数据分析试题

(D01) 系外行星探测的 30 年 [90 分]

本大题探讨了系外行星探测的两种主要方法：径向速度法和凌星法。在整道大题中，我们将考虑一个特定的系统，其中单颗行星（P）在半径为 a 的圆轨道上围绕一颗类太阳恒星（S）运行。我们将此系统称为“SP系统”。

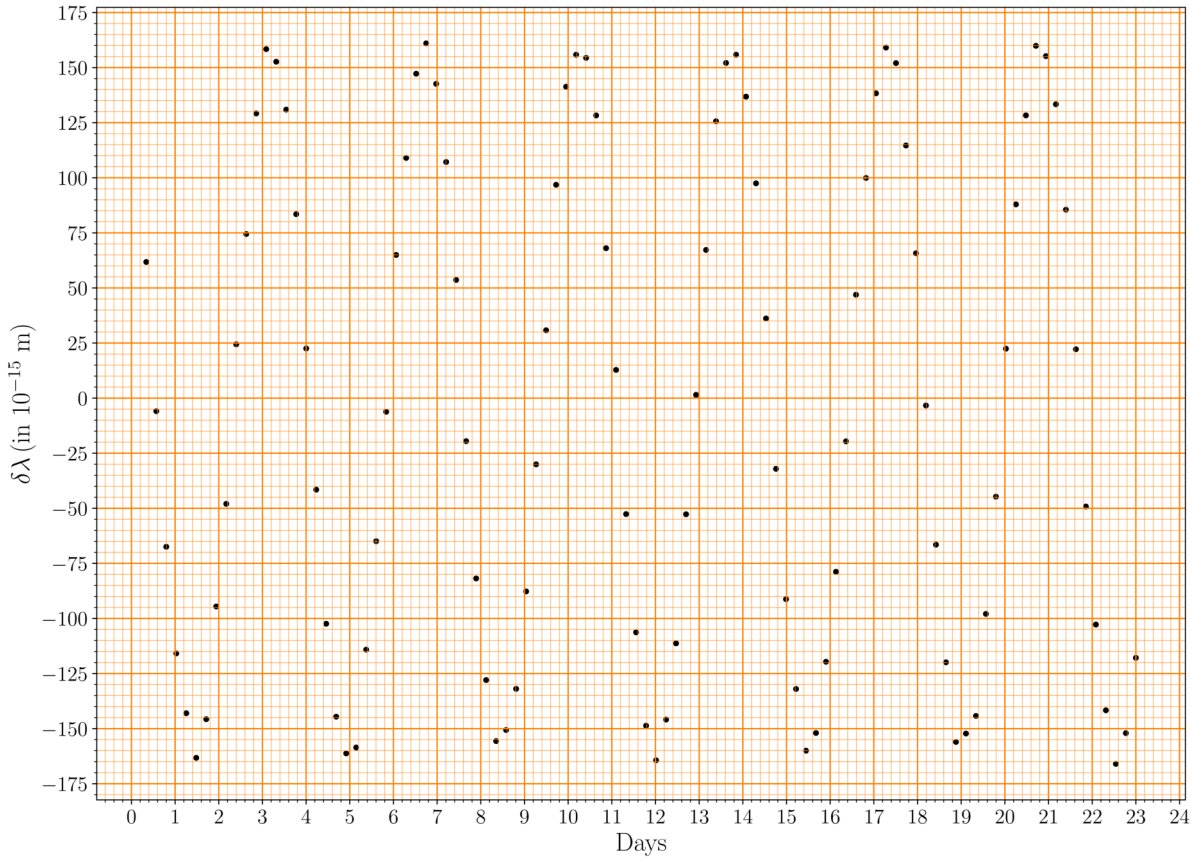
(D01.1) 恒星 S 的 V 波段视星等为 7.65 ± 0.03 mag，视差为 20.67 ± 0.05 毫角秒，热改正（bolometric correction）为 −0.065 mag。因此，该恒星的热光度（bolometric luminosity）比 V 波段光度更高。

假设恒星的质量-光度（M–L）关系为 $L \propto M^4$ 的形式，试估算恒星的质量 M_s 及其不确定性，以 $\mathrm{M}_\odot$ 为单位。可用公式 $\mathrm{d}\ln x/\mathrm{d}x = 1/x$。 **[8]**

径向速度法

径向速度法利用多普勒频移 $\delta\lambda \equiv \lambda_\mathrm{obs} - \lambda_0$，即已知光谱线的观测波长 λ_obs 与静止波长 λ_0 之间的差异，来探测系外行星并确定其特性。

下图显示了 SP 系统中 Fe I 线的观测波长 $\delta\lambda$ 随时间的变化关系，已知静止波长 λ_0 =543.45 × 10^{-9} m。



径向速度的半振幅 K 定义为 $K \equiv (v_{\mathrm{r,\,max}} - v_{\mathrm{r,\,min}})/2$，其中 $v_{\mathrm{r,\,max}}$ 和 $v_{\mathrm{r,\,min}}$ 分别为最大和最小径向速度。对于行星的圆轨道，半振幅K可写为：

$$K = \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{1/3} \frac{M_\mathrm{p} \sin i}{(M_\mathrm{p} + M_\mathrm{s})^{2/3}}$$

其中 T 是周期，i 是行星轨道的倾角（行星轨道平面法线与观测者视线之间的夹角），$M_{\rm p}$ 和 $M_{\rm s}$ 分别是行星和恒星的质量。

(D01.2) 使用答案汇总纸中给出的图（已旋转 90\deg\）来回答以下小问。

(D01.2a) 绘制一条平滑曲线，连接图中所示的观测数据点。 **[2]**

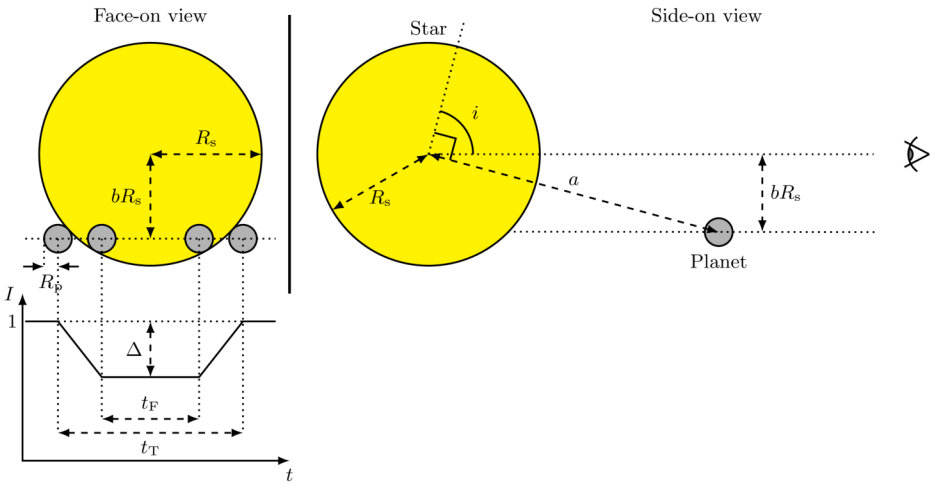
(D01.2b) 在您绘制的曲线上选择适当的点，并使用合适的方法来估算 T 和 K 及其各自的不确定性。用于计算 T 和 K 的所有数据点必须填写在答案汇总纸给出的表格中，并附有适当的标题。如有需要，可在表格的剩余部分中填写您的中间计算过程。 **[11]**

(D01.2c) 假设 $M_{\rm p} \ll M_{\rm s}$，估算行星的最小质量 $M_{\rm p,\sin,min}$ 及其不确定性，以 $\mathrm{M}_\odot$ 为单位。 **[5]**

(D01.2d) 使用在 (D01.2c) 中估算的 $M_{\rm p,\sin,min}$ 值，计算行星轨道半长轴的最小值 $a_{\rm min}$ 及其不确定性，以 AU 为单位。 **[4]**

凌星法（不考虑临边昏暗效应）

下图为行星凌其母恒星的示意图（未按比例绘制）。首先，我们假设恒星的平均光强在恒星盘面的分布是均匀的，同时由于恒星本身产生的固有噪声而存在一些微小起伏。



上图还显示了归一化光强 I 随时间 t 的光变曲线。未发生凌星时，恒星的平均光强取为 1。光强下降的最大深度在归一化光变曲线中由 Δ 给出。对于均匀明亮的恒星盘面，行星半径 $R_{\rm p}$ 与 Δ 的关系为

$$\left(\frac{R_{\rm p}}{R_{\rm s}}\right)^2 = \Delta,$$

其中 $R_{\rm s}$ 是恒星半径。

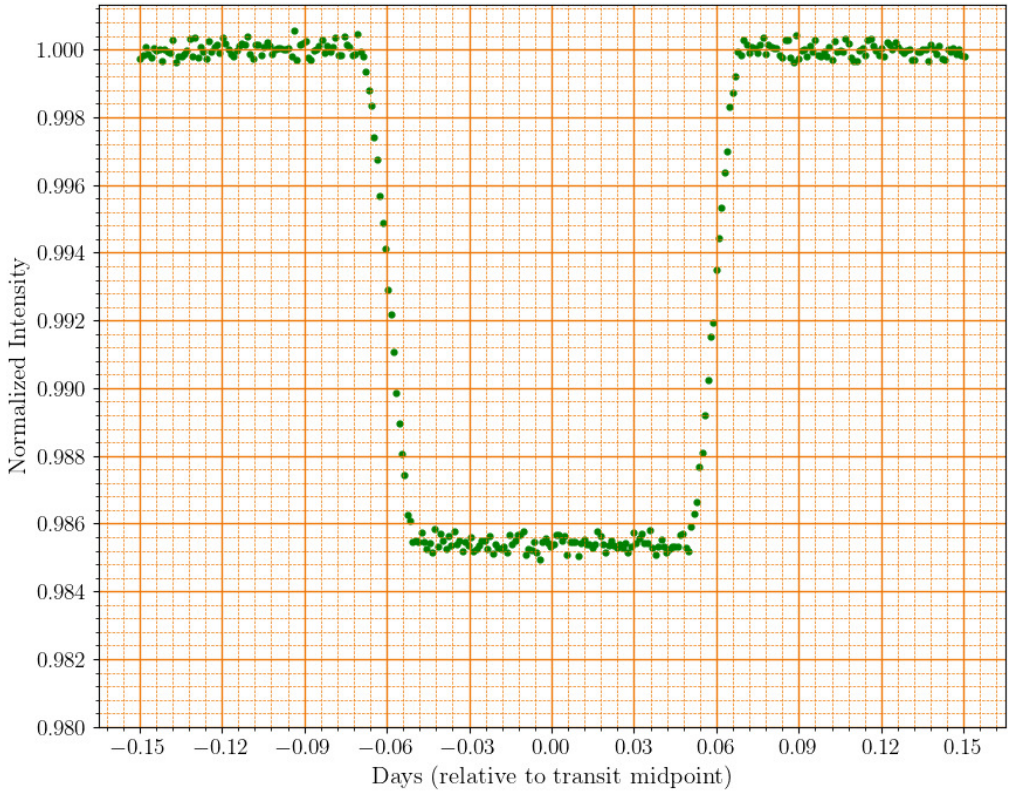
$t_{\rm T}$ 是凌星的总持续时间，即行星部分或完全遮挡恒星盘面的持续时间，而 $t_{\rm F}$ 是行星完全遮挡恒星盘面的持续时间。“碰撞参数” b 是凌星达到中点时，行星与恒星盘面中心之间的投影距离，以恒星半径 $R_{\rm s}$ 为单位。

若行星绕恒星的轨道平面与视线方向几乎平行，则碰撞参数由下式给出：

$$b = \left[\frac{(1-\sqrt{\Delta})^2 - (t_{\rm F}/t_{\rm T})^2(1+\sqrt{\Delta})^2}{1-(t_{\rm F}/t_{\rm T})^2}\right]^{1/2}.$$

(D01.3) 对于 SP 系统，已知恒星半径为 $R_{\mathrm{s}} = 1.20\mathrm{R}_{\odot}$，且凌星确实可见。使用在 (D01.2d) 中估算的最小轨道半径 $a_{\min}$，估算轨道倾角的最小值 $i_{\min}$。 **[3]**

假设恒星盘面亮度分布均匀，凌星的光变曲线如下所示。



(D01.4) 使用给出的光变曲线回答以下小问。为方便参考，上述光变曲线也在答案汇总纸上给出。

(D01.4a) 通过在图上标记适当的读数，估算 t_{T} 和 t_{F} 的天数。 **[3]**

(D01.4b) 估算 Δ 的平均值，并由此估算 R_{p}，以 $\mathrm{R}_{\odot}$ 为单位。 **[2]**

(D01.4c) 假设轨道半径为 $a_{\min}$，估算 i 的度数。 **[2]**

引入临边昏暗效应

到目前为止，我们假设恒星盘面的亮度分布是均匀的。实际上，由于“临边昏暗”这种光学效应，实际观测到的恒星盘面亮度分布并不均匀，其中心部分看起来会比边缘更亮。

临边昏暗效应可以通过相对光强 $J(\theta) \equiv \frac{I(\theta)}{I(0)}$ 来测量，其中 θ 是恒星表面某点的法线与观测者到该点的视线之间的夹角，$I(\theta)$ 是在恒星盘面该点处观测到的光强，$I(0)$ 是恒星盘面中心观测到的光强。对于远处的观测者，θ 从盘面中心的 $\theta = 0$ 变化到盘面边缘的 $\theta \approx 90°$。

(D01.5) 下表给出了测量到的太阳在某个波长下的 $J(\theta)$。我们假设恒星 S 和太阳具有相同的临边昏暗曲线。

θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$	θ	$J(\theta)$
0°	1.000	20°	0.971	40°	0.883	70°	0.595
10°	0.994	25°	0.950	50°	0.794	80°	0.475
15°	0.984	30°	0.943	60°	0.724	90°	0.312

临边昏暗曲线可用如下的二次公式来建模：

$$J(\theta) = 1 - a_1(1 - \cos\theta) - a_2(1 - \cos\theta)^2,$$

其中 a_1 和 a_2 是两个常数。

我们将通过为给定数据绘制合适的变量图，来对未知系数 a_1 和 a_2 作出估算。

(D01.5a) 定义一对变量 (x_1, y_1)，它们是关于 θ 和 J 的某种合适的函数。您需要以这对变量为 x 轴和 y 轴来绘制图像，从而估算 a_1 和 a_2。写出 x_1 和 y_1 的表达式。 **[2]**

如果您需要定义额外的变量来绘制额外的图像，请将它们命名为 (x_2, y_2)，等等。

(D01.5b) 列出绘制图像所需的数值。 **[4]**

(D01.5c) 在给定的坐标纸上绘制您新定义的变量，并将图像的标题命名为“D01.5c”。 **[7]**

(D01.5d) 用您绘制的图像估算 a_1 和 a_2，不需要估算不确定度。 **[7]**

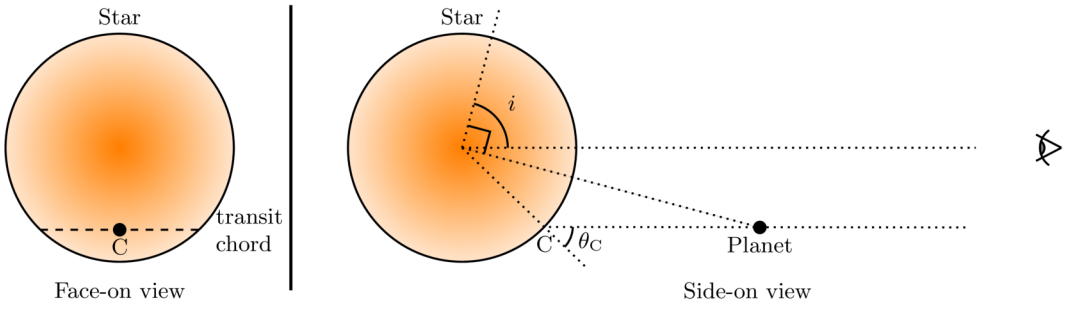
凌星法（考虑临边昏暗效应）

现在，我们考虑行星在存在临边昏暗效应的恒星盘面上的凌星现象。在存在临边昏暗效应的情况下，我们将通过上述的二次公式 $J(\theta)$ 来建模。没有发生凌星时，整个恒星盘面的平均观测强度 $\langle I \rangle$，由以下公式给出：

$$\langle I \rangle = \left(1 - \frac{a_1}{3} - \frac{a_2}{6}\right) I(0)$$

于是，行星凌星导致的亮度下降现在不仅取决于行星和恒星的相对大小 $\left(\frac{R_\mathrm{p}}{R_\mathrm{s}}\right)$，还取决于恒星盘面沿着凌星弦线的强度分布，这又取决于倾角 i。

下图为上述物理图像的示意图（未按比例绘制），其中恒星的较亮部分以较深颜色表示，而行星以黑点表示。



这里，$\left(\frac{R_\mathrm{p}}{R_\mathrm{s}}\right)$ 与从光变曲线测得的 Δ 之间的关系为

$$\Delta = \frac{I(\theta_\mathrm{C})}{\langle I \rangle} \left(\frac{R_\mathrm{p}}{R_\mathrm{s}}\right)^2,$$

其中 $I(\theta_\mathrm{C})$ 是恒星盘面在凌星弦线的中点（上图中的点 C）处的强度，θ_C 是视线与该点表面法线之间的夹角。从上面可以明显看出，对于给定的恒星，行星大小 R_p 和倾角 i 的不同组合可能对应相同的 Δ 值。

(D01.6) 通过使用两个波长下的凌星光变曲线数据，例如 λ_{B}（蓝色）和 λ_{R}（红色），可以将 R_{p} 和 i 的值唯一确定下来。这两个波长下的临边昏暗系数如下：

波长	a_1	a_2
λ_{B}	0.82	0.05
λ_{R}	0.24	0.20

(D01.6a) 在下列陈述中，选出正确描述了 λ_{B} 波长处凌星最大深度 Δ 与轨道倾角 i 关系的一项，并在答案汇总纸上勾选（✓）： **[2]**

A. Δ 随 i 的减小而增大。
B. Δ 随 i 的减小而减小。
C. Δ 与 i 无关。

(D01.6b) 凌星的最大深度 Δ 在一个波长处λ_{R}的测量值为 0.0159，在另一个波长处(\lambda_\text{B}\)的测量值为 0.0182。 **[4]**

在给出的坐标纸上，为 λ_{B} 和 λ_{R} 分别绘制凌星的光变曲线示意图，并分别用“B”和“R”标注两条曲线。假设凌星在两个波长下的总持续时间相同。曲线不需要按比例绘制，但应正确表示光变曲线的形状。

(D01.7) 我们将利用 λ_B 和 λ_R 两个波长处测得的凌星深度 Δ，采用图示法（graphical method）确定 SP 系统的行星半径 R_{p} 和轨道倾角 i。

(D01.7a) 写出包含相关变量的某种合适表达式，之后您将用这个表达式来绘制图像。（提示：您可以考虑以 i、b、R_{p} 为相关变量。） **[6]**

(D01.7b) 列出绘制图像所需的数值。 **[5]**

(D01.7c) 绘制合适的图像，并将标题命名为“D01.7c”。 **[7]**

(D01.7d) 用您绘制的图像估算 R_{p}（以 $\mathrm{R}_{\odot}$ 为单位）和 i（以度为单位）的值。 **[4]**

(D01.8) 根据在此大题中获得的结果，判断行星 P 是“岩质行星”（ROCKY）还是“气态行星”（GASEOUS），并在答案汇总纸上勾选（✓）相应的方框。 **[2]**

(D02) 预测日冕物质抛射抵达地球的时间 **[60 分]**

太阳偶尔会释放磁化等离子体，称为日冕物质抛射（CME）。它们起源于太阳表面，并向外传播。准确预测其抵达地球的时间对于理解和减轻其对地球轨道卫星的潜在影响至关重要。本题旨在利用 10 次 CME 事件的数据建立经验模型，从而预测 CME 的抵达时间。本大题取太阳表面到地球的距离为 $214\mathrm{R}_\odot$。

此外，假设太阳没有自转。由于电磁力、引力和阻力作用，CME 在传播过程中会经历变加速运动（variable acceleration）。在本题前两部分中，我们假设日地空间为真空。

日冕物质抛射在真空中的传播

(D02.1) 下表列出了 10 次 CME 事件的离开太阳表面（$= 1\mathrm{R}_\odot$）时的初始速度 u、抵达地球时的最终速度 v，以及离开太阳表面后到达地球所需的时间 τ（以小时为单位）。

CME 名称	u (km s^{-1})	v (km s^{-1})	τ (h)
CME-A	804	470	74.5
CME-B	247	360	127.5
CME-C	523	396	103.5
CME-D	830	415	71.0
CME-E	665	400	104.5
CME-F	347	350	101.5
CME-G	446	375	99.5
CME-H	155	360	97.0
CME-I	1016	515	67.0
CME-J	683	410	54.0

(D02.1a) 计算各次 CME 的平均加速度 a，单位为 m s^{-2}。 **[6]**

(D02.1b) 我们假设 CME 加速度的一个经验模型 a_{model}，它依赖于初始速度 u，表达式为 $a_{\mathrm{model}} = m\left(\frac{u}{u_0}\right) + \alpha$; 其中，$a_{\mathrm{model}}$ 的单位为 m s^{-2}，u 的单位为 km s^{-1}，且 $u_0 = 1.00 \times 10^3$ km s^{-1}。

通过绘制适当的图像，来确定常数 m 和 α 及其不确定度，将图像的标题命名为“D02.1b”。 **[12]**

(D02.1c) 对每次 CME，以表格形式列出 a_{model}，单位为 m s^{-2}。据此计算平均加速度 a 与模型给出的加速度 a_{model} 之间的均方根偏差 δa_{rms}。 **[4]**

(D02.2) 我们考虑另外两次日冕物质抛射：CME-1 和 CME-2，其初始速度分别为 $u = 1044$ km s^{-1} 和 $u = 273$ km s^{-1}。

(D02.2a) 使用 (D02.1b) 中获得的经验模型，分别预测 CME-1 和 CME-2 的抵达地球时间 $\tau_{1,\,\mathrm{m}}$ 和 $\tau_{2,\,\mathrm{m}}$，以小时为单位。 **[4]**

(D02.2b) 实际观测到的 CME-1 和 CME-2 抵达地球时间分别为 46.0 h 和 74.5 h。对于某次 CME，若模型预测的抵达时间在其实际观测的抵达时间的 20% 误差范围内，则判定经验模型对该 CME 有效（VALID）；否则判定为无效（NOT VALID）。请判定经验模型对这两次 CME 是否有效，并在答案汇总纸的相应方框中勾选（✓）。 **[2]**

日冕物质抛射在太阳风中的传播

现实中，日地空间充满太阳风（solar wind），其对 CME 施加阻力（drag force）。该阻力可使 CME 减速或加速，具体取决于 CME 相对于太阳风的速度。为量化太阳风的影响，我们将在距离 $R_{\mathrm{obs}}(t) \geq R_0$ 时采用纯阻力模型（"drag-only" model），其中 R_0 是阻力开始主导 CME 运动的临界距离。

该模型中，CME 与太阳表面的距离 $R_{\mathrm{D}}(t)$ 和速度 $V_{\mathrm{D}}(t)$ 由下式给出：

$$R_{\mathrm{D}}(t) = \frac{S}{\gamma}\ln\left[1 + S\gamma(V_0 - V_{\mathrm{s}})(t - t_0)\right] + V_{\mathrm{s}}(t - t_0) + R_0$$

$$V_{\mathrm{D}}(t) = \frac{V_0 - V_{\mathrm{s}}}{1 + S\gamma(V_0 - V_{\mathrm{s}})(t - t_0)} + V_{\mathrm{s}}$$

其中：
$\gamma = 2 \times 10^{-8}\,\mathrm{km}^{-1}$；
V_{s} 为太阳风恒定速度（此部分假设 $V_{\mathrm{s}} = 330\,\mathrm{km\,s}^{-1}$）；
R_0 和 V_0 分别是时刻 t_0 的距离和速度；
S 为符号因子：$S = 1$（若 $V_0 > V_{\mathrm{s}}$），$S = -1$（若 $V_0 \leq V_{\mathrm{s}}$）。

(D02.3) 下表中的数据展示了两次日冕物质抛射 CME-3 和 CME-4 与太阳表面的径向距离观测值 $R_{\mathrm{obs}}(t)$（单位为 $R_\odot$）随时间 t（单位为小时）的变化。各表最后一行的数据点（分别为 D5 和 P8）对应 CME 抵达地球的时刻。对于这一小问，假设 $V_{\mathrm{s}} = 330\ \mathrm{km\,s}^{-1}$。

CME-3		
数据点	t（小时）	$R_{\mathrm{obs}}(t)$（$\mathrm{R}_\odot$）
D1	0.200	6.36
D2	0.480	7.99
D3	1.22	11.99
D4	1.49	13.51
D5	58.05	214

CME-4		
数据点	t（小时）	$R_{\mathrm{obs}}(t)$（$\mathrm{R}_\odot$）
P1	1.00	4.00
P2	3.00	6.00
P3	4.00	9.00
P4	5.00	11.0
P5	21.0	43.0
P6	50.0	100
P7	85.0	170
P8	111	214

我们将评估“纯阻力”模型（"drag-only" model）能否令人满意地预测这些 CME 的抵达时间。使用该模型，需合理选择 t_0 及对应的 R_0 和 V_0。

(D02.3a) 对 CME-3，采用以下两种情形： **[6]**
(C1) t_0 取区间 D1–D2 的中点；
(C2) t_0 取区间 D3–D4 的中点。
假设速度在 D1–D2 和 D3–D4 这两个特定区间之内恒定，但两个区间的速度可以不同。

在这两种情形下，利用 t_0、R_0 和 V_0，分别计算 $t = 58.05$ h 时径向距离的观测值与模型预测值之差 $\delta R_{\mathrm{D}} \equiv R_{\mathrm{obs}}(t) - R_{\mathrm{D}}(t)$，以 $\mathrm{R}_{\odot}$ 为单位。

(D02.3b) 对 CME-4，采用类似于 (D02.3a) 的方法，在以下两种情形下分别估计日地之间的点 P5、P6、P7 和 P8 处的 $R_{\mathrm{D}}(t)$： **[4]**

(C3) t_0 取区间 P1–P2 的中点；
(C4) t_0 取区间 P3–P4 的中点。

(D02.3c) 在 C3 和 C4 两种情形下，分别标出 CME-4 在点 P5、P6、P7、P8 处 $R_{\mathrm{D}}(t)$（单位为 $\mathrm{R}_{\odot}$）与 t（单位为小时）的关系，图像标题命名为“D02.3c”。在同一图像中，对上述两种情形分别绘制 $R_{\mathrm{D}}(t)$ 的光滑曲线。此小问中，横轴（x 轴）范围取为 0 至 180 小时。 **[10]**

(D02.3d) 根据该图，分别估算 C3 和 C4 两种情形下，CME-4 抵达地球时间的实际观测值与纯阻力模型预测值之差的绝对值 $|\delta\tau|$。 **[4]**

(D02.3e) 判断以下陈述的真（TRUE）假（FALSE），并在答案汇总纸的相应方框中勾选（✓），无需书面论证： **[1]**
“与 CME-4 相比，太阳风对 CME-3 施加的阻力更早地开始起主导作用。”

(D02.4) 考虑阻力为作用于 (D02.1) 中的 10 次 CME 的主导力。假设从太阳表面（$R_0 = 1$ $\mathrm{R}_{\odot}$）到更远距离处，纯阻力模型均适用于所有 CME。 **[7]**
估算并列出每次 CME 的太阳风速度 V_{s}，以 km s^{-1} 为单位。进一步估算所有 10 次 CME 的太阳风速度的平均值 $V_{\mathrm{s,\,avg}}$。