois comprimentos de onda são apresentados na tabela seguinte:

Comprimento de onda	a_1	a_2
λ_B	0,82	0,05
λ_R	0,24	0,20

(D01.6a) Escolhe, de entre as afirmações seguintes, aquela que descreve corretamente a relação entre a profundidade máxima do trânsito (Δ) para λ_B e o ângulo de inclinação (i) da órbita, e assinala com um visto (✓) na Folha de Respostas. [2]

- A. Δ aumenta quando i diminui.
- B. Δ diminui quando i diminui.
- C. Δ é independente de i .

(D01.6b) A profundidade máxima do trânsito (Δ) para o "sistema SP" foi medida como sendo 0,0182 e 0,0159 para λ_B e λ_R , respetivamente. [4]

Desenha curvas de luz de trânsito esquemáticas para λ_B e λ_R na grelha fornecida e identifica as curvas com as letras "B" e "R", respetivamente. Assume que a duração total do trânsito é a mesma para ambos os comprimentos de onda. As curvas não precisam de estar à escala, mas devem representar corretamente as formas das curvas de luz.

(D01.7) Vamos utilizar um método gráfico para determinar os valores de R_p e i para o sistema SP, recorrendo às medições de Δ em λ_B e λ_R .

- (D01.7a) Escreve uma expressão apropriada que relacione as variáveis relevantes a serem representadas graficamente. [6]
(Sugestão: poderás considerar i ou b e R_p , entre as variáveis relevantes).
- (D01.7b) Constrói uma tabela com as quantidades adequadas que devem ser representadas graficamente. [5]
- (D01.7c) Desenha um gráfico apropriado e identifica-o como “D01.7c”. [7]
- (D01.7d) Estima os valores de R_p (em R_\odot) e i (em graus) a partir do gráfico. [4]
- (D01.8) Com base nos resultados obtidos nesta Questão, indica se o planeta P é “ROCKY” (rochoso) ou “GASEOUS” (gasoso), assinalando com um visto (✓) a caixa correspondente na Folha de Respostas. [2]

(D02) Previsão dos tempos de chegada das ejeções de massa coronal à Terra

[60 pontos]

O Sol liberta, ocasionalmente, plasma magnetizado, designado por ejeções de massa coronal (CMEs), que tem origem na superfície do Sol e se propaga para o espaço exterior. A previsão exacta dos seus tempos de chegada à Terra é crucial para compreender e mitigar os seus potenciais efeitos nos satélites em órbita da Terra. Nesta questão, o nosso objetivo é prever os tempos de chegada das CMEs através do desenvolvimento de um modelo empírico, usando os dados de 10 CMEs. Ao longo de todo este problema, deves considerar que a distância entre a superfície do Sol e a Terra é de $214R_{\odot}$.

Para além disso, deves assumir que o Sol não está em rotação. Devido às forças eletromagnéticas, gravitacionais e de arrastamento, as CMEs experimentam uma aceleração variável ao longo da sua propagação. Nas duas primeiras partes desta questão, vamos assumir que a região entre o Sol e a Terra se encontra em vácuo.

CMEs a deslocarem-se através do vácuo.

(D02.1) A velocidade inicial, u , à superfície solar ($= 1R_{\odot}$), a velocidade final, v , ao atingir a Terra, e o tempo de chegada à Terra após deixar a superfície do Sol (em horas), τ , são fornecidos para 10 ejeções de massa coronal (CMEs) na tabela seguinte.

CME	u	v	τ
Nome	(km s^{-1})	(km s^{-1})	(h)
CME-A	804	470	74,5
CME-B	247	360	127,5
CME-C	523	396	103,5
CME-D	830	415	71,0
CME-E	665	400	104,5
CME-F	347	350	101,5
CME-G	446	375	99,5
CME-H	155	360	97,0
CME-I	1016	515	67,0
CME-J	683	410	54,0

(D02.1a) Calcula a aceleração média, a , para cada CME em m s^{-2} .

[6]

(D02.1b) Vamos assumir um modelo empírico para a aceleração, a_{model} , de uma CME, que depende da sua velocidade inicial u como, $a_{\text{model}} = m \left(\frac{u}{u_0} \right) + \alpha$; onde a_{model} é expresso em m s^{-2} , u é expresso em km s^{-1} e $u_0 = 1,00 \times 10^3 \text{ km s}^{-1}$.

Determina as constantes m e α e as suas incertezas associadas utilizando um gráfico [12] apropriado (identifica o teu gráfico como "D02.1b").

(D02.1c) Para cada CME, organiza numa tabela os valores de a_{model} em m s^{-2} . Calcula, em seguida, a raiz do valor quadrático médio (rms) das acelerações, δa_{rms} , entre os valores de aceleração calculados, a , e os valores do modelo, a_{model} . [4]

(D02.2) Vamos considerar duas outras CMEs: CME-1 e CME-2, com velocidades iniciais, $u = 1044 \text{ km s}^{-1}$ e 273 km s^{-1} , respetivamente.

(D02.2a) Usando o modelo empírico obtido em (D02.1b), calcula os tempos de chegada previstos à Terra, $\tau_{1, m}$ e $\tau_{2, m}$ (em horas), para o CME-1 e o CME-2, respetivamente. **[4]**

(D02.2b) Os tempos de chegada à Terra observados são 46,0 h para a CME-1 e 74,5 h para a CME-2, respetivamente. O modelo empírico é considerado VALID (válido) para uma determinada CME se o tempo de chegada previsto estiver dentro de 20% do tempo de chegada observado, caso contrário, é considerado NOT VALID (não válido). Indica a validade do modelo para cada CME assinalando com um visto (✓) a caixa apropriada na Folha de Respostas. **[2]**

CMEs na presença de vento solar

Na realidade, o espaço entre o Sol e a Terra encontra-se permeado pelo vento solar, o que exerce uma força de arrastamento sobre as CMEs. Esta força de arrastamento pode desacelerar ou acelerar uma CME, dependendo da velocidade da CME em relação à do vento solar. Para ter em conta a influência do vento solar, usaremos um modelo de "apenas arrastamento" (drag-only model) para distâncias $R_{\text{obs}}(t) \geq R_0$, onde R_0 é a distância a partir da qual a força de arrasto se torna a força dominante que afecta o movimento da CME.

A distância à superfície do Sol determinada a partir do modelo de "apenas arrastamento", $R_D(t)$, e a velocidade, $V_D(t)$, de uma CME neste modelo são dadas por

$$R_D(t) = \frac{S}{\gamma} \ln [1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)] + V_s(t - t_0) + R_0$$

$$V_D(t) = \frac{V_0 - V_s}{1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)} + V_s$$

onde $\gamma = 2 \times 10^{-8} \text{ km}^{-1}$, V_s é a velocidade constante do vento solar, R_0 e V_0 são a distância e a velocidade, respetivamente, no tempo t_0 e S é o fator de sinal: $S = 1$ if $V_0 > V_s$; $S = -1$ if $V_0 \leq V_s$.

(D02.3) As tabelas abaixo apresentam a distância radial observada a partir da superfície do Sol, $R_{\text{obs}}(t)$ (medida em R_\odot) em função do tempo, t (em horas), para duas CMEs: a CME-3 e a CME-4. O último ponto de dados em cada tabela (D5 e P8, respetivamente) corresponde à hora de chegada da respectiva CME à Terra. Para esta parte, deves assumir $V_s = 330 \text{ km s}^{-1}$.

CME-3		
Ponto de dados	t (em h)	$R_{\text{obs}}(t)$ (in R_\odot)
D1	0,200	6,36
D2	0,480	7,99
D3	1,22	11,99
D4	1,49	13,51
D5	58,05	214

CME-4		
Ponto de dados	t (em h)	$R_{\text{obs}}(t)$ (em R_\odot)
P1	1,00	4,00
P2	3,00	6,00
P3	4,00	9,00
P4	5,00	11,0
P5	21,0	43,0
P6	50,0	100
P7	85,0	170
P8	111	214

Iremos avaliar se o modelo "somente arrastar" é capaz de prever satisfatoriamente os tempos de chegada destas CMEs à Terra. Para utilizar este modelo, é necessário escolheres adequadamente o valor de t_0 e, a partir deste, os valores correspondente de R_0 e V_0 .

- (D02.3a) Para a CME-3, considera os dois casos seguintes: [6]
 (C1) considera-se t_0 como o ponto médio do intervalo D1 - D2;
 (C2) considera-se t_0 como o ponto médio do intervalo D3 - D4.
 Assume que a velocidade se mantém constante em cada intervalo específico D1-D2 e D3-D4, podendo diferir entre os dois intervalos. Usando t_0 , R_0 e V_0 , calcula a diferença entre o distância radial observada e a prevista $\delta R_D \equiv R_{\text{obs}}(t) - R_D(t)$ em unidades de R_\odot em $t = 58,05$ h, para cada um dos dois casos.
- (D02.3b) Avalia $R_D(t)$ nos pontos, P5, P6, P7 e P8 entre o Sol e a Terra para a CME-4 para os dois casos seguintes adoptando um procedimento semelhante ao de (D02.3a): [4]
 (C3) considera-se t_0 como o ponto médio do intervalo P1 - P2;
 (C4) considera-se t_0 como o ponto médio do intervalo P3 - P4.
- (D02.3c) Traça $R_D(t)$ (em R_\odot) vs t (em horas) para os dois casos, C3 e C4, para a CME-4 nos pontos P5, P6, P7 e P8 (identifica no teu gráfico como "D02.3c"). No mesmo gráfico, desenha curvas suaves de $R_D(t)$ para os dois casos acima mencionados. Para esta parte, considera o eixo do x no intervalo entre 0 a 180 horas. [10]
- (D02.3d) Usando o gráfico, estima a diferença absoluta, $|\delta\tau|$, entre o tempo real de chegada da CME-4 à Terra e o tempo de chegada previsto pelo modelo de "apenas arrastamento" para cada um dos casos C3 e C4. [4]
- (D02.3e) Indica se a afirmação seguinte é TRUE (verdadeira) ou FALSE (falsa), assinalando com um visto (✓) a caixa apropriada na Folha de Respostas (não é necessária justificação escrita): [1]
 "As forças de arrastamento exercidas pelo vento solar nas CMEs tornam-se dominantes para a CME-3 mais cedo do que para a CME-4".
- (D02.4) Considera a força de arrastamento como a força dominante que actua nas 10 CMEs na parte D02.1. Admite que o modelo de "apenas arrastamento" é aplicável desde a superfície do Sol ($R_0 = 1 R_\odot$) e para além dela, para todas as CMEs. [7]

Estima e apresenta numa tabula a velocidade do vento solar, V_s , em km s^{-1} para todas as CMEs. Em seguida, estima a velocidade média do vento solar, $V_{s, \text{avg}}$, para todas as 10 CMEs.