

(D01) 외계행성 30년 기념문제

[90점]

이 문제에서는 외계행성 탐색의 두 가지 주요 방법인 시선속도(radial velocity)와 통과(transit)의 몇 가지 측면을 살필 것이다. 이 문제 전반에 걸쳐 우리는 태양형 별(S) 주위를 반지름 a 를 가진 원형 궤도로 도는 단일 행성(P)의 특정 시스템을 고려할 것이다. 우리는 이 시스템을 "SP 시스템"이라고 부른다.

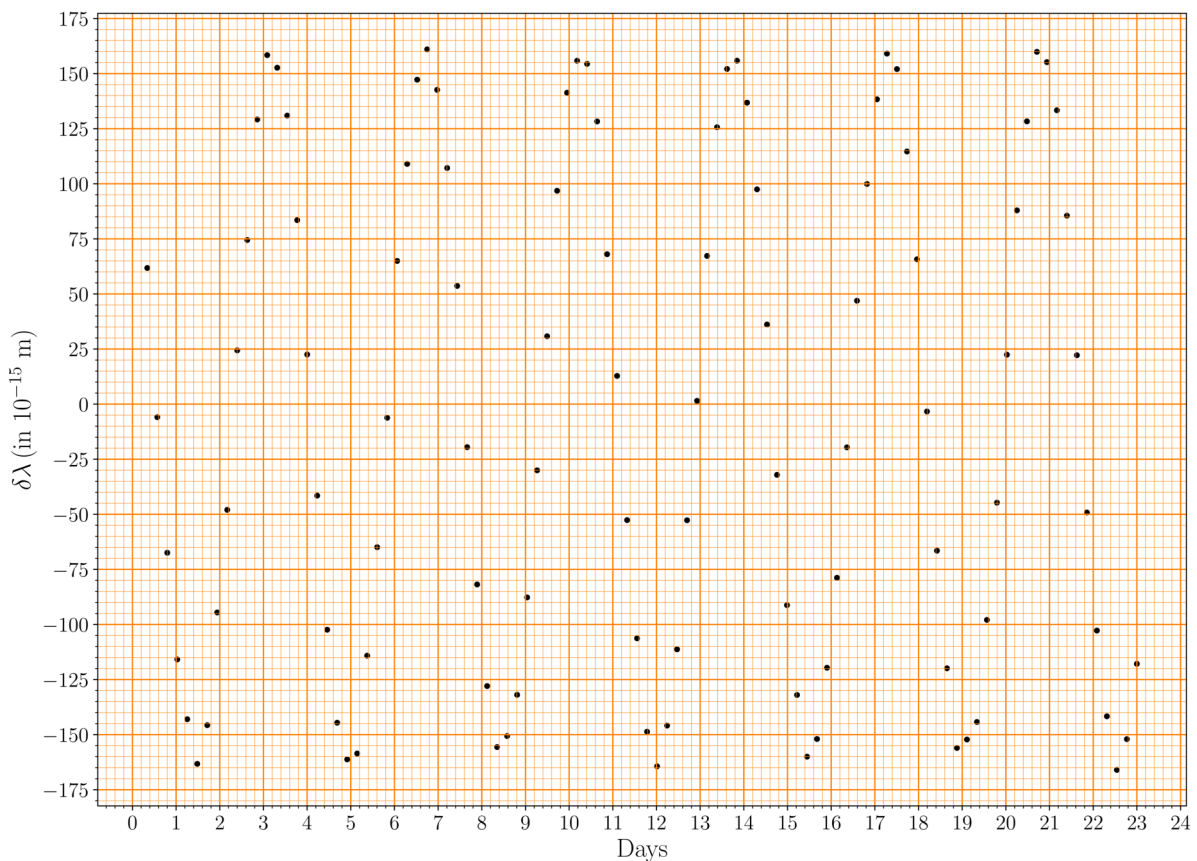
- (D01.1) 별 S의 V-밴드 겉보기 등급은 7.65 ± 0.03 mag이며, 시차는 20.67 ± 0.05 밀리초각 (milliarcsecond)이고, bolometric correction 복사 보정(BC)은 -0.0650 mag이다. 따라서 이 별은 V-밴드 광도보다 더 높은 복사광도를 가지고 있다.

질량-광도 ($M-L$) 관계가 $L \propto M^4$ 형태라고 가정하고, 별의 질량 M_s (단위: $M_\odot$)을 추정하시 [8]
오. 또한 M_s 의 불확실성을 추정하시오. 관계식 $d \ln x / dx = 1/x$ 이 필요할 것이다.

시선 속도 (Radial Velocity) 방법

시선 속도 방법은 외계 행성을 탐지하고 그 특성을 결정하기 위해서 알려진 스펙트럼 선의 정지 파장 λ_0 과 관측된 파장 λ_{obs} 사이의 도플러 이동 $\delta\lambda \equiv \lambda_{\text{obs}} - \lambda_0$ 을 사용하는 방법이다.

아래 그림은 SP 시스템에서 관측된 Fe I 선 ($\lambda_0 = 543.45 \times 10^{-9}$ m)의 $\delta\lambda$ 를 시간의 함수로 보여준다.



시선 속도 반진폭(semi-amplitude) K 는 $K \equiv (v_{r, \text{max}} - v_{r, \text{min}})/2$ 로 정의되며, 여기서 $v_{r, \text{max}}$ 와 $v_{r, \text{min}}$ 은 각각 최대 및 최소 시선 속도이다. 원형 행성 궤도의 경우 반진폭 K 는 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$K = \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_p + M_s)^{2/3}}$$

여기서 T 는 주기, i 는 행성 궤도의 경사 (행성의 궤도면의 법선과 관측자의 시선 사이의 각도), M_p 와 M_s 는 각각 행성과 별의 질량이다.

(D01.2) 다음의 문제들에 답을 하기 위해서 Summary Answersheet에 있는 위와 동일한 (90 deg 회전되어 있는) 그래프를 사용하시오.

(D01.2a) 그래프에 표시된 관측 데이터를 연결하는 매끄러운 곡선(smooth curve)을 그리시오. [2]

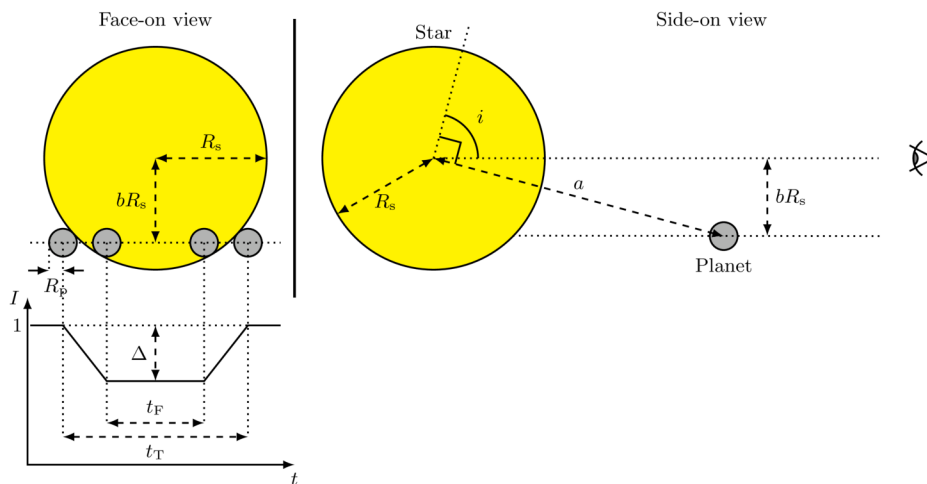
(D01.2b) 그래프에 그린 곡선에서 적절한 점들을 선택하고 적절한 방법을 사용하여 T 와 K , [11]
그리고 그들의 불확실성을 결정하시오. T 와 K 결정을 위해 사용된 모든 데이터 포인트는 Summary Answersheet의 표에 표시되어야 한다. 답 작성에 사용되지 않은 표의 나머지 부분은 중간 계산이 필요할 때 적절한 header 정보를 표시하고 사용하시오.

(D01.2c) $M_p \ll M_s$ 를 가정하여, 행성의 최소 질량 $M_{p,\min}$ (단위는 $M_\odot$)과 불확실성을 구하시오. [5]

(D01.2d) (D01.2c)에서 추정된 $M_{p,\min}$ 값을 사용하여 행성 궤도의 장반축(semi-major axis)의 최소값 $a_{\min}$ 을 au 단위로 계산하고 그 불확실성을 구하시오. [4]

통과(Transit) 방법 (주연감광 없는 경우)

행성 통과와 개략도가 아래에 표시되어 있다 (실제 비율에 맞지 않음). 처음에는 별의 원반이 별 자체의 고유한 (intrinsic) 노이즈를 포함한 균일한 평균 세기(intensity)를 가진다고 가정하자.



정규화된 세기 I 의 광도 곡선은 시간 t 의 함수로 위의 행성통과 개략도에 표시되어 있다. 행성통과가 발생하지 않는 상태에서의 별의 평균 세기는 1로 설정한다. 세기의 최대 감소는 정규화된 광도 곡선에서 Δ 로 주어진다. 균일하게 밝은 별 원반의 경우, 행성의 반지름 R_p 는 Δ 와

$$\left(\frac{R_p}{R_s} \right)^2 = \Delta,$$

로 관계가 있으며, 여기서 R_s 는 별의 반지름이다.

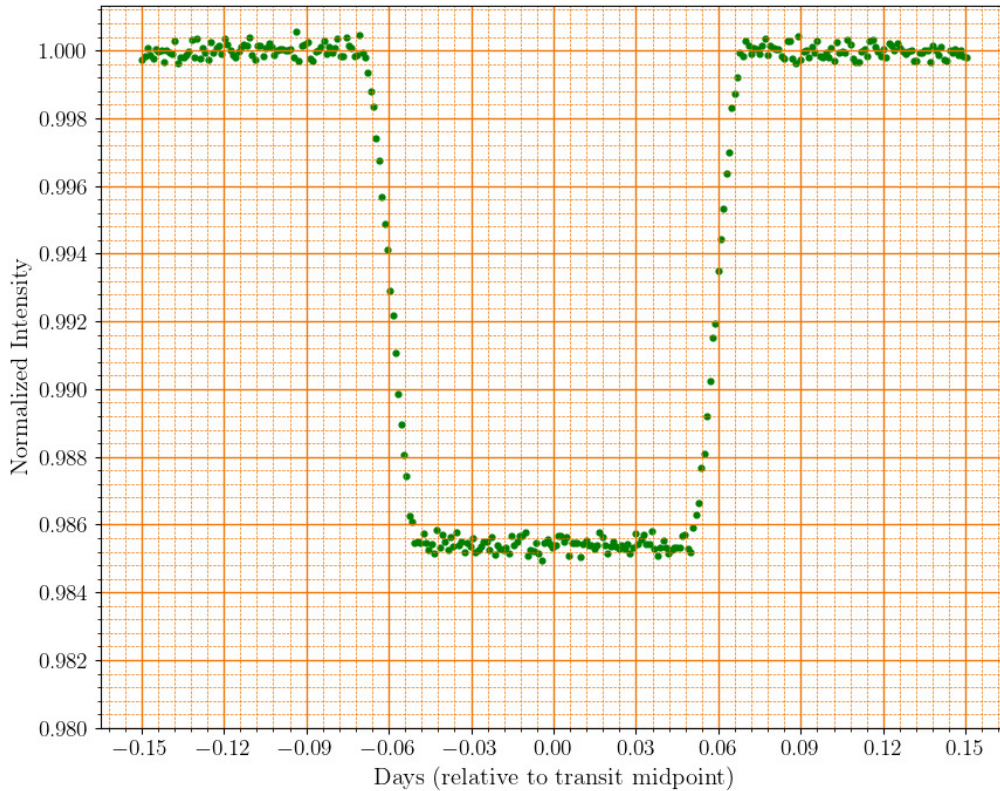
행성통과 총 지속 시간 (행성이 별 디스크를 부분적으로 또는 완전히 덮는 시간)은 t_T 로 주어지며, t_F 는 행성이 완전히 별 원반 앞에 있는 시간을 나타낸다. "충격 매개변수(impact parameter)" b 는 통과 중간 지점에서 행성과 별 원반 중심 사이의 투영 거리로, 별 반지름 R_s 단위로 측정된다.

가장자리 근처에서 본 별-행성 궤도의 경우, 충격 매개변수는 다음 공식으로 주어진다

$$b = \left[\frac{(1 - \sqrt{\Delta})^2 - (t_F/t_T)^2(1 + \sqrt{\Delta})^2}{1 - (t_F/t_T)^2} \right]^{1/2}$$

- (D01.3) SP 시스템의 경우, 항성 반경은 $R_s = 1.20R_\odot$ 로 알려져 있으며, 행성의 통과가 실제로 관측된 [3]
다. (D01.2d)에서 추정된 최소 궤도 반경 $a_{\min}$ 을 사용하여 경사각의 최소값 $i_{\min}$ 을 구하시오.

균일한 밝기의 항성 원반을 가정하면, 통과 광도곡선은 아래와 같이 보일 것이다.



- (D01.4) 주어진 광도곡선을 사용하여 다음 질문에 답하시오. 참고로 위의 광도곡선은 Summary Answersheet에도 제공되어 있다.

(D01.4a) 그래프 위에 t_T 와 t_F 의 값을 구하기 위해 어디를 읽어야 하는지 적당한 표식을 하고 [3]
각 값을 일(day) 단위로 추정하시오.

(D01.4b) 그래프 위에 Δ 의 평균값을 추정하기 위해서 어디를 읽어야 하는지 적당한 부분을 표 [2]
시해 주고, 그 값을 추정하여 R_p 를 $R_\odot$ 단위로 구하시오.

(D01.4c) 궤도 반지름이 $a_{\min}$ 이라고 가정하여 i 의 값을 도(degree) 단위로 결정하시오. [2]

주연감광(limb darkening) 소개

지금까지 우리는 별의 원반이 균일하게 밝다고 가정했다. 실제로 관측된 별의 원반의 밝기는 주연감광(limb darkening)이라는 광학적 효과로 인해 균일하지 않다. 이 효과는 별의 원반의 중앙 부분이 가장자리 또는 "림(limb)"보다 더 밝게 보이는 현상이다.

주연감광 효과는 상대 세기(relative intensity) $J(\theta) \equiv \frac{I(\theta)}{I(0)}$ 로 측정할 수 있다. 여기서 θ 는 관측자와 별 표면의 한 지점을 연결하는 선과 그 지점의 법선 (the normal to the star) 사이의 각도이며, $I(\theta)$ 는 별 원반의 해당 지점

의 관측 세기이다. ($I(0)$ 는 별 원반의 중심에서의 세기) 먼 관측자에게는 θ 가 $\theta = 0$ (원반의 중심)에서 $\theta \approx 90^\circ$ (원반의 가장자리)까지 변한다.

(D01.5) 아래 표는 태양에 대한 특정 파장에서 측정된 $J(\theta)$ 를 제공한다. 우리는 별 S에 대해서도 동일한 주연감광 프로파일이 적용된다고 가정할 것이다.

θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$
0°	1.000	20°	0.971	40°	0.883	70°	0.595
10°	0.994	25°	0.950	50°	0.794	80°	0.475
15°	0.984	30°	0.943	60°	0.724	90°	0.312

주연감광 프로파일은 다음과 같은 이차식으로 모델링할 수 있다:

$$J(\theta) = 1 - a_1(1 - \cos \theta) - a_2(1 - \cos \theta)^2,$$

여기에서 a_1 과 a_2 는 두 개의 상수이다.

우리는 주어진 데이터를 사용하여 적절한 변수로 그래프를 그려서 미지의 계수 a_1 과 a_2 를 추정할 것이다.

(D01.5a) x 축과 y 축을 가지는 그래프를 그려서 a_1 및 a_2 를 결정할 수 있도록, θ 와 J 의 적절한 함수가 될 수 있는 변수 쌍(순서쌍; a pair of variables) (x_1, y_1) 을 선택해 보시오. 선택한 x_1 및 y_1 의 표현식을 적어 보시오. [2]

만일 추가적인 플롯(plot)을 위한 추가적인 변수를 정의할 필요가 있는 경우라면, (x_2, y_2) 등으로 정의하십시오.

(D01.5b) 그래프를 그릴 수 있도록 필요한 값을 표로 작성하십시오. [4]

(D01.5c) 위에서 새로 정의한 변수쌍으로 주어진 그래프 용지에 그래프를 그리시오 (그래프를 "D01.5c"로 표시하십시오). [7]

(D01.5d) 그린 그래프에서 a_1 및 a_2 를 얻으시오. 값의 불확실성은 필요하지 않다. [7]

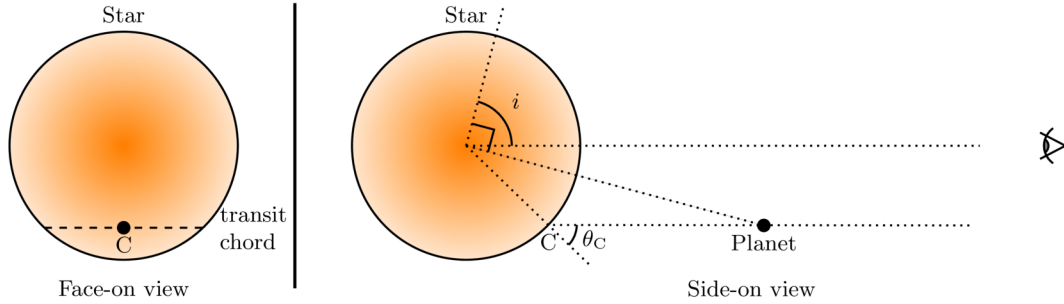
주연 감광이 있는 상태에서의 통과(transit)

이제 우리는 주연감광이 발생한 별의 원반를 가로지르는 행성의 통과를 고려할 것이다. 주연감광이 있는 상태에서는, 위에서 주어진 $J(\theta)$ 의 이차식으로 모델링할 것이며, 전체 별 원반의 평균 관측 세기 observed intensity(행성 통과가 없는 경우), $\langle I \rangle$ 는 다음과 같이 주어진다:

$$\langle I \rangle = \left(1 - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{6}\right) I(0)$$

더 나아가, 통과하는 행성에 의해 발생하는 빛의 감소는 이제 행성과 별의 상대 크기, $\left(\frac{R_p}{R_s}\right)$ 뿐만 아니라, 통과 경로를 따라 별 원반의 세기 프로필에도 의존하게 되며, 이는 다시 경사각 i 에 따라 달라진다.

아래의 개략도(비율에 맞게 그려지지 않음)는 해당 모습을 보여준다. 별의 더 밝은 부분은 더 진한 음영으로 표시되었으며, 행성은 검은 점으로 표시되어있다.



여기서 $\left(\frac{R_p}{R_s}\right)$ 와 광도 곡선에서 측정된 Δ 사이의 관계는

$$\Delta = \frac{I(\theta_C)}{\langle I \rangle} \left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2,$$

여기에서 $I(\theta_C)$ 는 통과 경로의 중간점(위 그림의 점 C)에서 별 원반의 세기이며, θ_C 는 그 지점에서 표면에 수직인 선과 시선 사이의 각도이다. 위에서 알 수 있듯이, 주어진 별에 대해 동일한 Δ 값이 행성 크기 R_p 와 경사각 i 의 여러 조합에 의해 생성될 수 있다.

(D01.6) 두 파장, 예를 들어 λ_B (파랑) 및 λ_R (빨강)에서의 행성통과 광도곡선 데이터를 사용하여 R_p 와 i 를 고유하게 결정할 수 있다. 이 두 파장에 대한 주연감광 계수는 아래와 같다:

파장	a_1	a_2
λ_B	0.82	0.05
λ_R	0.24	0.20

(D01.6a) 다음 중 λ_B 에 대한 최대 통과 깊이 Δ 와 궤도의 경사각 (i) 사이의 관계를 설명하는 올바른 진술을 선택하고 Summary Answersheet에 체크(✓)하십시오. [2]

- A. Δ 는 i 가 감소함에 따라 증가한다.
- B. Δ 는 i 가 감소함에 따라 감소한다.
- C. Δ 는 i 와 무관하다.

(D01.6b) "SP 시스템"의 최대 통과 깊이 (Δ)는 λ_B 와 λ_R 에 대해 각각 0.0182와 0.0159로 측정되었다. [4]

주어진 격자(grid)에 λ_B 와 λ_R 의 개략적인 통과 광도곡선을 그리고, 각각의 곡선에 "B"와 "R"로 이름표를 적어라. 두 파장에서의 총 통과 지속시간이 동일하다고 가정하십시오. 곡선은 비율에 맞출 필요는 없지만, 광도곡선의 형태를 정확하게 나타내야 한다.

(D01.7) 우리는 λ_B 와 λ_R 에서의 Δ 측정값을 이용해서 SP 시스템에 대한 R_p 및 i 의 값을 찾기 위해 그래프를 이용하는 방법 (graphical method)를 사용하고자 한다.

(D01.7a) 도표에 사용될 관련 변수들 사이의 관계식을 작성하십시오 (힌트: 관련 변수 중 i 또는 b , 그리고 R_p 를 고려할 수 있다.) [6]

(D01.7b) 그래프로 그릴 적합한 양들(quantities)을 표로 작성하십시오. [5]

- (D01.7c) 적절한 그래프를 그리고 "D01.7c"로 표시하십시오. [7]
- (D01.7d) 그래프로부터 R_p (단위: $R_\odot$)와 i (단위: 도 degree)의 값을 추정하십시오. [4]
- (D01.8) 이 문제에서 얻은 결과를 바탕으로, 행성 P가 "암석형"인지 "가스형"인지 Summary [2]
Answersheet의 적절한 상자에 체크(✓)하여 표시하십시오.

(D02) 코로나 질량 방출의 지구 도달 시간 예측하기

[60점]

태양은 때때로 태양 표면에서 시작하여 바깥쪽으로 전파되는 코로나 질량 방출(CME)이라고 하는 자화 플라즈마(magnetized plasma)를 방출한다. 지구에 도달하는 시간을 정확하게 예측하는 것은 지구 궤도를 도는 위성에 대한 잠재적 영향을 이해하고 완화하는 데 매우 중요하다. 이 문제에서는 10개의 인공위성 데이터를 사용하여 경험적 모델을 개발하여 CME의 도착 시간을 예측하는 것을 목표로 한다. 이 문제 전체에서 태양 표면과 지구 사이의 거리는 $214R_{\odot}$ 으로 채택한다.

또한, 이 문제에서 태양이 자전하지 않는다고 가정하자. 전자기력, 중력, 항력(drag force)으로 인해 CME는 전파되는 동안 가속도의 변화를 겪는다. 이 문제의 처음 두 부분에서는 태양과 지구 사이의 영역이 진공 상태라고 가정한다.

진공 속의 CME.

(D02.1) 아래 표에는 10개의 CME에 대한 태양 표면($= 1R_{\odot}$)에서의 초기 속도 u , 지구에 도달할 때의 최종 속도 v , 태양 표면을 떠난 후 지구에 도착하는 시간 τ (단위는 시 hours)이 주어져 있다.

CME	u	v	τ
Name	(km s^{-1})	(km s^{-1})	(h)
CME-A	804	470	74.5
CME-B	247	360	127.5
CME-C	523	396	103.5
CME-D	830	415	71.0
CME-E	665	400	104.5
CME-F	347	350	101.5
CME-G	446	375	99.5
CME-H	155	360	97.0
CME-I	1016	515	67.0
CME-J	683	410	54.0

(D02.1a) 각 CME에 대한 평균 가속도 a 를 m s^{-2} 단위로 계산하시오.

[3]

(D02.1b) CME의 가속도 a_{model} 에 대한 경험적 모델은 초기 속도 u 에 따라 달라지는데, 그 식을 다음과 같이 가정한다. $a_{\text{model}} = m \left(\frac{u}{u_0} \right) + \alpha$; 여기에서, a_{model} 은 m s^{-2} 단위로, u 는 m s^{-1} 단위로, 그리고 $u_0 = 1.00 \times 10^3 \text{ km s}^{-1}$ 로 둔다.

적절한 그래프를 그려서 상수 m, α , 그리고 해당 상수들의 불확실성(uncertainties)을 결정하시오. (그린 그래프를 "D02.1b"로 표시하시오).

[15]

(D02.1c) 각 CME에 대해, m s^{-2} 단위의 a_{model} 에 대한 표를 작성하시오. 이제, 앞에서 계산한 가속도 a 와 모델 값 a_{model} 사이 편차(deviation)의 평균제곱근(rms) δa_{rms} 를 계산하시오.

[4]

(D02.2) 초기 속도가 각각 $u = 1044 \text{ km s}^{-1}$ 및 273 km s^{-1} 인 CME-1과 CME-2라는 두 CME를 고려하자.

(D02.2a) (D02.1b)에서 얻은 경험적 모델을 이용하여 CME-1과 CME-2에 대해 각각의 지구 도달 시간의 예측값 $\tau_{1,m}$ 및 $\tau_{2,m}$ (시간 단위)을 계산하시오. [4]

(D02.2b) CME-1과 CME-2의 지구 도달 시간의 예측값은 각각 46.0 h와 74.5 h 이었다. 도달 시간의 예측값과 관측값의 차이가 관측값의 20% 이하일 경우, 특정 CME에 대한 경험적 모델이 유효하다고 할 수 있다. 그렇지 않으면 유효하지 않다. 각 CME에 대한 모델의 유효성을 Summary Answersheet의 적절한 상자에 체크(✓)하시오. [2]

태양풍에서의 CME

현실에서는 태양과 지구 사이의 공간이 태양풍으로 가득 차 있으며, 이는 CME에 항력(drag force)을 가한다. CME의 속도가 태양풍의 속도에 비해 빠르거나 느린지에 따라 항력은 CME의 속도를 감속시키거나 가속시킬 수 있다. 태양풍의 영향을 고려하기 위해, 우리는 $R_{\text{obs}}(t) \geq R_0$ 인 거리에서 "drag-only(항력만 존재하는)" 모델을 사용할 것이다. 이때 R_0 는 항력이 CME의 운동에 영향을 미치는 주된 힘(dominant force)이 되는 거리이다.

"drag-only" 모델에서 태양 표면으로부터의 거리 $R_D(t)$ 와 CME의 속도 $V_D(t)$ 는 다음과 같이 주어진다:

$$R_D(t) = \frac{S}{\gamma} \ln [1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)] + V_s(t - t_0) + R_0$$

$$V_D(t) = \frac{V_0 - V_s}{1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)} + V_s$$

이때 $\gamma = 2 \times 10^{-8} \text{ km}^{-1}$, V_s 는 태양풍의 일정한 속력(constant speed)이며, R_0 와 V_0 는 각각 시간 t_0 에서의 거리와 속도이며, S 는 부호 인자(sign factor)이다. $S = 1$ 은 $V_0 > V_s$ 일 때, $S = -1$ 은 $V_0 \leq V_s$ 일 때이다.

(D02.3) 아래 표는 두 CME, 즉 CME-3와 CME-4에 대해 태양 표면으로부터의 관측된 반지름을 거리(radial distance) $R_{\text{obs}}(t)$ (단위: $R_\odot$)를 시간 t (단위: hours)의 함수로 보여준다. 각 표의 마지막 데이터 포인트(D5 및 P8)는 각 CME의 지구 도달 시간(arrival time at Earth)을 나타낸다. 이 문제에서는 $V_s = 330 \text{ km s}^{-1}$ 로 가정한다.

CME-3		
Data point	t (in h)	$R_{\text{obs}}(t)$ (in $R_\odot$)
D1	0.200	6.36
D2	0.480	7.99
D3	1.22	11.99
D4	1.49	13.51
D5	58.05	214

CME-4		
Data point	t (in h)	$R_{\text{obs}}(t)$ (in $R_\odot$)
P1	1.00	4.00
P2	3.00	6.00
P3	4.00	9.00
P4	5.00	11.0
P5	21.0	43.0
P6	50.0	100
P7	85.0	170
P8	111	214

우리는 "drag-only" 모델이 이러한 CME의 도착 시간을 만족스럽게 예측하는지 평가할 것이다. 이 모델을 사용하려면 적절한 t_0 , 그리고 이에 상응하는 R_0 및 V_0 를 선택해야 한다.

(D02.3a) CME-3에 대해 다음 두 가지 경우를 고려하시오: [6]
(C1) t_0 는 구간(interval) D1 – D2의 중점(midpoint)으로 설정된다.

(C2) t_0 는 구간 D3 – D4의 중점으로 설정된다.

속도가 각 특정 구간 D1–D2 및 D3–D4에서는 일정하게 유지되지만, 두 구간 사이에는 다를 수 있다고 가정한다.

두 경우 각각에 대하여, t_0 , R_0 , 및 V_0 를 사용하여 $t = 58.05$ h에서 반지름 거리(radial distance)의 관측값과 예측값의 차이 $\delta R_D \equiv R_{\text{obs}}(t) - R_D(t)$ 를 $R_\odot$ 단위로 계산하시오.

(D02.3b) (D02.3a)와 비슷한 과정을 따라서, CME-4에 대해 태양과 지구 사이의 P5, P6, P7, P8에서의 $R_D(t)$ 를 다음 두 경우에 대해 계산하시오: [4]

(C3) t_0 는 구간 P1 – P2의 중점으로 설정된다.

(C4) t_0 는 구간 P3 – P4의 중점으로 설정된다.

(D02.3c) CME-4의 두 경우 C3와 C4에 대해, P5, P6, P7, P8에서의 $R_D(t)$ ($R_\odot$ 단위) vs t (hours 단위)를 플롯하시오 (그래프에 "D02.3c"로 표시하십시오). 동일한 그래프에서 두 경우에 대해 각 점을 통과하는 $R_D(t)$ 의 매끄러운 곡선(smooth curve)을 그리시오. 이 부분에서는 x 축의 범위를 0에서 180 hr로 설정하시오. [10]

(D02.3d) 그래프를 이용하여, 각 경우 C3 및 C4에 대해, CME-4의 지구 도달 시간의 실제값과 drag-only(항력만 존재하는) 모델에서의 예측값 사이의 차이의 절댓값 $|\delta\tau|$ 를 추정하시오. [4]

(D02.3e) 다음 문장이 TRUE인지 FALSE인지 Summary Answersheet의 적절한 상자에 체크(✓)하시오 (설명 필요 없음): [1]
“태양풍에 의해 가해지는 항력(drag force)이 CME-4에 비해 CME-3에서 더 이른 시점부터 우세(dominant)하다.”

(D02.4) D02.1에서 10개의 CME에 작용하는 우세한 힘(dominant force)이 항력(drag force)이라고 고려하자. "drag-only(항력만 존재하는)" 모델이 태양 표면($R_0 = 1 R_\odot$)부터 모든 CME에 적용 가능하다고 가정하자. [7]

각 CME에 대해 태양풍 속도 V_s 를 km s^{-1} 단위로 추정하고 표에 작성하시오. 또한, 10개의 CME에 대해 평균 태양풍 속도(average solar wind speed) $V_{s,\text{avg}}$ 를 추정하시오.