

**(D01) 30 лет экзопланет**

**[90 баллов]**

Эта задача исследует некоторые аспекты двух основных методов обнаружения экзопланет: радиальной скорости и транзита. В течение этой задачи мы будем рассматривать конкретную систему с одной планетой (P) на круговой орбите с радиусом  $a$  вокруг звезды солнечного типа (S). Мы будем называть эту систему "SP системой".

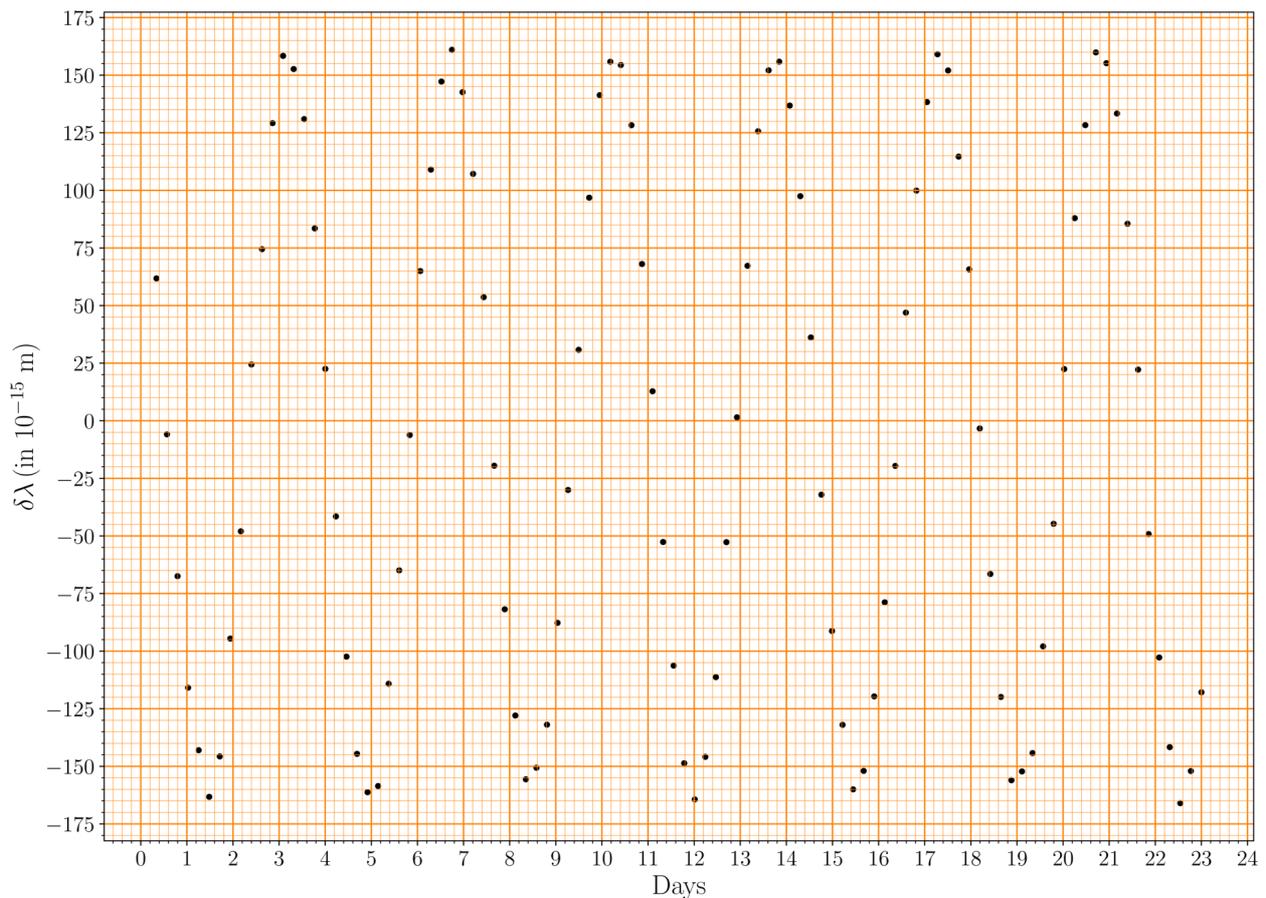
(D01.1) Видимая величина звезды S в V-диапазоне составляет  $7.65 \pm 0.03$  mag, параллакс равен  $20.67 \pm 0.05$  миллиардсекунд, а болометрическая поправка (BC) составляет  $-0.065$  mag.

Оцените массу звезды,  $M_s$  (в единицах  $M_\odot$ ), предполагая отношение масса - светимость ( $M-L$ ) в виде  $L \propto M^4$ . Также оцените неопределенность в  $M_s$ . **[8]**

**Метод радиальной скорости**

Метод радиальной скорости использует эффект Доплера  $\delta\lambda \equiv \lambda_{\text{obs}} - \lambda_0$  между наблюдаемой длиной волны  $\lambda_{\text{obs}}$  и длиной волны покоя  $\lambda_0$  известной спектральной линии для обнаружения экзопланеты и определения её характеристик.

На рисунке ниже показано  $\delta\lambda$  для линии Fe I ( $\lambda_0 = 543.45 \times 10^{-9}$  м) как функция времени, наблюдаемая для системы SP.



Полуамплитуда радиальной скорости  $K$  определяется как  $K \equiv (v_{r, \text{max}} - v_{r, \text{min}})/2$ , где  $v_{r, \text{max}}$  и  $v_{r, \text{min}}$  — это минимальная и максимальная радиальные скорости соответственно. Для круговой орбиты планеты полуамплитуда  $K$  может быть записана как:

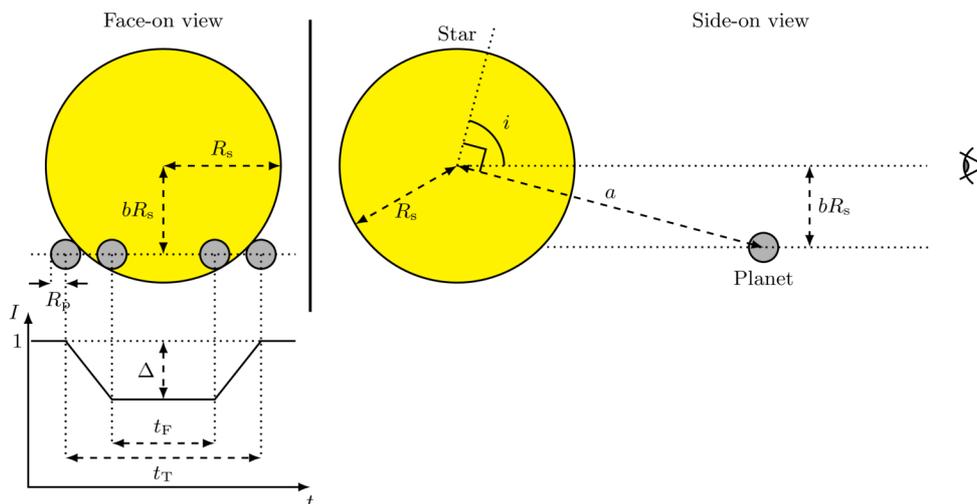
$$K = \left( \frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_p + M_s)^{2/3}}$$

, где  $T$  — период,  $i$  — наклонение орбиты планеты (угол между нормалью к орбитальной плоскости планеты и линией зрения наблюдателя),  $M_p$  и  $M_s$  — массы планеты и звезды соответственно.

- (D01.2) Используйте приведенный выше график, указанный в листе ответов (повернутый на 90 deg), чтобы ответить на следующее.
- (D01.2a) Нарисуйте плавную кривую, связанную с наблюдаемыми данными, [2] показанными на графике.
- (D01.2b) Выберите подходящие точки на нарисованной кривой и используйте [11] подходящие методы для определения  $T$  и  $K$  вместе с соответствующими неопределенностями. Все точки данных, использованные для расчета  $T$  и  $K$ , должны быть показаны в таблице в итоговом листе ответов. Используйте остальную часть таблицы для отображения промежуточных расчетов, по мере необходимости, с соответствующими заголовками.
- (D01.2c) Найдите минимальную массу планеты  $M_{p, \min}$  (в  $M_\odot$ ) и соответствующую [5] неопределенность, предполагая, что  $M_p \ll M_s$ .
- (D01.2d) Используя значение  $M_{p, \min}$ , оцененное в части (D01.2c), рассчитайте [4] минимальное значение большой полуоси орбиты планеты,  $a_{\min}$ , в а.е. и его неопределенность.

### Метод транзита (без учета затемнения края)

Схематическая диаграмма транзита планеты (не в масштабе) показана ниже. Изначально мы предположим, что звездный диск имеет равномерную среднюю интенсивность с некоторым внутренним шумом из-за самой звезды.



Кривая света нормализованной интенсивности,  $I$ , как функция времени  $t$  показана на схематической диаграмме транзита выше. Средняя звездная интенсивность вне транзита принимается за единицу. Максимальное уменьшение интенсивности обозначается как  $\Delta$  в нормализованной кривой света. Для равномерно яркого звездного диска радиус планеты,  $R_p$ , связан с  $\Delta$  следующим образом

$$\left( \frac{R_p}{R_s} \right)^2 = \Delta,$$

где  $R_s$  — радиус звезды.

Общая продолжительность транзита (когда часть или вся планета покрывает звездный диск) обозначается как  $t_T$ , в то время как  $t_F$  обозначает продолжительность, когда планета полностью находится перед звездным диском. “Параметр удара”  $b$  — это проецируемое расстояние между планетой и центром звездного диска в середине транзита, в единицах радиуса звезды,  $R_s$ .

Для почти краевого орбиты звезда-планета параметр удара задается формулой

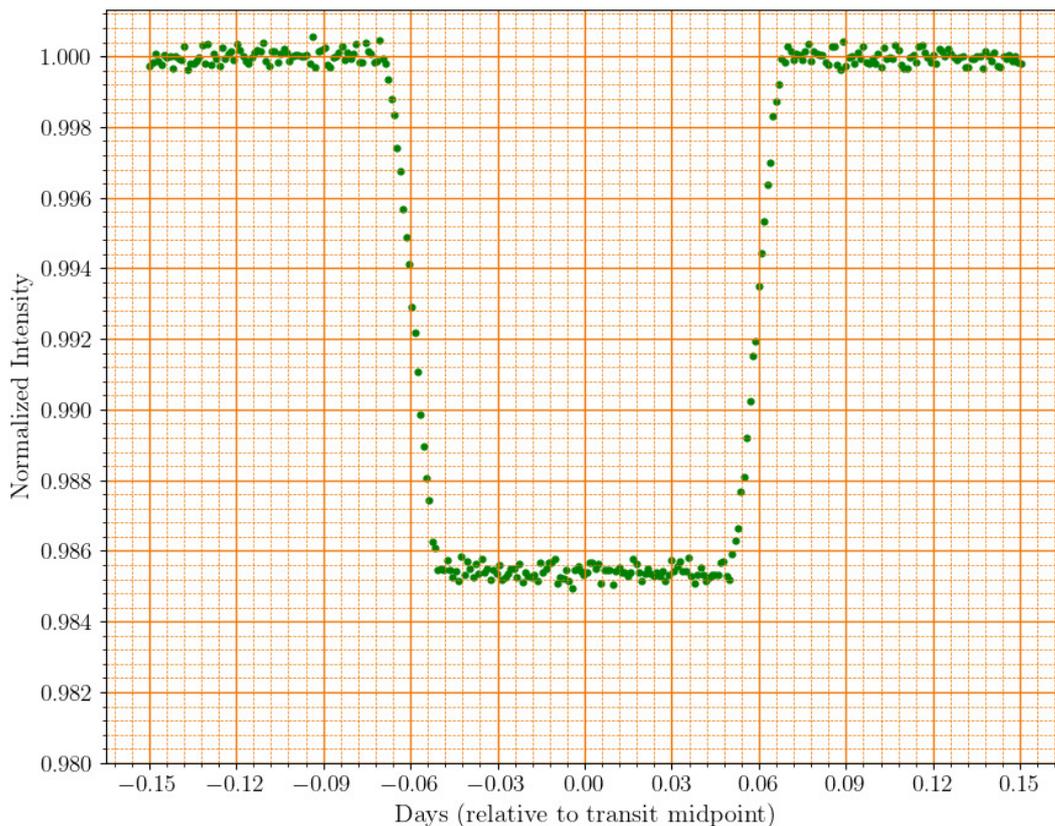
$$b = \left[ \frac{(1 - \sqrt{\Delta})^2 - (t_F/t_T)^2(1 + \sqrt{\Delta})^2}{1 - (t_F/t_T)^2} \right]^{1/2}$$

(D01.3)

[3]

Для системы SP известно, что радиус звезды равен  $R_s = 1.20R_\odot$ , и транзит планеты действительно виден. Используя минимальный орбитальный радиус,  $a_{\min}$ , оцененный в части (D01.2d), найдите минимальное значение,  $i_{\min}$ , угла наклона.

Предполагая, что диск звезды имеет равномерную яркость, кривая блеска транзита будет выглядеть, как показано ниже.



(D01.4) Используя данную световую кривую, ответьте на следующие вопросы. Для вашего удобства вышеупомянутая световая кривая также приведена в сводном листе ответов.

(D01.4a) Оцените значения  $t_T$  и  $t_F$  в днях, отметив соответствующие показания на графике. [3]

(D01.4b) Оцените среднее значение  $\Delta$  и, следовательно, найдите  $R_p$  в единицах  $R_\odot$ . [2]

- (D01.4c) Определите значение  $i$  в градусах, предполагая, что орбитальный радиус равен  $a_{\min}$ . [2]

### Введение в затемнение края

До сих пор мы предполагали, что звездный диск равномерно яркий. На самом деле наблюдаемая яркость звездного диска неравномерна из-за эффекта "затемнения края" — оптического эффекта, при котором центральная часть звездного диска кажется ярче, чем край, или "край" ("limb").

Эффект затемнения края можно измерить по относительной интенсивности  $J(\theta) \equiv \frac{I(\theta)}{I(0)}$ , где  $\theta$  — это угол между нормалью к поверхности звезды в точке и линией, соединяющей наблюдателя с этой точкой,  $I(\theta)$  — наблюдаемая интенсивность звездного диска в этой точке ( $I(0)$  — интенсивность в центре звездного диска). Для удаленного наблюдателя  $\theta$  варьируется от  $\theta = 0$  (центр диска) до  $\theta \approx 90^\circ$  (край диска).

- (D01.5) Таблица ниже показывает измеренные значения  $J(\theta)$  на определенной длине волны для Солнца. Мы будем предполагать, что тот же профиль затемнения края применим к звезде S.

$\theta$	$J(\theta)$	$\theta$	$J(\theta)$	$\theta$	$J(\theta)$	$\theta$	$J(\theta)$
$0^\circ$	1.000	$20^\circ$	0.971	$40^\circ$	0.883	$70^\circ$	0.595
$10^\circ$	0.994	$25^\circ$	0.950	$50^\circ$	0.794	$80^\circ$	0.475
$15^\circ$	0.984	$30^\circ$	0.943	$60^\circ$	0.724	$90^\circ$	0.312

Профиль затемнения края можно моделировать с помощью квадратичной формулы:

$$J(\theta) = 1 - a_1(1 - \cos \theta) - a_2(1 - \cos \theta)^2,$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — две константы.

Мы оценим неизвестные коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  из данных, построив график с подходящими переменными.

- (D01.5a) Выберите пару переменных  $(x_1, y_1)$ , которые являются подходящими функциями  $\theta$  и  $J$ , которые вы хотите отобразить вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно, чтобы определить  $a_1$  и  $a_2$ . Запишите выражения для  $x_1$  и  $y_1$ . [2]

Если вам нужно определить дополнительные переменные для дополнительных графиков, определите их как  $(x_2, y_2)$  и так далее.

- (D01.5b) Составьте таблицу значений, необходимых для построения графиков. [4]

- (D01.5c) Постройте график вновь определенных переменных на предоставленной миллиметровой бумаге (обозначьте ваш график как "D01.5c"). [7]

- (D01.5d) Получите  $a_1$  и  $a_2$  из графика. [7]

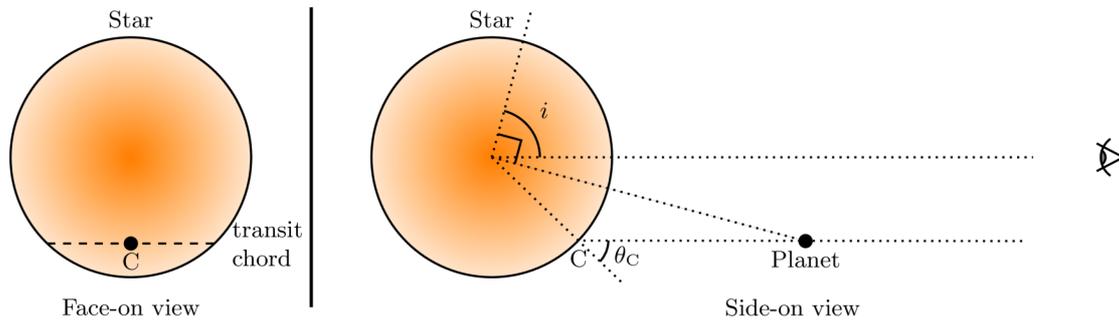
### Транзит в присутствии затемнения края

Теперь мы рассматриваем планетарные транзиты через звездный диск с затемнением края. В присутствии затемнения края, которое мы будем моделировать с помощью квадратичной формулы  $J(\theta)$ , приведенной выше, средняя наблюдаемая интенсивность всего звездного диска (без какого-либо транзита),  $\langle I \rangle$ , задается формулой:

$$\langle I \rangle = \left(1 - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{6}\right) I(0)$$

Кроме того, падение света, вызванное транзитом планеты, теперь зависит не только от относительных размеров планеты и звезды,  $\left(\frac{R_p}{R_s}\right)$ , но и от профиля интенсивности звездного диска вдоль транзитной хорды, который, в свою очередь, зависит от угла наклона,  $i$ .

Схематическая диаграмма ниже (не в масштабе) показывает конфигурацию.



Здесь связь между  $\left(\frac{R_p}{R_s}\right)$  и измеренной  $\Delta$  из кривой блеска выражается как

$$\Delta = \frac{I(\theta_C)}{\langle I \rangle} \left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2,$$

где  $I(\theta_C)$  — это интенсивность звёздного диска в середине транзитной хорды (точка  $C$  на рисунке выше),  $\theta_C$  — угол между линией зрения и нормалью к поверхности в этой точке. Из вышесказанного очевидно, что для данной звезды одно и то же значение  $\Delta$  может быть получено многими комбинациями размера планеты,  $R_p$ , и угла наклона  $i$ .

(D01.6) Можно однозначно определить как  $R_p$ , так и  $i$ , используя данные из кривых транзита на двух длинах волн, например,  $\lambda_B$  (синий) и  $\lambda_R$  (красный). Коэффициенты затемнения края для этих двух длин волн приведены ниже:

Длина волны	$a_1$	$a_2$
$\lambda_B$	0.82	0.05
$\lambda_R$	0.24	0.20

(D01.6a) Выберите правильное утверждение из следующих, которое описывает связь между максимальной глубиной транзита  $\Delta$  для  $\lambda_B$  и углом наклона ( $i$ ) орбиты. [2]

- A.  $\Delta$  увеличивается с уменьшением  $i$ .
- B.  $\Delta$  уменьшается с уменьшением  $i$ .
- C.  $\Delta$  не зависит от  $i$ .

(D01.6b) Максимальная глубина транзита ( $\Delta$ ) для "SP системы" была измерена как 0.0182 для  $\lambda_B$  и 0.0159 для  $\lambda_R$ , соответственно. [4]

Нарисуйте схематические кривые транзита для  $\lambda_B$  и  $\lambda_R$  на данной сетке и обозначьте кривые как "B" и "R", соответственно. Предположите, что общая длительность транзита одинакова для обеих длин волн. Кривые не обязательно должны быть в масштабе, но должны правильно представлять формы кривых света.

(D01.7) Мы будем использовать графический метод для нахождения значений  $R_p$  и  $i$  для системы SP.

(D01.7a) Напишите подходящее выражение, связывающее соответствующие переменные, которые необходимо построить на графике. (Подсказка: Вы можете рассмотреть  $i$ ,  $b$ ,  $R_p$  среди соответствующих переменных.) [6]

(D01.7b) Табулируйте соответствующие величины, которые необходимо построить на графике. [5]

- 
- (D01.7c) Нарисуйте подходящий график и отметьте его как “D01.7c”. [7]
- (D01.7d) Оцените значения  $R_p$  (в  $R_\odot$ ) и  $i$  (в градусах) по графику. [4]
- (D01.8) На основании полученных в этой задаче результатов укажите, является ли планета P «КАМЕННОЙ» или «ГАЗОВОЙ», поставив галочку (✓) в соответствующем поле в итоговом листе ответов. [2]

**(D02) Прогнозирование времени прибытия корональных выбросов массы на Землю**

**[60 баллов]**

Солнце время от времени выбрасывает намагниченную плазму, называемую корональными выбросами массы (СМЕ), которые исходят с поверхности Солнца и распространяются наружу. Точное прогнозирование времени их прибытия на Землю имеет решающее значение для понимания и смягчения их потенциальных эффектов на спутники, находящиеся на орбите Земли. В этой задаче мы стремимся предсказать время прибытия СМЕ, разработав эмпирическую модель, используя данные о 10 СМЕ. На протяжении всей задачи расстояние между поверхностью Солнца и Землей принимается равным  $214R_{\odot}$ .

Кроме того, предположим, что Солнце не вращается. Из-за электромагнитных, гравитационных и сопротивляющих сил СМЕ испытывают переменное ускорение на протяжении всего их распространения. В первых двух частях этой задачи мы предполагаем, что область между Солнцем и Землей является вакуумом.

**Корональные выбросы массы (КВМ) через вакуум.**

(D02.1) Начальная скорость,  $u$ , на поверхности Солнца ( $= 1R_{\odot}$ ), конечная скорость,  $v$ , при достижении Земли, и время прибытия на Землю после выхода с поверхности Солнца (в часах),  $\tau$ , даны для 10 КВМ в следующей таблице.

КВМ	$u$	$v$	$\tau$
Название	(км с <sup>-1</sup> )	(км с <sup>-1</sup> )	(ч)
КВМ-А	804	470	74.5
КВМ-В	247	360	127.5
КВМ-С	523	396	103.5
КВМ-Д	830	415	71.0
КВМ-Е	665	400	104.5
КВМ-Ф	347	350	101.5
КВМ-Г	446	375	99.5
КВМ-Н	155	360	97.0
КВМ-И	1016	515	67.0
КВМ-Дж	683	410	54.0

(D02.1a) Рассчитайте среднее ускорение,  $a$ , для каждого СМЕ в м с<sup>-2</sup>. **[3]**

(D02.1b) Мы предполагаем эмпирическую модель для ускорения,  $a_{\text{model}}$ , СМЕ, которая зависит от его начальной скорости  $u$  как,  $a_{\text{model}} = m \left( \frac{u}{u_0} \right) + \alpha$ ; где,  $a_{\text{model}}$  выражено в м с<sup>-2</sup>,  $u$  выражено в км с<sup>-1</sup> и  $u_0 = 1.00 \times 10^3$  км с<sup>-1</sup>.

Определите константы  $m$  и  $\alpha$  и их связанные неопределенности, используя **[15]** соответствующий график (обозначьте ваш график как “D02.1b”).

(D02.1c) Для каждого СМЕ составьте таблицу  $a_{\text{model}}$  в м с<sup>-2</sup>. Затем рассчитайте **[4]** среднеквадратичное (rms) отклонение ускорений,  $\delta a_{\text{rms}}$ , между рассчитанным ускорением,  $a$ , и модельными значениями,  $a_{\text{model}}$ .

(D02.2) Мы рассматриваем два других СМЕ: СМЕ-1 и СМЕ-2, с начальными скоростями,  $u = 1044$  км с<sup>-1</sup> и  $273$  км с<sup>-1</sup>, соответственно.

(D02.2a) Используя эмпирическую модель, полученную в (D02.1b), рассчитайте **[4]** предсказанные времена прибытия на Землю,  $\tau_{1, \text{м}}$  и  $\tau_{2, \text{м}}$  (в часах), для СМЕ-1 и СМЕ-2 соответственно.

- (D02.2b) Наблюдаемые времена прибытия на Землю СМЕ-1 и СМЕ-2 составляют 46,0 ч и 74,5 ч соответственно. Эмпирическая модель считается **ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ** для конкретного СМЕ, если его предсказанное время прибытия находится в пределах 20% от наблюдаемого времени прибытия; в противном случае она **НЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНА**. Укажите действительность модели для каждого СМЕ, отметив (✓) соответствующий квадрат в итоговом листе ответов. [2]

**Корональные выбросы массы (КВМ) в присутствии солнечного ветра**

На самом деле пространство между Солнцем и Землей пронизано солнечным ветром, который оказывает тормозящую силу на КВМ. Эта сила может либо замедлять, либо ускорять КВМ в зависимости от его скорости относительно скорости солнечного ветра. Чтобы учесть влияние солнечного ветра, мы будем использовать модель, учитывающую только торможение, для расстояний  $R_{\text{obs}}(t) \geq R_0$ , где  $R_0$  — это расстояние, за пределами которого тормозящая сила становится доминирующей силой, влияющей на движение КВМ.

Расстояние от поверхности Солнца, определяемое из модели, учитывающей только торможение,  $R_D(t)$ , и скорость,  $V_D(t)$ , КВМ в этой модели задается выражением

$$R_D(t) = \frac{S}{\gamma} \ln [1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)] + V_s(t - t_0) + R_0$$

$$V_D(t) = \frac{V_0 - V_s}{1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)} + V_s$$

где,  $\gamma = 2 \times 10^{-8} \text{ км}^{-1}$ ,  $V_s$  — постоянная скорость солнечного ветра,  $R_0$  и  $V_0$  — это расстояние и скорость соответственно в момент времени  $t_0$ , а  $S$  — знак.  $S = 1$ , если  $V_0 > V_s$ ;  $S = -1$ , если  $V_0 \leq V_s$ .

- (D02.3) Таблицы ниже показывают наблюдаемое радиальное расстояние от поверхности Солнца,  $R_{\text{obs}}(t)$  (измеряется в  $R_\odot$ ), как функцию времени,  $t$  (в часах), для двух СМЕ: СМЕ-3 и СМЕ-4. Последняя точка данных в каждой таблице (соответственно D5 и P8) соответствует времени прибытия соответствующего СМЕ на Землю. Для этой части предположим, что  $V_s = 330 \text{ км с}^{-1}$ .

СМЕ-3		
Точка данных	$t$ (в ч)	$R_{\text{obs}}(t)$ (в $R_\odot$ )
D1	0.200	6.36
D2	0.480	7.99
D3	1.22	11.99
D4	1.49	13.51
D5	58.05	214

СМЕ-4		
Точка данных	$t$ (в ч)	$R_{\text{obs}}(t)$ (в $R_\odot$ )
P1	1.00	4.00
P2	3.00	6.00
P3	4.00	9.00
P4	5.00	11.0
P5	21.0	43.0
P6	50.0	100
P7	85.0	170
P8	111	214

Мы оценим, удовлетворительно ли модель «только сопротивление» предсказывает время прибытия этих СМЕ. Для использования этой модели необходимо сделать соответствующий выбор  $t_0$ , и соответствующих  $R_0$  и  $V_0$ .

- (D02.3a) Для СМЕ-3 рассмотрите следующие два случая: [6]  
 (C1)  $t_0$  принимается как середина интервала D1 – D2  
 (C2)  $t_0$  принимается как середина интервала D3 – D4  
 Предположим, что скорость остается постоянной в каждом конкретном интервале D1–D2 и D3–D4, но может различаться между двумя интервалами.  
 Используя  $t_0$ ,  $R_0$ , и  $V_0$ , рассчитайте разницу между наблюдаемым и предсказанным радиальным расстоянием  $\delta R_D \equiv R_{\text{obs}}(t) - R_D(t)$  в единицах  $R_\odot$  при  $t = 58.05$  ч, для каждого из двух случаев.
- (D02.3b) Оцените  $R_D(t)$  в точках P5, P6, P7 и P8 между Солнцем и Землей для СМЕ-4 для [4]  
 следующих двух случаев, используя процедуру, аналогичную (D02.3a):  
 (C3)  $t_0$  принимается как середина интервала P1 – P2  
 (C4)  $t_0$  принимается как середина интервала P3 – P4.
- (D02.3c) Постройте график  $R_D(t)$  (в  $R_\odot$ ) в зависимости от  $t$  (в часах) для двух случаев, C3 [10]  
 и C4, для СМЕ-4 в точках P5, P6, P7 и P8 (обозначьте ваш график как “D02.3c”). На том же графике нарисуйте плавные кривые  $R_D(t)$  для вышеупомянутых двух случаев. Для этой части возьмите диапазон оси  $x$  от 0 до 180 ч.
- (D02.3d) Используя график, оцените абсолютную разницу,  $|\delta\tau|$  между фактическим [4]  
 временем прибытия СМЕ-4 на Землю и временем его прибытия, предсказанным моделью только с учетом сопротивления, для каждого из случаев C3 и C4.
- (D02.3e) Укажите, является ли следующее утверждение ИСТИННЫМ или ЛОЖНЫМ, [1]  
 отметив (✓) соответствующий квадрат в итоговом листе ответов (письменное обоснование не требуется):  
 «Силы сопротивления, оказываемые солнечным ветром на СМЕ, становятся доминирующими для СМЕ-3 в более раннее время по сравнению с СМЕ-4».
- (D02.4) Рассмотрите сопротивление как доминирующую силу, действующую на 10 СМЕ в части [7]  
 D02.1. Предположим, что модель «только сопротивление» применима от поверхности Солнца ( $R_0 = 1 R_\odot$ ) и дальше, для всех СМЕ.  
 Оцените и составьте таблицу скорости солнечного ветра  $V_s$  в  $\text{km s}^{-1}$  для каждого СМЕ. Далее, оцените среднюю скорость солнечного ветра  $V_{s, \text{avg}}$  для всех 10 СМЕ.