(D01) 30 Años de Exoplanetas [90 puntos]

Este problema explora algunos aspectos de los dos métodos principales de detección de exoplanetas: velocidad radial y tránsito. A lo largo de este problema consideraremos un sistema particular de un único planeta (P) en una órbita circular con radio a alrededor de una estrella tipo solar (S). Nos referiremos a este sistema como el "sistema SP".

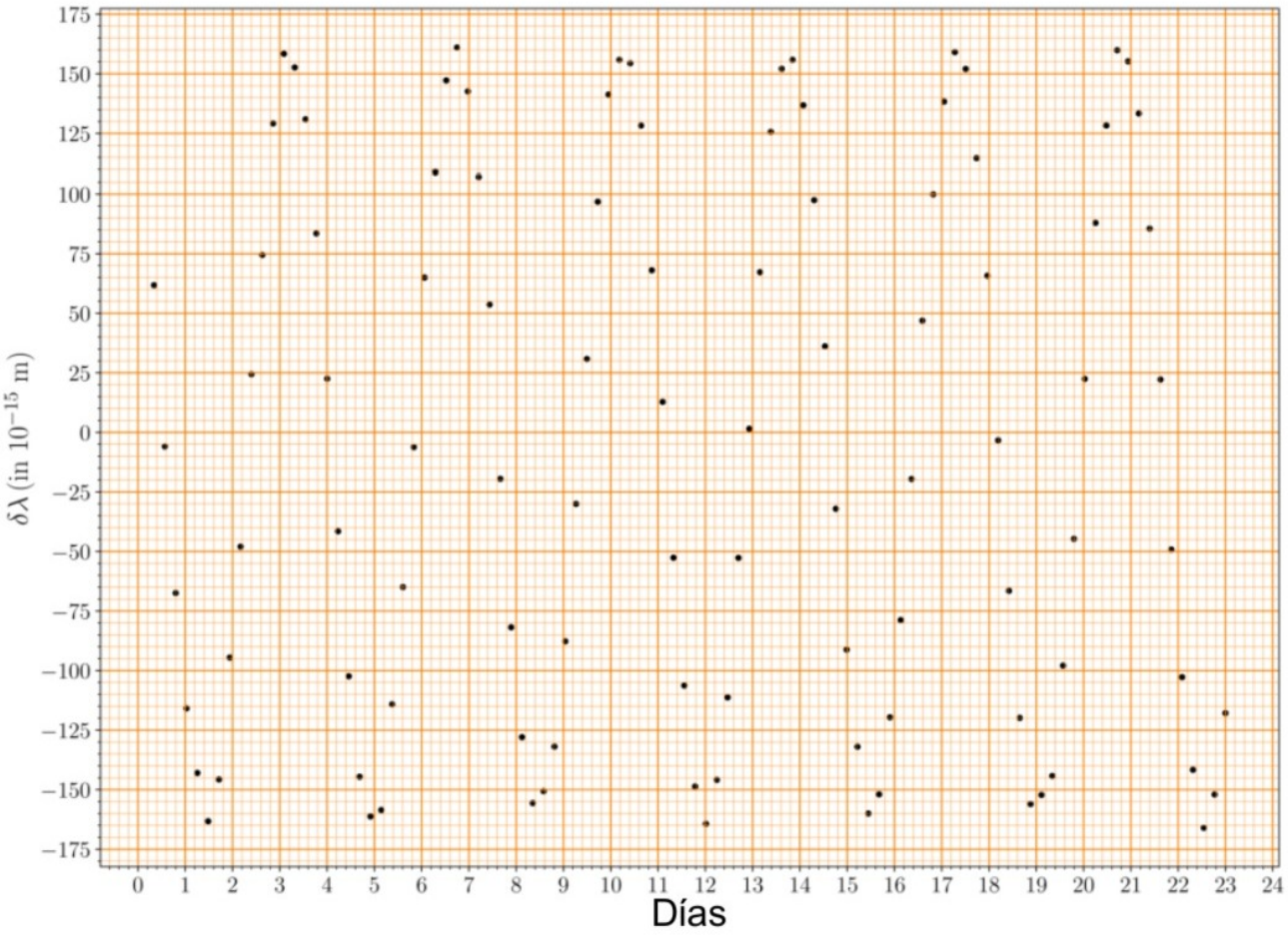
(D01.1) La magnitud aparente en la banda V de la estrella S es 7,65 ± 0,03 mag., el paralaje es 20,67 ± 0,05 milisegundos de arco y la corrección bolométrica (BC) es −0,0650 mag. Es decir que la estrella tiene una magnitud bolométrica más brillante.

Estime la masa de la estrella, M_s (en unidades de $M_\odot$), asumiendo una relación masa-luminosidad (M–L) de la forma $L \propto M^4$. También estime la incertidumbre en M_s. Puede necesitar $\mathrm{d}\ln x/\mathrm{d}x = 1/x$. **[8]**

Método de Velocidad Radial

El método de velocidad radial utiliza el desplazamiento Doppler $\delta\lambda \equiv \lambda_{obs} - \lambda_0$ entre la longitud de onda observada λ_{obs} y la longitud de onda de reposo λ_0 de una línea espectral conocida para detectar un exoplaneta y determinar sus características.

La figura a continuación muestra el $\delta\lambda$ para la línea Fe I ($\lambda_0 = 543{,}45 \times 10^{-9}$ m) como una función del tiempo observada para el sistema SP.



La semi-amplitud de la velocidad radial K se define como $K \equiv (v_{r,\,max} - v_{r,\,min})/2$ donde $v_{r,\,max}$ y $v_{r,\,min}$ son las velocidades radiales máxima y mínima, respectivamente. Para una órbita planetaria circular, la semi-amplitud K se puede escribir como:

$$K = \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_p + M_s)^{2/3}}$$

donde T es el período, i es la inclinación de la órbita planetaria (ángulo entre la normal al plano orbital del planeta y la línea de visión del observador), M_p y M_s son las masas del planeta y de la estrella, respectivamente.

(D01.2) Utilice el gráfico anterior dado en la Hoja de Respuestas Resumida (girado 90°) para responder lo siguiente.

(D01.2a) Dibuje una curva suave que pase por los datos mostrados en el gráfico. **[2]**

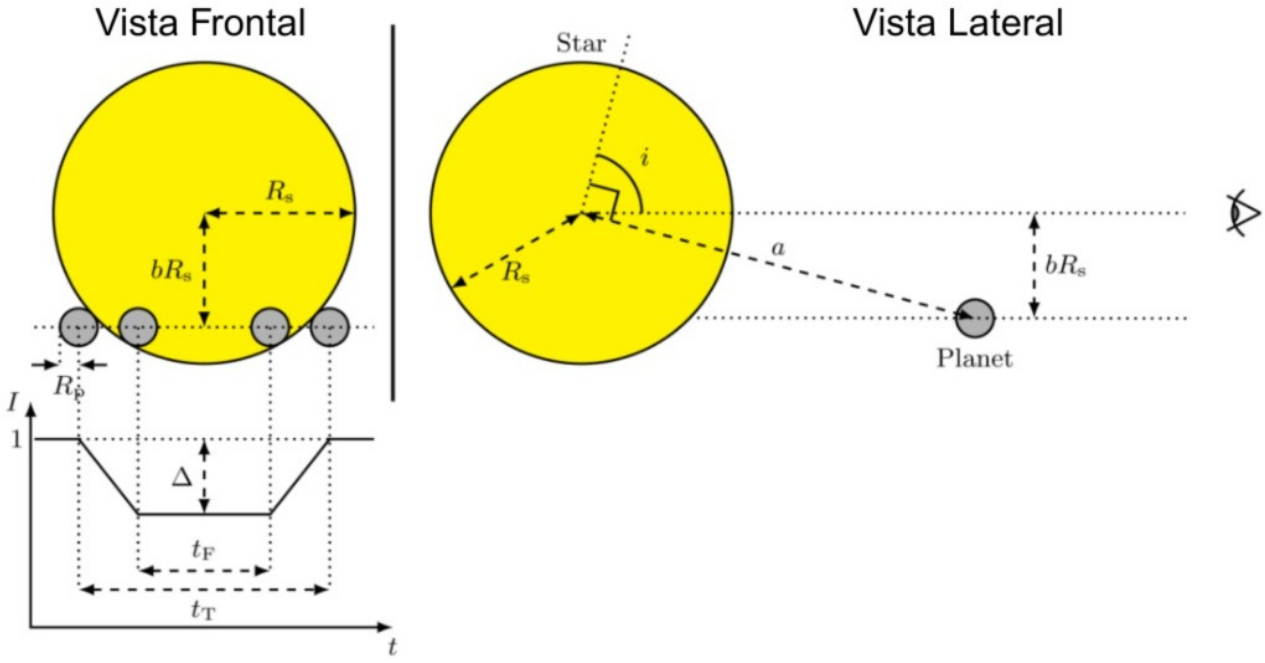
(D01.2b) Seleccione puntos apropiados en la curva dibujada y utilice métodos adecuados para determinar T y K junto con sus respectivas incertidumbres. Todos los puntos de datos utilizados para el cálculo de T y K deben mostrarse en la tabla en la Hoja de Respuestas Resumida. Use el resto de la Tabla para mostrar sus cálculos intermedios, según sea necesario, con encabezados apropiados. **[11]**

(D01.2c) Encuentre la masa mínima del planeta $M_{p,\,min}$ (en $M_\odot$), y su incertidumbre correspondiente asumiendo $M_p \ll M_s$. **[5]**

(D01.2d) Usando el valor de $M_{p,\,min}$ estimado en la parte (D01.2c), calcule el valor mínimo del semieje mayor de la órbita del planeta, a_{min}, en unidades astronómicas (au) y su incertidumbre. **[4]**

Método de tránsito (sin oscurecimiento del limbo)

El diagrama esquemático de un tránsito planetario (no dibujado a escala) se muestra a continuación. Inicialmente asumiremos que el disco estelar tiene una intensidad promedio uniforme, con algo de ruido intrínseco debido a la propia estrella.



La curva de luz de la intensidad normalizada, I, en función del tiempo t, se muestra en el diagrama esquemático del tránsito presentada arriba. La intensidad estelar promedio fuera del tránsito se toma igual a uno. La disminución máxima en la intensidad está dada por Δ en la curva de luz normalizada. Para un disco estelar de brillo uniforme, el radio del planeta, R_p, está relacionado con Δ así:

$$\left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2 = \Delta,$$

donde R_s es el radio de la estrella.

La duración total del tránsito (cuando parte o todo el planeta cubre el disco estelar) está dada por t_T, mientras que t_F nos da la duración cuando el planeta está completamente frente al disco estelar. El "parámetro de impacto", b, es la distancia

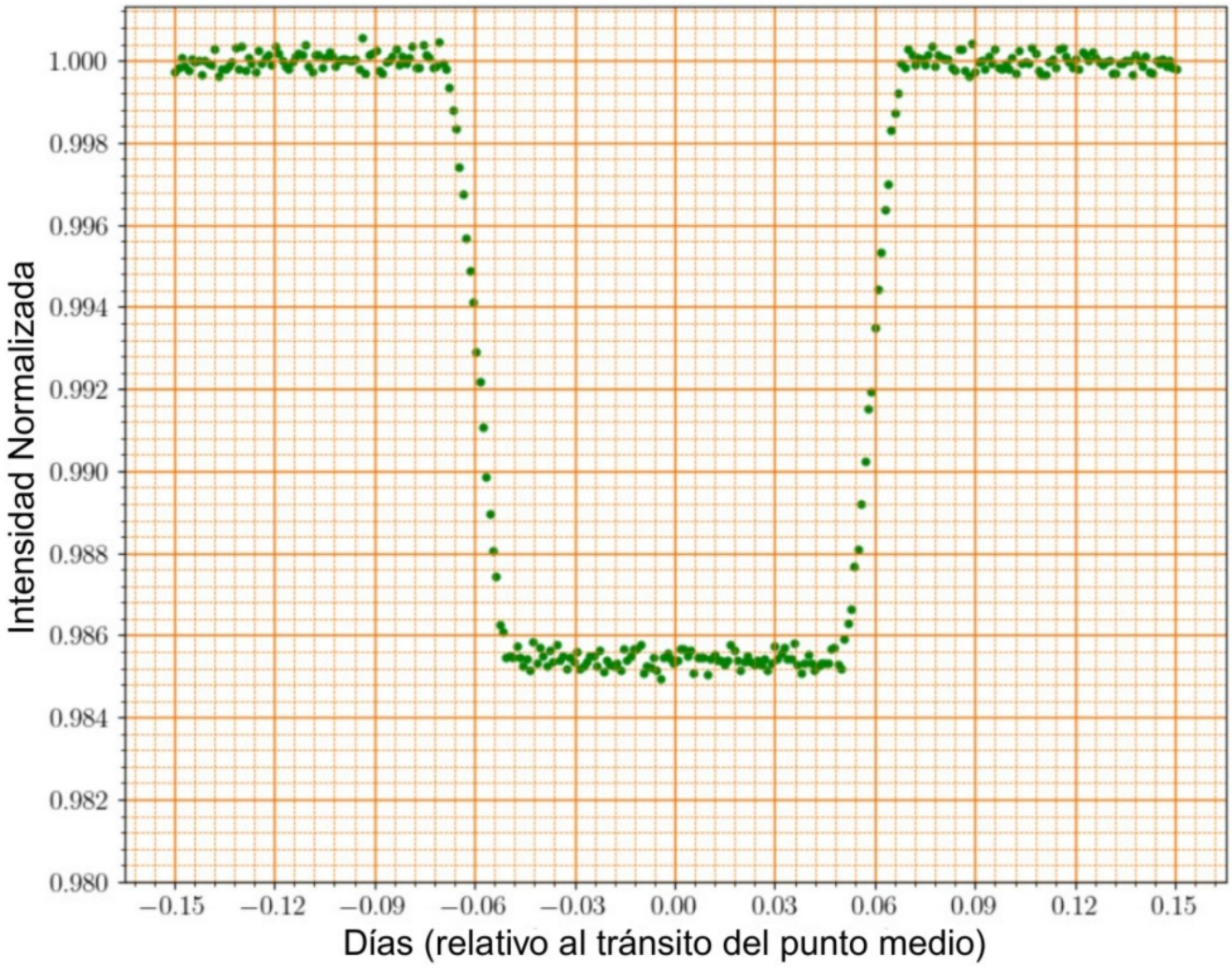
proyectada entre el planeta y el centro del disco estelar en el punto medio del tránsito, en unidades del radio estelar, R_s.

Para una órbita estrella-planeta vista casi de canto o perfil, el parámetro de impacto está dado por la fórmula

$$b = \left[\frac{(1-\sqrt{\Delta})^2 - (t_F/t_T)^2(1+\sqrt{\Delta})^2}{1-(t_F/t_T)^2} \right]^{1/2}$$

(D01.3) Para el sistema SP, se sabe que el radio estelar es $R_s = 1,20 R_\odot$, y el tránsito del planeta es visible. Usando el radio orbital mínimo, a_{min}, estimado en la parte (D01.2d), encuentre el valor mínimo, i_{min}, del ángulo de inclinación. **[3]**

Asumiendo un disco estelar de brillo uniforme, la curva de luz del tránsito se vería como se muestra a continuación.



(D01.4) Usando la curva de luz dada, responde las siguientes preguntas. Tenga en cuenta de que la curva de luz también se proporciona en la Hoja de Respuestas Resumida.

(D01.4a) Estime los valores de t_T y t_F en días, señalando las medidas apropiadas sobre el gráfico. **[3]**

(D01.4b) Estime el valor medio de Δ, señalando las medidas apropiadas sobre el gráfico y encuentre R_p en unidades de $R_\odot$. **[2]**

(D01.4c) Determine el valor de i en grados asumiendo que el radio orbital es a_{min}. **[2]**

Introducción al oscurecimiento del limbo

Hasta ahora hemos asumido que el disco estelar es uniformemente brillante. En realidad, el brillo observado del disco estelar no es uniforme debido al "oscurecimiento del limbo" — un efecto óptico donde la parte central del disco estelar aparece más brillante que el borde, o el "limbo".

El efecto de oscurecimiento del limbo se puede medir por la intensidad relativa $J(\theta) \equiv \frac{I(\theta)}{I(0)}$, donde θ es el ángulo entre la normal a la superficie estelar en un punto y la línea que une al observador con ese punto, $I(\theta)$ es la intensidad observada del disco estelar en ese punto; y $I(0)$ es la intensidad en el centro del disco estelar. Para un observador distante, θ varía de $\theta = 0$ (centro del disco) a $\theta \approx 90°$ (borde del disco).

(D01.5) La tabla a continuación muestra $J(\theta)$ medido a una cierta longitud de onda para el Sol. Asumiremos que el mismo perfil de oscurecimiento de limbo se aplica a la estrella S.

θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$
0°	1,000	20°	0,971	40°	0,883	70°	0,595
10°	0,994	25°	0,950	50°	0,794	80°	0,475
15°	0,984	30°	0,943	60°	0,724	90°	0,312

El perfil de oscurecimiento del limbo se puede modelar mediante una fórmula cuadrática:

$$J(\theta) = 1 - a_1(1 - \cos\theta) - a_2(1 - \cos\theta)^2,$$

donde a_1 y a_2 son dos constantes.

Estimaremos los coeficientes desconocidos a_1 y a_2 a partir de los datos proporcionados, haciendo un gráfico con las variables apropiadas.

(D01.5a) **[2]**

Defina un par de variables (x_1, y_1), en función de θ y J, tal que al graficarlas en el plano x - y permitan estimar a_1 y a_2. Escriba las expresiones para x_1 y y_1 que ha utilizado.

Si lo desea, puede definir variables adicionales para gráficos adicionales, nombrándolas como (x_2, y_2), etc.

(D01.5b) Tabule los valores que sean necesarios para realizar sus gráficos. **[4]**

(D01.5c) Grafique las variables definidas en el papel milimetrado proporcionado (marque su gráfico como "D01.5c"). **[7]**

(D01.5d) Obtenga a_1 y a_2 del gráfico. No se necesitan incertidumbres en los valores. **[7]**

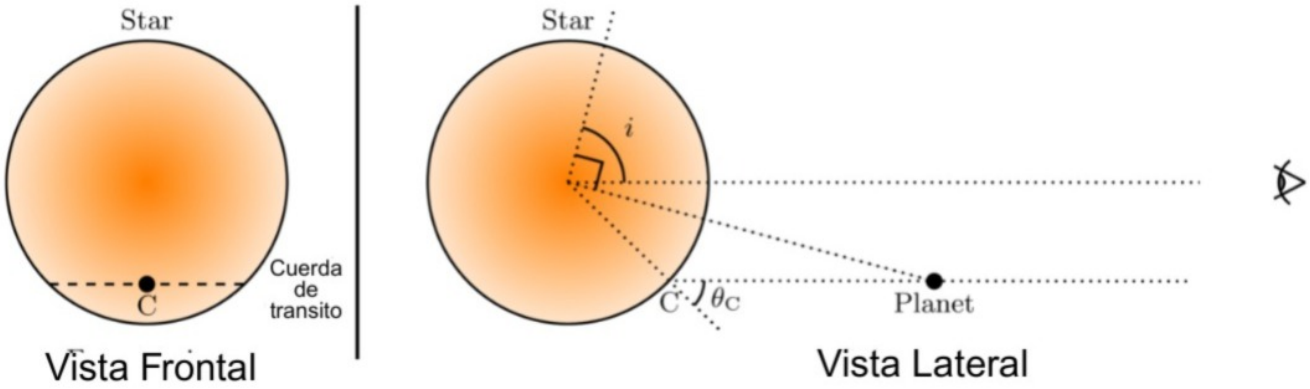
Tránsito en presencia de oscurecimiento del limbo

Ahora consideramos tránsitos planetarios a través de un disco estelar oscurecido en el limbo. En presencia de oscurecimiento de limbo, que modelaremos mediante la fórmula cuadrática de $J(\theta)$ dada anteriormente, la intensidad promedio observada de todo el disco estelar (sin ningún tránsito), $\langle I \rangle$, está dada por:

$$\langle I \rangle = \left(1 - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{6}\right) I(0)$$

Además, la caída en la luz causada por el planeta en tránsito ahora depende no solo del tamaño relativo del planeta y la estrella, $\left(\frac{R_\mathrm{p}}{R_\mathrm{s}}\right)$, sino también del perfil de intensidad del disco estelar a lo largo de la cuerda de tránsito, que a su vez, depende del ángulo de inclinación, i.

El diagrama esquemático a continuación (no dibujado a escala) muestra la configuración. Note que la parte más brillante de la estrella se muestra en un tono más oscuro, mientras que el planeta se muestra como un punto negro.



En este caso la relación entre $\left(\frac{R_p}{R_s}\right)$ y el medido Δ de la curva de luz es

$$\Delta = \frac{I(\theta_C)}{\langle I \rangle}\left(\frac{R_p}{R_s}\right)^2,$$

donde $I(\theta_C)$ es la intensidad del disco estelar en el punto medio de la cuerda de tránsito (punto C en la figura anterior), y θ_C es el ángulo entre la línea de visión y la normal a la superficie en ese punto. De lo anterior, es obvio que para una estrella dada, el mismo valor de Δ puede ser producido por muchas combinaciones del tamaño del planeta, R_p, y el ángulo de inclinación i.

(D01.6) Es posible determinar de manera única tanto R_p como i utilizando datos de curvas de luz de tránsito en dos longitudes de onda, digamos, λ_B (azul) y λ_R (rojo). Los coeficientes de oscurecimiento del limbo para estas dos longitudes de onda se dan a continuación:

Longitud de onda	a_1	a_2
λ_B	0,82	0,05
λ_R	0,24	0,20

(D01.6a) Entre las siguientes afirmaciones, elija la que describe correctamente la relación entre la profundidad máxima del tránsito Δ para λ_B, y el ángulo de inclinación (i) de la órbita, y márquela (✔) en la Hoja de Respuestas Resumida. **[2]**

A. Δ aumenta al disminuir i.
B. Δ decrece al disminuir i.
C. Δ es independiente de i.

(D01.6b) La profundidad máxima del tránsito (Δ) para el "sistema SP" se midió en 0,0182 y 0,0159 para λ_B y λ_R, respectivamente. **[4]**

Esquematice las curvas de luz del tránsito tanto para λ_B como para λ_R en el espacio designado en la Hoja de Respuestas, y etiquete las curvas como “B” y “R”, respectivamente. Suponga que la duración total del tránsito es la misma para ambas longitudes de onda. El gráfico no necesita estar a escala, pero debe representar correctamente las formas de las curvas de luz.

(D01.7) Utilice un método gráfico para encontrar los valores de R_p e i para el sistema SP, usando las mediciones de Δ para λ_B y λ_R.

(D01.7a) Escriba una expresión apropiada, conectando las variables relevantes que se van a graficar. (Sugerencia: Puedes considerar i o b, y R_p, entre las variables relevantes.) **[6]**

(D01.7b) Tabule las cantidades apropiadas que se van a graficar. **[5]**

(D01.7c) Dibuje un gráfico adecuado y márquelo como "D01.7c". **[7]**

(D01.7d) Estime los valores de: R_{p} (en $\mathrm{R}_{\odot}$); i (en grados), a partir del gráfico. **[4]**

(D01.8) Basado en los resultados obtenidos en este problema, indique si el planeta P es "ROCOSO" o "GASEOSO" marcando (✓) la casilla correspondiente en la Hoja de Respuestas Resumida. **[2]**

(D02) Predicción de los tiempos de llegada de las eyecciones de masa coronal a la Tierra [60 puntos]

El Sol libera ocasionalmente plasma magnetizado, denominado eyecciones de masa coronal (CME, en inglés), que se origina en la superficie del Sol y se propaga hacia el exterior. La predicción precisa de sus tiempos de llegada a la Tierra es crucial para comprender y mitigar sus efectos potenciales sobre los satélites que orbitan la Tierra. En este problema, pretendemos predecir los tiempos de llegada de las CMEs mediante el desarrollo de un modelo empírico, utilizando los datos de 10 CMEs. A lo largo de este problema, la distancia entre la superficie del Sol y la Tierra se toma como $214 R_\odot$.

Además, supongamos que el Sol no rota. Debido a las fuerzas electromagnéticas, gravitatorias y de arrastre (drag forces), las CME experimentan una aceleración variable a lo largo de su propagación. En las dos primeras partes de este problema , suponemos que la región entre el Sol y la Tierra es vacío.

CME a través del vacío.

(D02.1) La velocidad inicial, u, en la superficie solar ($= 1 R_\odot$), la velocidad final, v, al alcanzar la Tierra, y el tiempo en llegar a la Tierra después de dejar la superficie del Sol (en horas), τ, se dan para 10 CMEs en la siguiente tabla.

CME	u	v	τ
Nombre	(km $^{s-1}$)	(km $^{s-1}$)	(h)
CME-A	804	470	74.5
CME-B	247	360	127.5
CME-C	523	396	103.5
CME-D	830	415	71.0
CME-E	665	400	104.5
CME-F	347	350	101.5
CME-G	446	375	99.5
CME-H	155	360	97.0
CME-I	1016	515	67.0
CME-J	683	410	54.0

(D02.1a) Calcula la aceleración media, a, para cada CME en m $^{s-2}$. **[3]**

(D02.1b) Asumimos un modelo empírico para la aceleración, a_{model}, de una CME, que depende de su velocidad inicial u como, $a_{\text{model}} = m\left(\frac{u}{u_0}\right) + \alpha$; donde, a_{model} se expresa en m $^{s-2}$, u se expresa en km $^{s-1}$ y $u_0 = 1.00 \times 10^3$ km $^{s-1}$.

Determine las constantes m y α y sus incertidumbres asociadas utilizando un gráfico apropiado (marque su gráfico como "D02.1b"). **[15]**

(D02.1c) Para cada CME, tabule a_{model} en m $^{s-2}$. A continuación, calcule la desviación cuadrática media (rms) de las aceleraciones, δa_{rms}, entre la aceleración calculada, a, y los valores del modelo, a_{model}. **[4]**

(D02.2) Consideramos otras dos CMEs: CME-1 y CME-2, con velocidades iniciales, $u = 1044$ km $^{s-1}$ y 273 km $^{s-1}$, respectivamente.

(D02.2a) Utilizando el modelo empírico obtenido en (D02.1b), calcule los tiempos previstos de llegada a la Tierra, $\tau_{1,\text{m}}$ y $\tau_{2,\text{m}}$ (en horas), para la CME-1 y la CME-2, respectivamente. **[4]**

(D02.2b) Los tiempos observados de llegada a la Tierra de la CME-1 y la CME-2 son 46,0 h y 74,5 h, respectivamente. Se considera que el modelo empírico es VÁLIDO para una determinada CME si su tiempo de llegada predicho está dentro del 20% de su tiempo de llegada observado; en caso contrario, NO ES VÁLIDO. Indique la validez del modelo para cada CME marcando (✓) la casilla correspondiente en la Hoja Resumen de Respuestas. **[2]**

Las eyecciones de masa coronal (CME, por sus siglas en inglés) en presencia del viento solar

En realidad, el espacio entre el Sol y la Tierra está impregnado de viento solar, que ejerce una fuerza de arrastre sobre las CME. Esta fuerza de arrastre puede desacelerar o acelerar una CME, dependiendo de la velocidad de la CME con respecto a la del viento solar. Para tener en cuenta la influencia del viento solar, usaremos un modelo de "sólo arrastre" para distancias $R_{\rm obs}(t) \geq R_0$, donde R_0 es la distancia a partir de la cual la fuerza de arrastre se convierte en la fuerza dominante que afecta al movimiento de la CME.

La distancia desde la superficie del Sol determinada a partir del modelo de "sólo arrastre", $R_{\rm D}(t)$, y la velocidad, $V_{\rm D}(t)$, de una CME en este modelo viene dada por

$$R_{\rm D}(t) = \frac{S}{\gamma}\ln\left[1 + S\gamma(V_0 - V_{\rm s})(t - t_0)\right] + V_{\rm s}(t - t_0) + R_0$$

$$V_{\rm D}(t) = \frac{V_0 - V_{\rm s}}{1 + S\gamma(V_0 - V_{\rm s})(t - t_0)} + V_{\rm s}$$

donde, $\gamma = 2 \times 10^{-8}$ km^{-1}, $V_{\rm s}$ es la velocidad constante del viento solar, R_0 y V_0 son la distancia y la velocidad, respectivamente, en el tiempo t_0, y S es el factor de signo. $S = 1$ si $V_0 > V_{\rm s}$; $S = -1$ si $V_0 \leq V_{\rm s}$.

(D02.3) Las tablas siguientes muestran la distancia radial observada desde la superficie del Sol, $R_{\rm obs}(t)$ (medida en $R_\odot$) , en función del tiempo , t (en horas), para dos CMEs: CME-3 y CME-4. El último dato de cada tabla (D5 y P8, respectivamente) corresponde a la hora de llegada de la respectiva CME a la Tierra. Para esta parte, supongamos $V_{\rm s} = 330$ km s^{-1}.

CME-3		
Punto de datos	t (en h)	$R_{\rm obs}(t)$ (en $R_\odot$)
D1	0.200	6.36
D2	0.480	7.99
D3	1.22	11.99
D4	1.49	13.51
D5	58.05	214

CME-4		
Punto de datos	t (en h)	$R_{\rm obs}(t)$ (en $R_\odot$)
P1	1.00	4.00
P2	3.00	6.00
P3	4.00	9.00
P4	5.00	11.0
P5	21.0	43.0
P6	50.0	100
P7	85.0	170
P8	111	214

Evaluaremos si el modelo de "drag-only" (solo arrastre) predice satisfactoriamente los tiempos de llegada de estas CMEs. Para utilizar este modelo es necesario elegir adecuadamente t_0 y los correspondientes R_0 y V_0.

(D02.3a) Para CME-3, tome los dos casos siguientes: **[6]**
(C1) t_0 se toma como el punto medio del intervalo D1 - D2
(C2) t_0 se toma como el punto medio del intervalo D3 - D4
Suponga que la velocidad permanece constante en cada intervalo específico D1-D2 y D3-D4, pero puede diferir entre los dos intervalos.

Utilizando t_0, R_0, and V_0, calcule la diferencia entre la distancia radial observada y la predicha $\delta R_{\rm D} \equiv R_{\rm obs}(t) - R_{\rm D}(t)$ en unidades de $R_\odot$ a $t = 58{,}05$ h, para cada uno de los dos casos.

(D02.3b) Evalúe $R_{\rm D}(t)$ en los puntos, P5, P6, P7, y P8 entre el Sol y la Tierra para la CME-4 para los dos casos siguientes adoptando el procedimiento similar a (D02.3a): **[4]**

(C3) t_0 se toma como el punto medio del intervalo P1 - P2
(C4) t_0 se toma como el punto medio del intervalo P3 - P4.

(D02.3c) Represente gráficamente $R_{\mathrm{D}}(t)$ (en $\mathrm{R}_{\odot}$) frente a t (en horas) para los dos casos, C3 y C4, para CME-4 en los puntos, P5, P6, P7 y P8 (marque su gráfica como "D02.3c"). En el mismo gráfico, dibuje curvas suaves de $R_{\mathrm{D}}(t)$ para los dos casos mencionados. Para esta parte, tome el rango del eje x de 0 a 180 hr. **[10]**

(D02.3d) Usando el gráfico, estima la diferencia absoluta, $|\delta\tau|$ entre el tiempo real de llegada de la CME-4 a la Tierra y su tiempo de llegada predicho por el modelo de sólo arrastre, para cada uno de los casos C3 y C4. **[4]**

(D02.3e) Indique si la siguiente afirmación es VERDADERA o FALSA marcando (✓) la casilla correspondiente en la Hoja Resumen de Respuestas (no necesita justificación escrita): **[1]**
"Las fuerzas de arrastre (drag forces) ejercidas por el viento solar sobre las CMEs se vuelven dominantes para la CME-3 en un momento anterior en comparación con la CME-4".

(D02.4) Considere el arrastre (drag) como la fuerza dominante que actúa sobre 10 CMEs en la parte D02.1. Asuma que el modelo de "drag-only" (sólo arrastre) es aplicable desde la superficie del Sol ($R_0 = 1\ \mathrm{R}_{\odot}$) y más allá, para todas las CMEs. **[7]**
Estimar y tabular la velocidad del viento solar V_{s} en km $^{\mathrm{s-1}}$ para cada CME. Además, estima la velocidad media del viento solar $V_{\mathrm{s,\,avg}}$ para las 10 CMEs.