

(D01) 太陽系外惑星の30年

[90点]

この問題では、太陽系外惑星検出の主な2つの方法である視線速度法とトランジット法のいくつかの側面を探っていく。太陽型の恒星 (S) の周りを半径 a で円軌道を描いて回る単一の惑星 (P) という特定の系を考える。この系を「SP系」と呼ぶ。

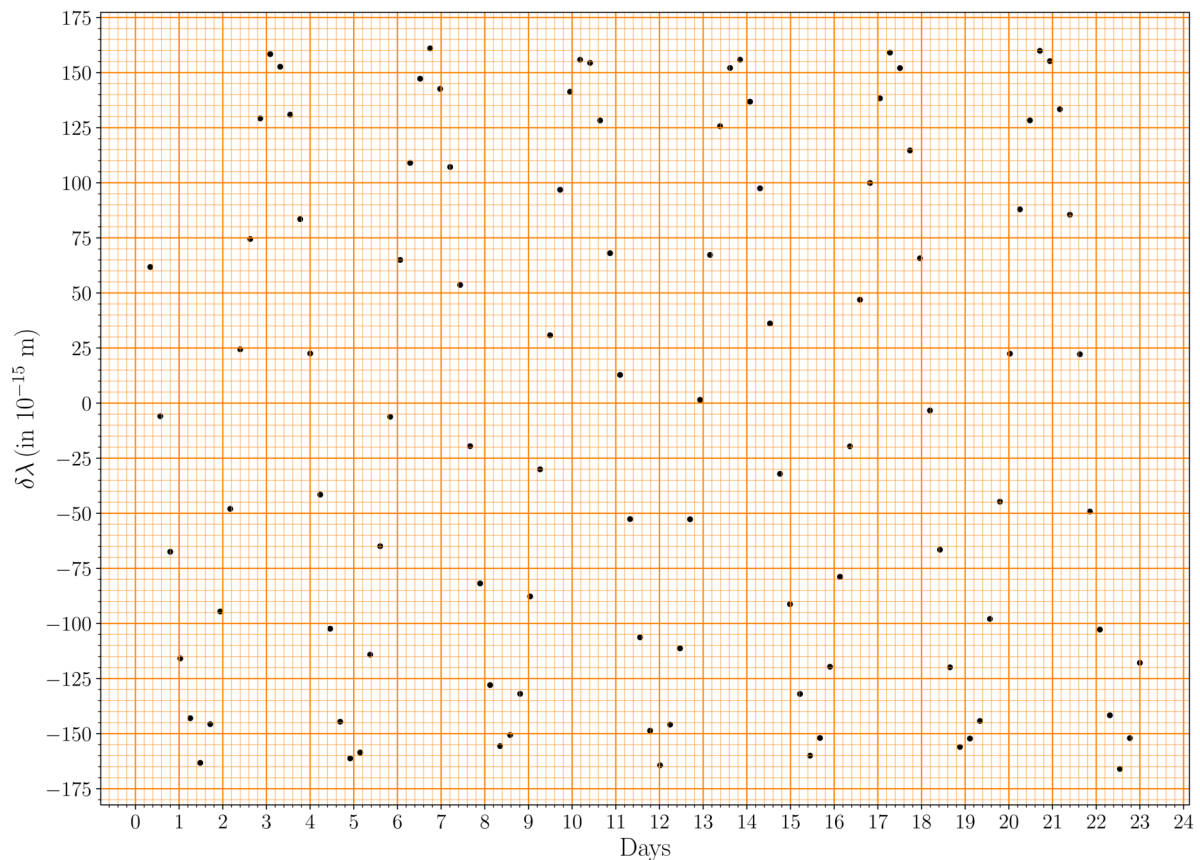
- (D01.1) 恒星Sの見かけのVバンド等級は 7.65 ± 0.03 mag、年周視差は 20.67 ± 0.05 ミリ秒角である。輻射補正 (BC; 輻射等級のVバンド等級に対する差) は -0.065 mag、すなわち輻射等級の方がVバンド等級よりも明るい。

質量-光度 ($M-L$) 関係が $L \propto M^4$ の形であると仮定するとき、星の質量 M_s (単位は $[8] M_\odot$) を推定せよ。また、 M_s の推定の不確かさも推定せよ。なお、以下の式を使ってよい。 $d \ln x / dx = 1/x$.

視線速度法

視線速度法では、主星の既知のスペクトル線について、実験室系での波長 λ_0 と観測された波長 λ_{obs} との間のドップラーシフト $\delta\lambda \equiv \lambda_{\text{obs}} - \lambda_0$ を用いることで、系外惑星を検出し系の物理パラメータを決定する。

以下の図は、Fe I 線 ($\lambda_0 = 543.45 \times 10^{-9}$ m) について、SP系に対して観測されたドップラーシフト $\delta\lambda$ を、時間の関数として表したものである。



ここで、 $K \equiv (v_{r, \text{max}} - v_{r, \text{min}})/2$ によって視線速度半振幅 K を定義する。ただし、 $v_{r, \text{max}}$ と $v_{r, \text{min}}$ はそれぞれ恒星の視線速度の最大値と最小値である。特に、惑星の公転軌道が円であると仮定すると、

$$K = \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_p + M_s)^{2/3}}$$

と表せる。ただし、 T は惑星の公転周期、 i は視線方向に対する惑星軌道の傾斜角（観測者の視線方向と、惑星の公転面の法線がなす角度）、 M_p と M_s はそれぞれ惑星と主星の質量である。

(D01.2) 回答用紙（Summary Answersheetでは図が90度回転していることに注意）に与えられた同じグラフを用いて、以下の問いに答えよ。

(D01.2a) グラフにプロットされた観測値を、滑らかな曲線で繋げ。 [2]

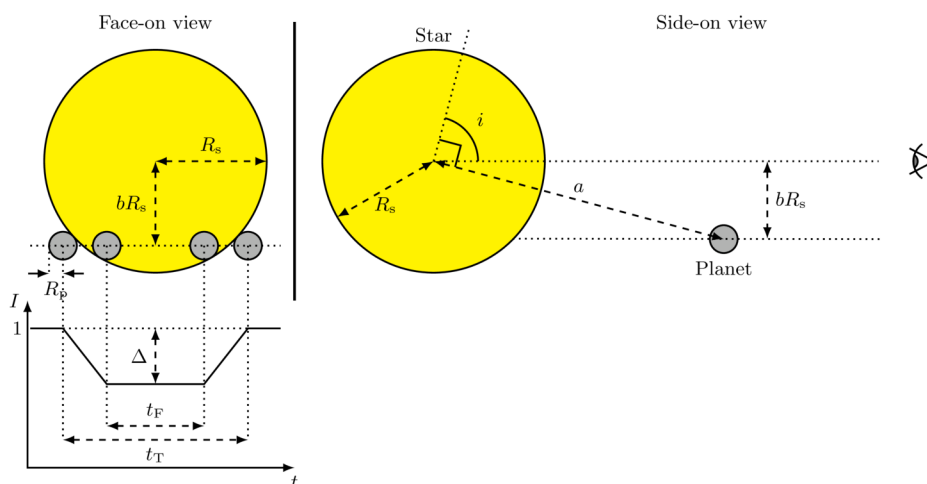
(D01.2b) 前問で描いた曲線から公転周期 T と視線速度半振幅 K を、それぞれの不確かさとともに適切な方法で推定する。推定に必要な点をグラフからできるだけ多く選び、選んだ点すべてについて、計測に使用する値を回答用紙（Summary Answersheet）の表に書き込め。これを用いて、 T と K を求めよ。それぞれの誤差範囲も合わせて求めること。計算の途中経過を示すために、必要に応じて適切な見出しを付けて表の残りの部分を使用しなさい。 [11]

(D01.2c) ここで $M_p \ll M_s$ を仮定するとき、惑星の質量としてあり得る最小値 $M_{p, \min}$ を、 $M_\odot$ を単位として求めよ。誤差範囲も合わせて求めること。 [5]

(D01.2d) 前問 (D01.2c) で推定した $M_{p, \min}$ の値を用いて、惑星の軌道長半径としてあり得る最小値 $a_{\min}$ を計算せよ。誤差範囲も合わせて求めること。

トランジット法（周縁減光がない場合）

下図に示されているのは、惑星のトランジット現象である（ただし、縮尺は正しくない）。まずここでは、恒星（主星）のディスクが、平均すると空間的に一様な放射強度を持っている場合を考え、主星自体の内的なノイズに伴って放射強度にばらつきが生じているとする。



上の左側の図中には、主星の放射強度 I が時間の関数として示されている。ただし、放射強度 I はトランジットの影響がない場合の主星の放射強度が1となるように規格化されている。図の中で、放射強度の最大の減少量が Δ で示されている。一様に明るい主星のディスクについて、 Δ と惑星半径 R_p と主星半径 R_s との間には

$$\left(\frac{R_p}{R_s} \right)^2 = \Delta,$$

という関係がある。

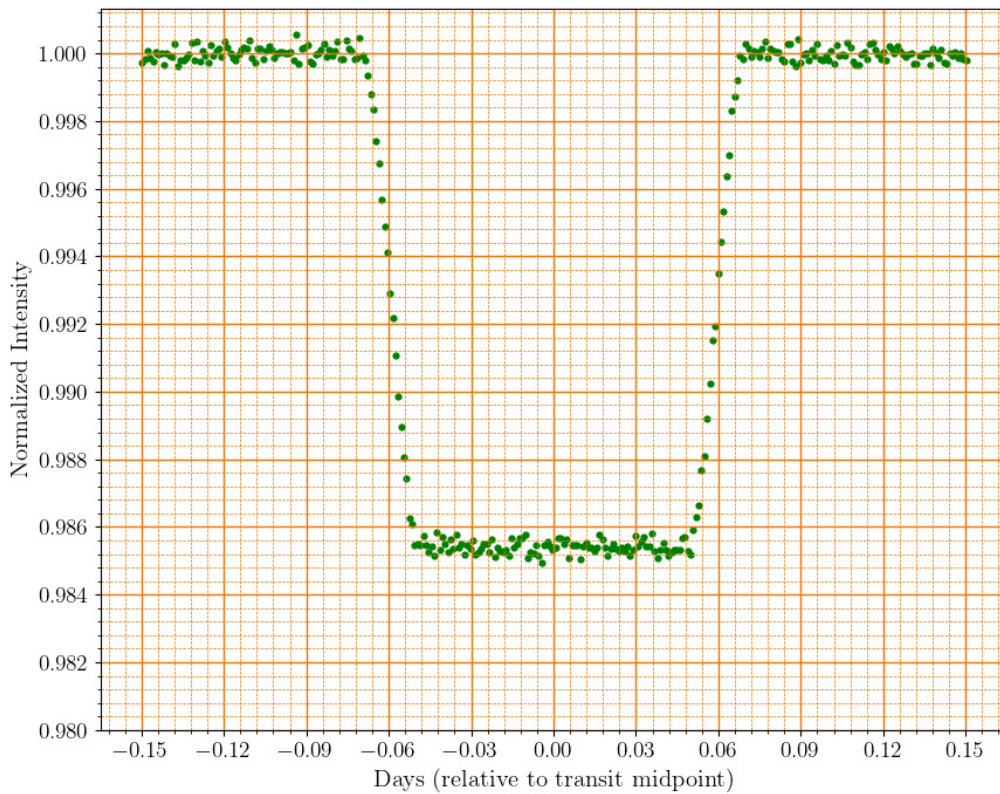
左側の図において、 t_T はトランジット全体の長さ（惑星の一部または全体が主星の前面に位置している時間の長さ）であり、さらに t_F は惑星全体が主星の前面に位置している時間の長さである。さらに、右図の b は、トランジットの中心時刻における惑星を主星の位置に射影したときの主星中心と惑星との距離を、 R_s として表したパラメータであり、これをここでの「衝突径数 (Impact Parameter)」と呼ぶ。

エッジオンの（つまり、惑星の公転面の法線が視線方向に直交している）惑星系において、衝突径数 b は以下の式で求めることができる：

$$b = \left[\frac{(1 - \sqrt{\Delta})^2 - (t_F/t_T)^2(1 + \sqrt{\Delta})^2}{1 - (t_F/t_T)^2} \right]^{1/2}$$

- (D01.3) SP系において、恒星の半径は $R_s = 1.20R_\odot$ であることがわかっており、惑星のトランジットは実際に観測可能である。(D01.2d)で求めた最小軌道半径 $a_{\min}$ を代入することによって、傾斜角の最小値 $i_{\min}$ を求めよ。 [3]

以下の図は、恒星のディスクが均一な明るさであると仮定したときの、トランジットの光度曲線を示している。



- (D01.4) 与えられた光度曲線を用いて、以下の問いに答えよ。同じ光度曲線は回答紙 (Summary Answersheet) にも記載されているため、値を読み取る際に用いよ。

- (D01.4a) グラフから t_T と t_F の値を日を単位として推定せよ。推定に必要な読み取った値をグラフに書き込むこと。 [3]

(D01.4b) グラフから Δ の平均値を推定し、それを用いて R_p の値を $R_\odot$ を単位として [2]
計算せよ。

(D01.4c) 軌道長半径として $a_{\min}$ を用いることで、傾斜角 i を度 [$^\circ$] を単位として求め [2]
よ。

周縁減光に関するイントロダクション

ここまで、主星のディスクの放射強度が一様であることを仮定してきた。しかし実際には「周縁減光」効果のために観測される恒星のディスクの放射強度は一様ではない。これは、恒星の中でもディスクの端（「周縁」）より中心付近の方が明るくなる光学的効果である。

周縁減光の計測には、恒星のディスクの各点で定義される相対放射強度 $J(\theta) \equiv \frac{I(\theta)}{I(0)}$ が用いられる。ここで θ は恒星上のその点での表面の法線と視線方向がなす角度、 $I(\theta)$ はその点からの光が観測される放射強度、 $I(0)$ は $\theta = 0$ の（つまりディスクの中心での）放射強度である。十分遠い観測者の場合、 θ は $\theta = 0$ (ディスクの中心) から $\theta \simeq 90^\circ$ (ディスクの周縁) までの値を取る。

(D01.5) 以下の表は、太陽で或る決まった波長で観測された相対放射強度 $J(\theta)$ を示している。ここで、この相対放射強度の分布は恒星 S に対しても同様であると仮定しよう。

θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$
0°	1.000	20°	0.971	40°	0.883	70°	0.595
10°	0.994	25°	0.950	50°	0.794	80°	0.475
15°	0.984	30°	0.943	60°	0.724	90°	0.312

ここで、周縁減光を伴った相対放射強度の分布を、

$$J(\theta) = 1 - a_1(1 - \cos \theta) - a_2(1 - \cos \theta)^2,$$

と2次関数で表すことにする。ただし a_1 と a_2 は定数である。

表に与えられたデータから、適切な軸を取ったグラフを描くことによって未知の定数 a_1, a_2 を決定しよう。

(D01.5a) 与えられた $J(\theta)$ の表式の定数 a_1, a_2 を決定する上で、データをプロットする際のグラフの両軸に取るべき変数のペア (x_1, y_1) を θ と J の関数として選ぶことにする。 $x_1(J, \theta)$ と $y_1(J, \theta)$ の表式を求めよ。結果として、 y_1 が未定定数と x_1 のみを含む一次関数として表せるようにすること。

ただし、もし必要である場合には (x_2, y_2) のように新しい変数を定義しても構わない。

(D01.5b) プロットに必要な変数の値を計算し、回答用紙の表に書き込め。 [4]

(D01.5c) 前に定義した変数をグラフにプロットせよ。このグラフには「D01.5c」と名前をつけること。 [7]

(D01.5d) プロットから、定数 a_1, a_2 の値を決定せよ。なお、不確かさは必要無い。 [7]

トランジット法（周縁減光がある場合）

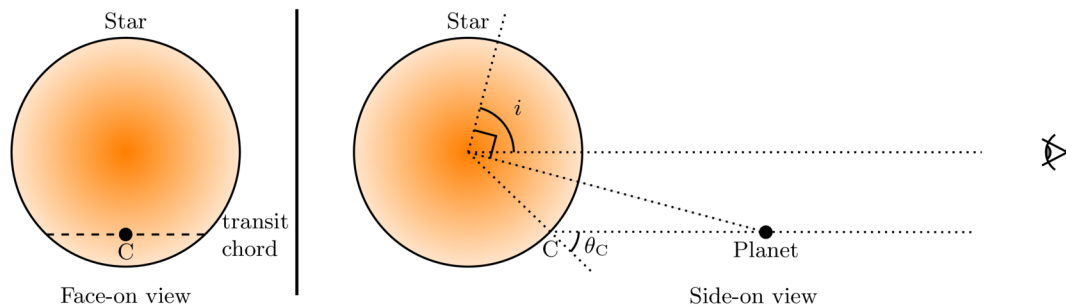
さて、ここでは周縁減光がある主星のディスクを惑星が通過（トランジット）する場合を考えよう。周縁減光がある主星のディスクの相対放射強度 $J(\theta)$ の分布は前述した表式で与えられるものとする、この場合のディスク全体で平均した（つまり、トランジットがない期間の）放射強度は

$$\langle I \rangle = \left(1 - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{6} \right) I(0)$$

と与えられる。

このとき、主星のトランジットの深さ（放射強度の減少量）は、惑星と主星の半径比 $\left(\frac{R_p}{R_s} \right)$ だけではなく、トランジット中に惑星が弦(transit chord)を通過する際に隠される部分の放射強度分布にも左右され、これはすなわち軌道傾斜角 i にも依存することを意味する。

下の図は、トランジット時の位置関係を示した図である（縮尺は正確ではない）。主星のうち明るい部分が濃く表現されており、惑星は黒い点で示されている。



このとき、最大のトランジット深さ Δ は、惑星と主星の半径比 $\left(\frac{R_p}{R_s} \right)$ と

$$\Delta = \frac{I(\theta_C)}{\langle I \rangle} \left(\frac{R_p}{R_s} \right)^2,$$

のように関係し、ここで $I(\theta_C)$ はトランジット中心時刻での惑星の位置における主星のディスクの放射強度であり、 θ_C はその光が放射された主星表面における法線と視線方向がなす角度である（場所Cについては上図も見よ）。この式から、同じ主星に対しても、観測されるトランジット深さ Δ に対応する R_p と軌道傾斜角 i の組み合わせが無数に存在することがわかる。

- (D01.6) 観測結果から R_p と i の両方を同時に決定するためには、異なる2つの波長（ここでは青い光 λ_B (blue) と赤い光 λ_R とする）を用いることが考えられる。これら2つの波長における、周縁減光に関する定数は以下のように与えられる：

波長	a_1	a_2
λ_B	0.82	0.05
λ_R	0.24	0.20

- (D01.6a) ここでは特に λ_B で観測した場合を考える。最大のトランジット深さ Δ と軌道傾斜角 (i の関係についての記述として正しいものを、以下の3つの選択肢から一つ選び回答用紙 (Summary Answersheet) の当てはまる欄にチェック (✓) して示せ。 [2]
- A. i が小さくなるとともに Δ は大きくなる。
 B. i が小さくなるとともに Δ は小さくなる。
 C. Δ は i に依存しない。
- (D01.6b) SP系で観測された最大のトランジット深さ Δ は波長 λ_B と λ_R において、それぞれ 0.0182 と 0.0159 であった。 [4]
- このことをもとに、波長 λ_B と λ_R のそれぞれについて、トランジットを通じた光度曲線を与えられたグリッド線の中に描き、それぞれに「B」「R」と書き入れよ。ただし、トランジット全体の長さが2つの波長で等しくなるように描け。光度曲線の縮尺が正確である必要はないが、その概形はできるだけ正しい必要がある。
- (D01.7) ここでは、波長 λ_B および λ_R それぞれにおける Δ の観測に基づいて、グラフ上に条件を満たす2曲線をプロットすることによってSP系の R_p と i の値を決定しよう。
- (D01.7a) プロットする変数に関する適切な関係式を導出せよ。 [6]
 (ヒント: i (あるいは b) と R_p との関係式を考えてみよう。)
- (D01.7b) 回答用紙 (Summary Answersheet) の表に、プロットするための値を計算して書き入れよ。それぞれの列に対応する量も明らかにすること。 [5]
- (D01.7c) 適切な軸を取ってグラフをプロットせよ。グラフには「D01.7c」と名前をつけること。 [7]
- (D01.7d) グラフから R_p (単位: $R_\odot$) と i (単位: 度) の値を決定せよ。 [4]
- (D01.8) この問題でのここまでの結果をもとにすると、惑星 P は岩石惑星 (“ROCKY”) かガス惑星 (“GASEOUS”) のどちらと推測されるか。回答用紙 (Summary Answersheet) の当てはまる欄にチェック (✓) して答えよ。 [2]

(D02) コロナ質量放出の地球到達時間の予測

[60点]

太陽は時折、プラズマのガスの塊を磁力線とともに放出し、これはコロナ質量放出（CME）と呼ばれる。CMEは太陽の表面で発生し外向きに伝搬する。CMEが地球に到達する時間を正確に予測することは、地球を周回する衛星が通信遮断や故障する可能性を理解して影響を軽減するために重要である。この問題では、10個のCMEのデータを使用して経験的モデルを作り、CMEの到達時間を予測することを目指す。この問題全体を通して、太陽の表面と地球の間の距離は $214 R_{\odot}$ とする。

ここでは、太陽が自転していないと仮定する。電磁気力・重力・抗力の影響により、CMEは伝播中に時間変化する加速度を受ける。以降の2問 (D02.1), (D02.2) では特に太陽と地球の間の領域が真空であると仮定する。

真空中のCME

(D02.1) 以下の表に示される10回のCMEについて、太陽表面での初速度 u 、地球に到達したときの最終速度 v 、および太陽の表面を離れてから地球に到達するまでにかかった時間（単位：時間） τ が与えられている。

CME	u	v	τ
名前	(km s^{-1})	(km s^{-1})	(h)
CME-A	804	470	74.5
CME-B	247	360	127.5
CME-C	523	396	103.5
CME-D	830	415	71.0
CME-E	665	400	104.5
CME-F	347	350	101.5
CME-G	446	375	99.5
CME-H	155	360	97.0
CME-I	1016	515	67.0
CME-J	683	410	54.0

(D02.1a) 各CMEの平均加速度 a を計算し、 m s^{-2} を単位として表に書き込め。

[6]

(D02.1b) CMEの加速度 a_{model} に対して、初速度 u に依存する経験式：

$$a_{\text{model}} = m \left(\frac{u}{u_0} \right) + \alpha;$$

を仮定する。ここで $u_0 = 1.00 \times 10^3 \text{ km s}^{-1}$ であり、 a_{model} は m s^{-2} を単位として、 u は km s^{-1} を単位として表すこととする。

方眼紙を大きく用いて適切なグラフをプロットし、経験式の定数 m と α を誤差範囲も合わせて求めよ。このグラフには「D02.1b」と名前をつけること。 [12]

- (D02.1c) 前問の結果を用いて、各CMEの a_{model} を計算し、 m s^{-2} を単位として表に記入せよ。さらに、ここで計算した a_{model} と以前に求めた平均加速度 a について、二乗平均誤差の平方根

$$\delta a_{\text{rms}} \equiv \sqrt{(a_{\text{model}} - a)^2} \text{ を計算しなさい。}$$

- (D02.2) ここでは、2回の別のCME：CME-1とCME-2を考える。初速度はそれぞれ $u = 1044 \text{ km s}^{-1}, 273 \text{ km s}^{-1}$ である。

- (D02.2a) (D02.1b)で得られた経験式を使用して、CME-1とCME-2の地球到達予測時間 $\tau_{1, \text{m}}$ および $\tau_{2, \text{m}}$ を時間 [h] を単位として求めよ。 [4]

- (D02.2b) 実際に観測されたCME-1とCME-2の地球到達時間はそれぞれ 46.0 時間と 74.5 時間である。経験式での予測到達時間が観測値からのずれの 20%以内におさまっている場合に、特定のCMEに対して経験式が有効 (VALID)、それ以外の場合は無効 (NOT VALID) であるとしよう。各CMEに対してこの経験式は有効であるか、適切な欄にチェックマーク(✓)を入れて示しなさい。 [2]

太陽風の存在下でのCME

実際には、太陽と地球の間の空間は太陽風で満たされており、これはCMEに抗力を及ぼす。この抗力はCMEの速度と太陽風の速度の大小関係によってCMEを減速させたり加速させたりする。太陽風の影響を考慮するために、ここでは太陽表面からの距離が $R_{\text{obs}}(t) \geq R_0$ となる領域において「drag-only (引きずりのみ)」モデルを仮定する。ここで、 R_0 はそれ以遠においてCMEの運動が太陽風による抗力のみに影響されるようになる距離である。

「drag-only」モデルにおいて、太陽表面からの距離 $R_D(t)$ とCMEの速度 $V_D(t)$ はそれぞれ以下のように表される：

$$R_D(t) = \frac{S}{\gamma} \ln [1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)] + V_s(t - t_0) + R_0$$

$$V_D(t) = \frac{V_0 - V_s}{1 + S\gamma(V_0 - V_s)(t - t_0)} + V_s$$

ここで、 $\gamma = 2 \times 10^{-8} \text{ km}^{-1}$ 、 V_s は太陽風の速度であり、 t_0 、 V_0 はそれぞれ、抗力が支配的になる距離 R_0 をCMEが通過する時刻と速度である。 S は符号因子であり、 $V_0 > V_s$ である場合には $S = 1$ 、 $V_0 \leq V_s$ の場合には $S = -1$ の値を取る。

- (D02.3) 以下の表は、2回のCME：CME-3とCME-4について、異なる時間に観測された太陽半径からの距離 $R_{\text{obs}}(t)$ (単位： $R_\odot$) を示している。各表の最後のデータポイント (それぞれ D5とP8) は、それぞれのCMEが地球に到達した時刻に対応する。以降この問題(D02.3)では、 $V_s = 330 \text{ km s}^{-1}$ と仮定する。

CME-3		
データポイント	t (時間)	$R_{\text{obs}}(t)$ ($R_{\odot}$ で)
D1	0.200	6.36
D2	0.480	7.99
D3	1.22	11.99
D4	1.49	13.51
D5	58.05	214

CME-4		
データポイント	t (時間)	$R_{\text{obs}}(t)$ ($R_{\odot}$ で)
P1	1.00	4.00
P2	3.00	6.00
P3	4.00	9.00
P4	5.00	11.0
P5	21.0	43.0
P6	50.0	100
P7	85.0	170
P8	111	214

これらのCMEの到達時刻を、「drag-only」モデルが満足に予測するかどうかを評価しよう。そのためには、適切な t_0 と、それに対応する R_0 および V_0 を選択する必要がある。

- (D02.3a) CME-3について、次の2つの場合を考える：
 (C1) t_0 として D1 と D2 の中点を用いる場合
 (C2) t_0 として D3 と D4 の中点を用いる場合
 さらに、それぞれの区間 D1–D2 および D3–D4 で速度は一定と仮定であると仮定する。

t_0 、 R_0 、および V_0 を使用して、 $t = 58.05$ h における観測値とモデルによる予測値の差 $\delta R_D \equiv R_{\text{obs}}(t) - R_D(t)$ を $R_{\odot}$ を単位として求めよ。

- (D02.3b) CME-4について、前問と同様の仮定のもとに、P5, P6, P7, P8 の各時刻における $R_D(t)$ を次の2つの場合それぞれについて計算せよ： [4]

- (C3) t_0 として P1 と P2 の中点を用いる場合
 (C4) t_0 として P3 と P4 の中点を用いる場合

- (D02.3c) CME-4について、前問の仮定C3, C4のそれぞれの場合について、P5, P6, P7, P8の各点での t (単位：[h]) vs. $R_D(t)$ (単位：[$R_{\odot}$]) を方眼紙を大きく使ってプロットせよ。ただし、 x 軸の範囲は0 h から 180 h までとし、方眼紙には「D02.3c」と名前をつけること。さらに、プロットした点を滑らかに繋ぐことで $R_D(t)$ のグラフを描け。 [10]

- (D02.3d) CME-4に関する仮定C3, C4のそれぞれの場合について、グラフを用いることによって、実際の地球到着時刻と「drag-only」モデルによって予測された到着時刻の差の値の絶対値 $|\delta\tau|$ を求めよ。 [4]

(D02.3e) 次の文が正しい (TRUE) か誤っている (FALSE) かを、回答用紙 (Summary Answersheet) の適切な欄にチェックマーク (✓) を付けて示しなさい (説明は不要) : [1]
「CMEの運動において太陽風による抗力が支配的になり始める時間は、CME-4よりもCME-3の方が早い」

(D02.4) (D02.1)の10個のCMEについて、太陽風による抗力が常に支配的であることを仮定する。すなわち、「drag-only」モデルを太陽表面から地球までの全区間に適用する。 [7]

各CMEに対する太陽風速度 V_s を km s^{-1} で推定し、表に記入せよ。さらに、10個のCMEすべての平均をとって、平均太陽風速度 $V_{s, \text{avg}}$ を推定せよ。